HPM 通訊

第三卷 第二、三期合刊 目錄（2000 年 3 月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

數學教育新思潮

數學教師成長的範例

台師大數學系教授 洪萬生

由西松高中與該校教師會承辦的「教師專業成長系列（二）」(1999 年 10/23 起至 11/21 止)，之教師研習報告已經彙整成冊。在即將出版惠及更多數學教師前，筆者有幸應邀寫幾句話，深感榮幸與欣慰。

這本研習報告彙整，給筆者兩個極深刻的印象：首先，西松高中教師會推動教師專業成長的『前瞻性』；其次，參與研習教師的熱情與回應。長久以來，中學數學教師一直都是校園寵兒，實在很難想像「專業成長」會成為他（她）們的一種「修辭」(rhetoric)。現在，這本集子的出現，讓我們「驚艷地」發現：有一群數學教師正在進行「寧靜革命」。不過，她（他）們並沒有變得「麻辣」，倒是拿起筆來，個個都表現得頭頭是道，不太像一般人所熟悉的刻板印象。

通常受過大學數學專業訓練的人，大都習慣與柏拉圖的「理想世界」(ideal world)（相對於「現實世界」(material world)）對話，因而比較拙於日常語言的表達。於是，有很多數學教師寫起數學文章來，彷彿是在安排上課講義，完全讓人感受不到傳道解惑的迷人風采。儘管如此，數學教師畢竟天生「才」質難自棄，只要稍加鼓勵，就可以立刻脫胎換骨，令人刮目相看。像本集子很多論述的表現，就不輸給個中老手，真是為數學教師專業成長樹立了典範。

一般而言，數學教育架構的三大支柱不外乎課程、教法與學習。因此，數學教師專業成長的內容，至少應該涵蓋三個方面：(1) 教師是否有能力評鑑課程與教材；(2) 教師是否充分掌握學生的學習與評量；(3) 教師是否願意對數學知識「從容地」變換觀點與教法。在本集子中，西松高中教師會所彙編的「高中數學教學問題」與「國中數學教學問題」，就勾勒了數學教師專業成長可以而且值得具體發展的很多方向，譬如：

・為什麼最小質數不訂為 1，如何說明以澄清其觀念？

・什麼叫做無限（無窮）？

・比較 0.999... 和 1 的大小，並說明你的理由。

・為什麼拋物線不是雙曲線的一支？

・直式開方法與十分逼近法有什麼關係？

・為什麼 3：2 中的冒號可以改為除號？

・某生問為什麼 $\sqrt{5}$ 叫無理數？而 5 / 13 就稱有理數？這是什麼道理？

・函數的起源為何？為何如此定義？（為何不可一對多？）它有什麼用？

諸如此類問題，不過順手捻來，然而，它們卻是極真實的教學問題，同時，它們不只擁有知識性 (epistemological)，同時，也蘊含了非常豐富的歷史 (historical) 與文化(cultural) 興味。我們相信數學教師無論採取哪種進路 (approach)－譬如 PME 或 HPM 或甚至於兩者的結合，只要逐步深入回答或澄清這些問題，他（她）們一定可以「進而研發教學策略，提昇教學品質，寓教學於研究，用研究於教學。」

現在，本土的教師專業成長已經跨出了第一步。對它往後的發展，我們在此獻上誠摯的祝福，期待它為臺灣數學教育史寫下劃時代的一頁。

天元術 vs.點竄術

台師大數學研究所博士班研究生 蘇意雯

「算學何為乎學，難題易題，盡無不明之術也。雖說理高尚，解術迂闊者，乃算學之異端也。」~~關孝和

關孝和小傳

西元 1642 年，關孝和出生於上野國藤岡的一個武士家庭。他是四代將軍德川家康的家臣，領有三百石的俸祿。關孝和從小就展露其計算上的才能，在六歲時，由於指出大人布算的失誤，眾人皆稱其為神童。剛開始，他授業於高原吉種，長大後，其傑出的才能日益發揮，天文律曆莫不精通，出類拔萃於同儕之上。關孝和發現了很多新的定理，他的成果彙集成數百卷，日本人尊為算聖。

關孝和在世，對門下弟子教授珠算法、算籌法、演段法、及點竄術，隨著這些課業的熟習，會頒與五階段的證書。他終生無子嗣，收養姪子新七為養子，後於 1708 年病逝，葬於淨輪寺，享年 67 歲。由於新七品行不端，終至招罪於幕府而被抄家。此後嗣絕孫亡，關孝和墓地凋零荒廢。到了 1794 年，齋藤正順等人路過此寺，偶然間發現殘破的墓碑，撥開滿佈的蘚苔後，才發現是關孝和的墳墓，所以聚集了 8 人合資建碑，使廢塚得以復原，此乃後話了。關孝和對和算貢獻非常大，可說是日本學問之代表。在數學方面其有獨特的見解，並且對日本及中國的數學文獻不但涉獵極深，也加以系統的整理分析。因此，日本數學史家小倉金之助讚譽關孝和是個集「獨創家」和「組織家」於一身的天才『關孝和□實□、

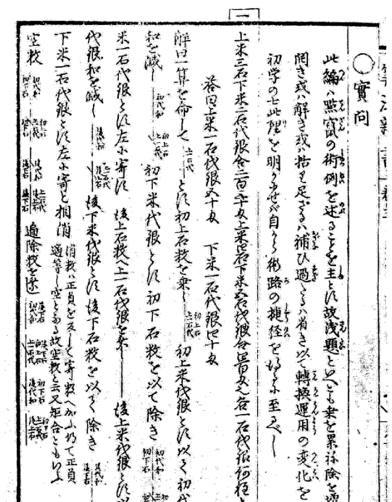
獨創家□□□□同時□、組織家□□兼□合□□天才□□□□□□□□』（小倉金之助，1941）。

17 世紀的日本關流代數

17 世紀後期日本的數學史上值得一提的就是類似法國 Viete 所創的代數學派，其創辦人正是關孝和。這門數學藝術是關孝和沿革中國的代數天元術而來，何謂天元術呢？ 通常用求解方程的方法來解決實際問題，首先要設未知數，再按著問題所給的條件，列出一個包含所設未知數的方程，再接著是解方程，求出未知數。西元十一至十三世紀的中國古算家，不僅創造了增程開方法，用來求解高次方程的普遍解法，也創造了根據已知條件可以列出方程的方法，這就是天元術。天元指的就是問題中的未知數，「立天元為某某」即為「設 x 為某某」的意思。用天元術來記多項式或方程，常常是在一次項旁記一個“元”字，或在常數項旁記一“太”字。中國古算書中有關天元術的著作流傳至今日者只有李冶的《測圓海鏡》、《益古演段》、朱世傑的《算學啟蒙》以及《四元玉鑑》。

究竟關孝和如何得知天元術並加以改革?天元術是經由元朝朱世傑《算學啟蒙》的重印本傳入日本。《算學啟蒙》成書於 1299 年，而久田玄哲於 1658 年重新出版。《算學啟蒙》一書全面地介紹了中國宋元數學－包括了天元術在內的一切內容，對日本數學的發展產生了比較大的影響（李儼，1983），而在那時候天元術在中國幾乎已被遺忘。至於其被遺忘之原因，我們會於後面的篇幅再加以討論。在 1671 年澤口一之出版《古今算法記》，這本書是目前所知第一本正確了解和操作天元術的日文書籍。而更重要的一件事是，澤口一之在書末留下了 15 題未解的數學問題，因為其無法利用天元術的方法求解。所謂的遺題承繼是日本和算的特色，某和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者。其弟子、門人、或其他讀者在經過努力研究，解決了難題之後，一般要著難題解答之書，並在卷末更加深入的揭示問題，提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的研究。關孝和在他於 1675 年年初出版的標題為《發微算法》的小書中試著解決了所有的問題，這本小冊子是關孝和有生之年唯一出版的一本著作，但只是簡單的表示澤口一之的問題及解答，並沒有列出詳細的解題過程。因為在中國數學的傳統中，此種解題形式是相當常見的。

後來關孝和最有天份的傳人建部賢弘(1664-1739)在 1685 年出版了《發微算法演段諺解》，為這本書提供了詳細的註解。也就是建部賢弘的註解，使得關孝和的改良代數第一次廣為人知。關孝和的改良代數首先稱之為傍書法，後來松永良弼又改稱為點竄術（意即以符號表示和消去的技術）。關孝和改良中國的天元術，用文字符號表示未知數。並推廣此種方法至數個未知數的過程，而形成了一個代數的新系統。由有甚之，關孝和的代數是一個用書寫形式的計算方式。這也就是為何有人把關流代數類比為 Viete 的原因。


○實問

此編ハ點竄の術例を述ることを主とし故淺題といへとも乗を累ね除を増し或ハ開き或ハ解き或ハ拈を足ざるハ補ひ過るハ省き以て轉換運用の變化を示せ初学の士此理を明らかにせバ自ら術路の捷径を知るに至るべし

答曰上米一石代銀五十匁　下米一石代銀七十匁

點竄（關流）の一例

長谷川寛の「算法新書」（天保元年 1830）の一頁で，代表的な教科書ですが，後期のものですから，その積りで．

下圖即為一例。

因此，從 17 世紀末以後，日本的數學家能夠處理類似 a-bx+cx2-dx3=0 以及 3y3+5xy2-8x2y+4x3=0 等代數方程式。像這類把符號代數應用至解數個未知量在早期只出現於西歐及日本，但是在歐洲的符號代數是以古典希臘數學以及中世紀阿拉伯數學為始祖，另一方面，在日本的符號代數卻是研襲於中世紀中國的操作型代數。

朱世傑之《算學啟蒙》

如前所述，談到關孝和，就不得不提及於宋元間與秦九韶、李冶鼎足而立的朱世傑。他的著作《算學啟蒙》共分上、中、下三卷，凡二十門，二百五十九問。書中涉及了四則運算、開方、天元術以及垛積等多方面的數學內容。該書涉獵之課題相當廣泛，並且由淺入深，包羅無遺，形成了一個完整的體系，既為實際應用提供了工具，也為深造闢了蹊徑，是一部很好的啟蒙讀物。因此祖頤稱《算學啟蒙》與《四元玉鑑》相為表裏，『此書首列乘除布算諸例，始於超徑等接之術，終於天元。如積開方，由淺近以至通變，循序而進，其理易見。名曰啟蒙，實則為玉鑑立術之根。』在《算學啟蒙》卷下第五開方釋鎖門中，朱世傑系統的講解了利用天元術來解決各種問題的算法。可惜的是，宋元時期中國數學許多重要的發展並沒有持久，反而迅速衰落。到了西元十五世紀，明朝的一些數學家，對天元術、四元術就幾乎全然無法理解。在整個明朝以至清初數百年間，這些學問幾成了絕學。

導致此種現象的原因很多，其中相當主要的就是這種發展脫離了當時的社會需要。以天元術為例，當時應用在生產實踐上的實很少見。考察當時社會經濟需求，需要求解四次或四次以上的高次方程問題，在當時都不是從生活和生產實際中產生出來的。脫離了社會的需要，其內容又都艱深不易了解，構成了這些成果失傳的主要原因。而且當時明朝有關商業貿易的發展大增，對數學提出了日益繁複的計算任務。有大量大部分為加減乘除的計算問題需要計算得更快和更加便利。在此種狀況下，籌算已不敷使用，因此一種新的計算工具－算盤由焉產生。也由於如此，《算學啟蒙》成書之後四百餘年，它在國內的流傳情況尚不清楚，明朝的《永樂大典》也未收集此書。但它流傳到朝鮮、日本後，產生了巨大的影響。在朝鮮李朝，它是教材和選拔算官的基本書籍之一，其算學的考試科目就明訂有「啟蒙算」（金容雲等，1978）。世宗本人還曾於 1430 年向當時副提學鄭麟趾學習此書。《算學啟蒙》在朝鮮已知的刻本有 1433 年慶州府刻本以及 1660 年金始振刻本。《算學啟蒙》在中國曾一度失傳，後來羅士琳讓人從北京琉璃廠書肆中訪獲金始振重刻本，詳加校勘，於 1839 年在楊州刊行，這本書才又重行問世。

天元術與點竄術之比較

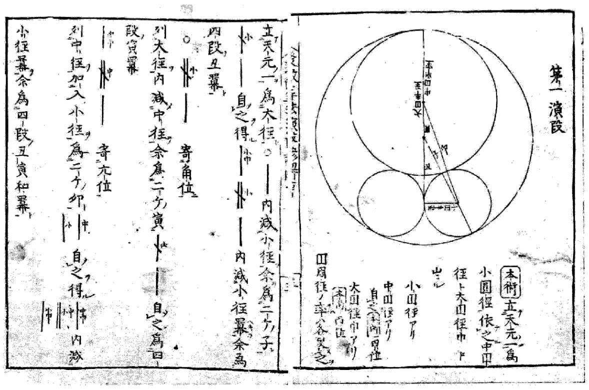
綜而言之，天元術與點竄術之不同，可分為下述兩點：其一為利用天元術解

任何高次方程式僅知求一正根（錢寶琮，1932），但點竄術在解二次式時就已知有兩根。例如在關流算法七部書之病題明致中的變題定究第三中，有如下的例題：

> 假如有半梯。外斜一尺六寸，內斜一尺九寸。只云左右闊和一尺八寸。問右闊。其答案為：初。右闊七寸。左闊一尺一寸。後。右闊五寸。左闊一尺三寸。

其二為天元術以算木運算，稱為器具代數（小倉金之助，1941）。而點竄術則是用傍書筆算法。因為是採用筆算法，所以在解法上，我們就可以在一個以文字表示的未知數後，再設補助未知數。然後列出聯立方程式，再依其關係逐一消去，最後成為一個一元方程式。由於成為一元方程式，就可適用於天元術，解出答案。而天元術僅能設一未知數，由於受到籌算記法的局限性，就算是之後的四元術，也只能解不高出四元以上的問題（李儼，1983）。因此點竄術是較有彈性的。下圖取自關孝和發微算法的解釋書《發微算法演段諺解》，以《古今算法記》的遺題為例。另一圖為其說明。

在點竄術之外，關孝和還有一系列包含近世數學萌芽的成果，主要的有圓理、行列式概念、垛積、極值條件等等，除了關孝和本身，他的門人中也是人才輩出，再加上其他流派的努力，共同創造出了日本數學的黃金時代。



「發微算法演段諺解」

これは關孝和の「發微算法」の解釋書で，名儀は建部賢弘の著（貞享 2 年 1685）となつてゐますが，關自身の力が加はつてゐることには，疑ひないでせう．內容の說明は 52 頁に示しました．

大圓の直徑を x，中圓の直徑を y，小圓の直徑を z とする．x から z を引いた殘り即ち $-z+x$ は，圖の中で子（即ち大圓の中心と小圓の中心との距離）の 2 倍に當る．これを二乘した $z^2-2zx+x^2$ から小圓徑の二乘を引けば，$-2zx+x^2$ となる．この式を（角）と名づけよう．〔以下省きます．〕

つまり此解法は，次のやうな方法なのであります．

問題中の五寸を a，百二十步を A と書けば，x, y, z について，下の三つの方程式を得る．

(1) $y=z+a$.

(2) $x^2=4A+[(z+a)^2+2.^2]$.

(3) $(4y+2z)^2.x^2y^2=[x^2(4y-z)-y^2z]^2$.

(1) から y，(2) から x^2 の値を，(3) に代入すれば，x と y は消去されて，z の六次方程式になるから，これを（天元術で）解いて，z が求められる．

參考文獻：

李儼，1983，《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。

劉鈍，1997，《大哉言數》，遼寧：遼寧教育出版社。

那日蘇，1992，〈日本和算中的遺題承繼與算額奉揭〉，《數學史研究文集第三輯》，內蒙古大學出版社，台北：九章出版社。

洪萬生，1996，〈數學史與代數學習〉，《科學月刊》第二十七卷第七期，pp.560~567。

李文林主編，1998，《數學珍寶－歷史文獻精選》，北平：科學出版社。

東京數學物理學會，1907，《關流算法七部書》，東京：東京帝國大學理科大學。

大矢真一、片野善一郎，1979，《數字□數學記號□歷史》東京：裳華房。

日本學士院編，1983，《明治前 日本數學史》，東京：岩波書店。

金容雲、金容局，1978，《韓國數學史》，東京：槙書店。
錢寶琮，1932，《中國算學史》，北平：國立中央研究院歷史語言研究所。
遠藤利貞遺著，1918，《日本數學史》帝國學士院藏版，東京：岩波書店。
小倉金之助，1941，《日本□數學》，東京：岩波新書。
Sasaki, Chikara, 1999, “The French and Japanese Schools of Algebra in the Seventeenth Century：A Comparative Study”，*Historia Scientiarum* Vol.9(1), The History of Science Society of Japan.

教師園地

孟德爾的豌豆:統計和機率在遺傳學上的重要貢獻

竹北高中 陳夢綺老師

在中小學基礎教育環境裡，「學習數學有何用？」是學生常有的疑惑，而教師的解釋也往往無關痛癢。或許我們來看看十九世紀孟德爾的故事，可以給我們一點新鮮的啟發。

孟德爾(Mendel，1822-1884)生於奧地利鄉下的一個農家，中學畢業後進入奧爾米次哲學院，但卻因家貧而輟學，為了生活，只好進入位於維也納北部布爾諾的奧古斯丁修道院做修道士，他一方面在修道院裡當神父，一方面仍努力地學習研究，並受委派到茨納伊姆中學擔任希臘文和數學代課老師。兩年後，修道院院長派他到維也納大學學習物理、化學、數學和動植物學以獲取大學預科教學之永久資格，在往後的十幾年時間裡，雖然從未通過教師合格考試，仍繼續在布爾諾的技術中學教授物理學與自然歷史，直到 1868 年被選為修道院院長。孟德爾終生為維也納動植物學會會員，且為布爾諾自然科學研究學會及奧地利氣象學會的創始人。

孟德爾的豌豆實驗 1856-1863 年

十九世紀，達爾文(Darwin，1809-1882，英國博物學家)，隨海軍科學考察船『小獵犬號』到世界各地旅行考察，觀察到各地的動植物之後，開始質疑『創世說』---萬物都是由上帝所創造，進而提出『演化論』，主張所有生物都是從少數原始的物種慢慢演變繁衍而來。然而此理論卻有一疏漏：當時的人以為每個人都是父母兩人的揉合，如同將黑漆與白漆調在一起，得到灰色的漆。在這種論點下，天擇(Natural Selection)根本不可能存在，因為變異會沖淡，生物都會變成一致的灰色，可是我們又確切地知道，並不是所有的生物都成了一致的灰色。然而達爾

文卻提不出自然變異的機制究竟為何，同時，各地的博物學家及生物學家也努力地想找出合理的答案。

孟德爾出生農家，在自然環境裡成長，從小喜愛蒔花弄草，對植物的生長開花極感興趣。長大後，雖然因為家貧而當了神父，但修道院的院子反倒成了他的舞台。以他對植物生長的長期觀察，希望能由此而找出遺傳的機制。他觀察到豌豆的花瓣閉合，可自花授粉，同時實驗時也可以人工方式異花授粉，且生長期只有三個月易於栽培，可順利地進行實驗。更重要的是，它們恰好有兩兩對應又截然不同的性狀，例如高莖、矮莖等，可供觀察比較，所以他選定了豌豆作為他實驗觀察的對象。

在進行實驗之前，他花了很多時間仔細篩選出親代(即自花授粉數代後均只表現單一性狀的豌豆植株)，準備開始進行實驗。

實驗一及假說一

為了瞭解一項對偶性狀的遺傳機制，孟德爾將具有對偶性狀的親代交配，產生第一子代，只觀察其此項特徵，卻發現第一子代中，居然很整齊地只留下了一種性狀，例如：高莖和矮莖交配後，新生代中清一色地都是高莖的。孟德爾將此保留下來的性狀稱為「顯性」，而其對偶性狀稱為「隱性」。再由第一子代自交而得到第二子代，結果隱性性狀又出現了。孟德爾仔細做下紀錄(參考下表)，觀察分析這些數據，發現了不論是哪一種性狀都呈現出大約是 3：1 的比例。

親代	第一子代	第二子代	比例
圓形種子×皺皮種子	圓形種子	5474 圓形種子 1850 皺皮種子	2.96：1
黃色種子×綠色種子	黃色種子	6022 黃色種子 2001 綠色種子	3.01：1
灰色種皮×白色種皮	灰色種皮	705 灰色種皮 224 白色種皮	3.15：1
飽滿豆莢×癟縮豆莢	飽滿豆莢	882 飽滿豆莢 299 癟縮豆莢	2.95：1
綠色豆莢×黃色豆莢	綠色豆莢	428 綠色豆莢 152 黃色豆莢	2.82：1
腋生花×頂生花	腋生花	651 腋生花 207 頂生花	3.14：1
高莖×矮莖	高莖	787 高莖 277 矮莖	2.84：1

孟德爾由實驗結果分析，提出解釋(假說)，他假設 a：性狀的遺傳是由細胞中的某種因子所控制的(今天我們稱為基因)，控制一種性狀的因子有二種型式：一為顯性，一為隱性。b：此種因子在細胞中是成對存在的，當形成精子和卵子時，便互相分離，各帶一個。c：受精時，若顯性因子和隱性因子相結合，便表

現出顯性性狀。(以上三點即為孟德爾的第一定律一分離律)

精＼卵	A	a
A	AA(顯)	Aa(顯)
A	Aa(顯)	Aa(隱)

這樣一來，就可以正確地解釋為什麼顯性與隱性性狀是 3：1 的比例，並進一步反駁當時黑漆白漆調成灰漆的說法。

實驗二及假說二

為了瞭解不同性狀間的遺傳機制，同時考慮兩對不同性狀來進行實驗，以黃色圓形種子(顯性)和綠色皺皮種子(隱性)為親代，交配後第一子代全為黃色圓形種子，再由第一子代自交而得到第二子代，其中有 315 株黃色圓形種子，108 株綠色圓形種子，101 株黃色皺皮種子，32 株綠色皺皮種子，可得大約的比例黃色圓形：綠色圓形：黃色皺皮：綠色皺皮是 9：3：3：1。孟德爾提出解釋(假說)，他假設控制不同性狀的成對因子都會獨立地分配到精子和卵子去(此即為孟德爾的第二定律一獨立分配律)

例如：親代是黃色圓形種子(顯性；因子為 YYRR)和綠色皺皮種子(隱性；因子為 yyrr)

第一子代即為黃色圓形種子(顯性；因子為 YyRr)。精子或卵子即分配為 YR 或 Yr 或 yR 或 yr，則第二子代為

精＼卵	YR	Yr	yR	yr
YR	YYRR 黃圓	YYRr 黃圓	YyRR 黃圓	YyRr 黃圓
Yr	YYRr 黃圓	Yyrr 黃皺	YyRr 黃圓	Yyrr 黃皺
Yr	YyRR 黃圓	YyRr 黃圓	YyRR 綠圓	yyRr 綠圓
yr	YyRr 黃圓	Yyrr 黃皺	YyRr 綠圓	yyrr 綠皺

故結果為黃色圓形：綠色圓形：黃色皺皮：綠色皺皮是 9：3：3：1。

驗證

a. 將 YyRr 型與 YYRR 型均為黃色圓形種子的豌豆互相交配，依其理論，子代的基因型有 YYRR，YYRr，YyRR，YyRr 均應為黃色圓形種子。
   結果：子代 98 株豌豆果然全是黃色圓形種子，與理論吻合。

b. 將 YyRr 型與 yyrr 型互相交配

應得	YR	Yr	yR	yr
Yr	YyRr 黃圓	Yyrr 黃皺	yyRr 綠圓	yyrr 綠皺

結果：子代 31 株黃圓，27 株黃皺，26 株綠圓，26 株綠皺，接近

1：1：1：1，與理論吻合。

發表

孟德爾於 1865 年在布隆城召開的自然科學會議上公開發表論文，並在會刊中刊登，分送到歐洲的各圖書館裡去，可惜很少人注意到這篇文章，甚至沒有人了解。他以數學方法分析性狀的機率，也只有數學家才感興趣，偏偏這些數學家對豌豆興趣缺缺，因此在當時這些發現並未受到學術界的重視。直到 1900 年分別由植物學家荷蘭的德弗里斯(Hugo De Vries)，德國的科倫斯(Karl Correns)，奧地利的切爾馬克(Erich Von Tschermak)，在各自獨立的工作中得到和孟德爾同樣的結論，他們在發表論文前查閱文獻資料時，又不約而同地發現三十多年前孟德爾早已發現且証實過了。於是孟德爾從此被公認為「遺傳學之父」，遺憾的是，孟德爾直到去世時並不知道自已的研究是近代遺傳學的起點。

啟示

孟德爾由平時的細心觀察，到訂下實驗計劃、分析實驗數據、建立假說、預測結果，再由實驗驗証，最後終於確定整個理論，這一個符合科學精神的嚴謹程序，確立了他「遺傳學之父」的地位。

有人說：「數學是大自然的語言」，在科學的發展史上，因為看透大量數據而得到重大進展的科學家，除了孟德爾，還包括了刻卜勒(Johannes Kepler，1571-1630，行星運動三大定律)，馬克士威(Jaames C.Maxwell，1831-1879，馬克士威方程式)等，他們都是憑著深厚的數學基礎及銳利的數學敏感度，才能在大量的數據中看出有意義的端倪。很多學習者(尤其是現代速食文化盛行)常著急地只學了一點點，就要問做什麼用，上列三位大科學家，如果不是在平時培養好敏感度與洞察力，又豈能在大堆數據中看出任何規律？

另一方面，仔細看看孟德爾的背景經歷，他學習物理、化學、動植物學、氣象學等，涉獵層面廣泛，也因此能不局限在單一學科裡打轉；能用不同的角度(量化的處理方式)來觀察「遺傳」，反而跳脫了當時思想的窠臼，得到超越時代的結果。自然界中的規律俯拾皆是，各學科間其實互相關聯，不論是哪一學科都無法和別的學科劃清界限，學習者、研究者當然也不應劃地自限了，尤其是從事科學教育者，更應重視科際整合，以擴大學生的視野。

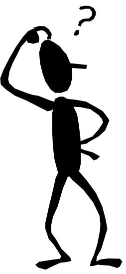
參考資料

曹亮吉，1996，《阿草的葫蘆:文化活動中的數學》。台北：遠哲科學教育基金會。
梁衡，1985，《數理化通俗演義》上、下冊。新竹：理藝出版社。
John Brockman(唐勤，梁錦鋆譯)，1998，《第三種文化：跨越科學與人文的鴻溝》。台北：天下遠見出版社,。
諸亞儂等，1985，《高中生物》第三冊。台北：國立編譯館。
Cecie Starr Ralph Taggart (丁澤民,王偉,張世玲,連慧瑞譯)，1989，《生物學》上冊。

台北:藝軒圖書出版社。
大美百科全書，1980， V.18 Mendel p.402-403。台北：光復書局。
中國大百科全書，1994，生物學Ⅱ Mendel’s laws。台北：錦繡出版社.

感謝各校聯絡人：
●永春高中 陳明山 ●內湖高中 潘國華 ●松山高中 郭耀昇 ●中山女高 劉天民 ●成功高中 繆友勇 ●大直國中 陳文鴻 ●北投國中 黃國斌 ●石牌國中 張添順 ●大理國中 汪錫霞 ●永吉國中 謝朝隆 ●天母國中 賴春錦 ●蘭雅國中 李信仲 ●景興國中 彭君智 ●開平高中 林裕意 ●民生國中 程麗娟 ● 金山中學 陳坤松 ●基隆女中 林瑞淑 ●土城國中 賴炘堂 ●羅東高中 賴順基 ●復興國中 陳瑩琪 ●台南女中 吳昭榕老師 ●台中女中 陳勇政老師 ●安康中學 白家結 ●三峽明德中學 劉建宏 ●竹北國中 賴育伸 ●嘉義協志工家 朱清國 ●馬祖中正國中 陳君武

大算家 vs. 小迷思



台師大數學系 洪萬生教授輯

$+\infty<0$?

十七世紀英國數學家華里士（或沃利斯，John Wallis， 1616-1703）曾擔任牛津大學教授，著有【無窮算術】(Arithmetica infinitorum， 1665)，其中包括了積分的一些重要成果，對牛頓（Issac Newton, 1642-1727）影響極為深遠。譬如微積分課本中有一個 π 的無窮乘積展開式：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

就是他的貢獻。不過，在【無窮算術】中，華里士「竟然」提出了如下的論證：

當 a>0 時，$\frac{a}{0}=\infty$；同時，如果 b< 0, $\frac{a}{b}<0$

茲令 $c=\frac{a}{b}$，則由於 b<0, 則 $\frac{a}{0}<\frac{a}{b}=c$，所以

$+\infty<c<0$

君子之德如日月之蝕？！你（妳）以為然否？

參考資料

Nahin, Paul J., 1998, *An Imaginary Tale: The story of* $\sqrt{-1}$. Princeton, NJ: Princeton University Press.

沃利斯，1998，【無窮算術】(摘要)(由孔國平中譯)，收入李文林主編【數學珍寶】(北京：科學出版社)，頁 267-275。

方程式只能有個一根！？

台師大數學研究所碩士班研究生 林倉億

「方程式只能有一個根！」現在看來當然會覺得不可思議，信手捻來一個方程式都可以輕易地否定這句話，這是因為我們把方程式看成一個獨立的主體，在解 X 的過程，只考慮符不符合數學原理，並不管 X 在題目中或現實中的意義為何，更精確地說，X 就是一個抽象的數。能夠抽象地、單獨地看待方程式，是數學的一大進步，但這直到十九世紀下半葉才被普遍接受，今天看來十分顯然的概念，卻是經歷了數千年的孕育；康托(George Cantor)曾說：「數學的本質在於它的自由。」(註一)，這是人類高度智慧的結晶，豈能奢求學生在短短十數年的生活

經驗上，自然地接受它所帶來的成果呢？

以下這篇對話錄，改寫自 Gavin Hitchcock 的 ”Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts：Two Dialogues” (註二)中的第二個對話。作者透過十九世紀英國數學家 Frend (以下以 F 代表)、Peacock (以下以 P 代表)及 De Morgen (以下以 D 代表)的爭辯，反應了當時數學家在方程式根的認知衝突。他尤其企圖傳達：人類對於代數的認識與符號的操作，是經過一段慘澹經營的過程。數學家對負數的態度，當然也是關鍵之處，關於當時負數的發展，在唐書志老師的【負數迷思】(註三)一文中已有介紹，請讀者參閱，在此不再多加介紹。在進入時空隧道之前，必須聲明一點，最後一段並非作者的原意，而是筆者的「篡改」，若有突兀之感，自是筆者功力太淺，切勿怪罪原作。

~~~~~~

F：每一個被正確地呈現的問題，它的方程式總是只有一個真的根(註四)。我舉個例子來說明該如何解一個含有根號的方程式：

$$X+\sqrt{5x+10}=8$$

$$\Rightarrow \sqrt{5x+10}=8-X \qquad \text{(由此明白地看出 X 要比 8 小)}$$

$$5X+10=64-16X+X^2$$

$$5X+16X-X^2=64-10$$

$$1X-X^2=54 \qquad \text{(有人愚蠢地宣稱這是符合題目的方程式，在題目中 X 要小於 8 才行)}$$

$$\frac{441}{4}-21X+X^2=\frac{441}{4}-54=\frac{225}{4}$$

$$\sqrt{\frac{441}{4}-21X+X^2}=\sqrt{\frac{225}{4}}$$

$$\frac{21}{2}-X=\frac{15}{2} \qquad \text{（}X-\frac{21}{2}\text{是不被允許的，因為我們已經知道 X 比 8 還要小）}$$

$$X=\frac{21}{2}-\frac{15}{2}=3$$

D：如果你寫成 $X-\frac{21}{2}=\frac{15}{2}$ 的話，你會得到一個完全可以被接受的正數，X＝18，為什麼它不是方程式的另一個根呢？

F：因為它僅是滿足了 $21X-X^2=54$ 這個方程式，並非滿足原來的方程式！大自然她總是清楚、明確的，而非模稜兩可的，只要**正確地呈現問題**，沒有一個實際的或商業的問題會產生兩個以上的解！

P：我並不認為你是對的。看看這個問題：「我以 24 磅的價錢賣出一匹馬後，我發現所損失的錢，恰好是馬的進價的百分之一乘以馬的進價，請問我當初花
~~~~~~

多少錢買這匹馬？」你認為這是不是一個被正確呈現的實際問題呢？

F：看起來的確是。

P：那讓我們來求出馬的進價 X 吧！

$$X-24=\frac{X}{100}\times X$$

$$\Rightarrow\ 100X-X^2=2400$$

$$\Rightarrow\ 2500-100X+X^2=100$$

$$X^2-100X+2500=100$$

$$\Rightarrow\ 50-X=10,\quad X=40$$

$$X-50=10,\quad X=60$$

40 與 60 都符合原來的題目啊！

F：(停頓了許多) 這只是告訴我們這個題目是不明確的！任何被正確地呈現且明確的題目是不會有兩個以上的解的！

P：(哈哈大笑) 我說 Frend 先生啊，你很清楚這個例子符合你當初所要求的：正確地呈現問題，你現在只是在強詞奪理罷了！承認錯誤吧！

F：我承認有可能會出現兩個都符合題意的解，而這是告訴我們原來的題目是不明確的。我主張題目的解只能透過代數(arithmetical Algebra)方法獲得，沒有玩弄一些無用的虛設，否則將無法獲得實際的解；那些虛設唯一的用處，就是證明題目是不可能的！

P：那一個根符合題目的條件是什麼？不是只要滿足你一開始說的條件就好了嗎？

F：最重要的，**一定要是真的根，也就是正的根**！正根才會是實際的解，其他的都不會是！

P：可是很容易就可以找到一個問題，列出的方程式有一個正根，但這個正根卻不符合題目！

F：讓我看看。

P：「某數的平方的兩倍，比某數的三倍多 5，請問某數為多少？」

$$2X^2-3X=5\ \Rightarrow\ X^2-\frac{3}{2}X=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ (X-\frac{3}{4})^2=\frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow\ X-\frac{3}{4}=\frac{7}{4},\quad X=\frac{5}{2}$$

或 $\frac{3}{4}-X=\frac{7}{4}$，$X=-1$

你當然會說 $\frac{5}{2}$ 才是解，但如果我們要的是正整數的話，那麼 $\frac{5}{2}$ 就不是解了。

無論是正根 $\frac{5}{2}$ 或是負根 -1 都不是題目的解，也就是說這個題目是不可能的！

F：利用代數方式解出來的這個正根，顯示你強加了一個人為的限制—正整數，你應該要承認 $\frac{5}{2}$ 是這個題目的解。

P：哈！你中計了！因為代數方式解出了一個確定的根，所以你就要我移除正整數這個人為限制，那你何不也去除你的人為限制，而承認方程式可以有其他的根，無論是負的，或是與題意不合的。在你之前的許多人甚至認為非正整數的根是不恰當的，你只是在不同的地方做這種不容忍的限制罷了，這種限制並不是真的符合實際的問題或是實際的解，而只是符合你心中的偏見！

D：我似乎越來越清楚了，拒絕負根這種普遍的想法，原來只是歷史的影響，因為長久以來，我們只接受或表示成 Frend 先生所提那樣形式的題目，或許將來在許多新型態的題目影響之下，負根將被允許有更直接的解釋，並且獲得更明確的意義。雖然負數在幾何學與力學中似乎能扮演適合的角色，但我必須承認對於負數，我仍存著不安的感覺，但這與 Frend 先生是不一樣的。對我而言，虛數或是負數都代表一個訊息，就是當它們成為問題的解時，我該立刻去尋找矛盾或是不合理的地方。憑良心說，我必須承認虛數與負數都是虛幻不實的，因為就實際來說，它們都是無法想像的。

F：哈哈！終究是良心告訴你什麼是對的！

D：但是，如果我鼓起勇氣用適當的方式解釋它們時，往往會出現令人驚訝的合理性。

P：一位謹慎數學家的告白！你能給個例子說明嗎？

D：我喜歡告訴人們：「過幾年，當我 X 歲時，那年剛好是西元 X2 年，那你知道我出生於哪一年嗎？」因為現在是十九世紀，所以很容易知道我 43 歲時是 1849(＝432)年，那我的出生年就是 1806 年。不過有個人將這個問題當做純代數來處理，他告訴我在 1764(＝(－42)2)年時，我的年齡是負 42 歲，我怒斥他不要幹這種愚蠢事，並限制他只能考慮真實的數字。然而，這個數字依然可以得到我的出生年：1764－(－42)＝1806，真是太神奇了！

P：這證明了負根(註五)的合法性與力量！

F：(冷冷地笑著…) 那可以說在 1849 年時你是負 43 歲囉！也就是說你已經預測到你的出生年將會是 1892 這吉利的一年囉！哈哈！還是我應該說你將投胎轉世到 1892 年呀！哈哈哈！

D：喔！那我承認這個題目有問題，我以後會註明我不是鬼也不是印度人(註六)！

P：也不是畢達哥拉斯主義者。(註七)

D：那看看這個更合適的問題：「有位 56 歲的父親，他的兒子 29 歲，請問在幾年後父親的年齡將會是兒子的兩倍？」自然的解法如下：

$$56+X=2(29+X) \quad \Rightarrow \quad X=-2$$

我的直覺反應是：「這太荒唐了！一定是哪個地方有問題！」所以我用－X 取代式子中的＋X，

$$56-X=2(29-X) \quad \Rightarrow \quad X=2$$

因此，我知道這個題目加了太多的限制，應該改成：幾年前或幾年後父親的年齡將會是兒子的兩倍？

P：原來的敘述的確是不恰當的，不過就算題目敘述改成後來的這樣，在列方程式之前，我們仍舊不知道該選擇＋X 或是－X。

D：沒錯！不過，如果我們選錯了，解出來帶有負號的根自然會告訴你！

F：等等，那是你一廂情願的想法，你給了負根不應有的推崇。

P：等一下，De Morgen 你的論點似乎和 Frend 先生相反，我認為由於我們數學家正站在新、舊觀念的轉折上，所以花了許多時間在適應與爭辯，我相信你找到了正確的方向！代數她是慷慨的，總是給的比你要的還多！(註八)

最後還有一段 Peacock 的論述，不過筆者認為與主題不是那麼相符，所以未翻譯出來。洪萬生教授在【數學史與數學的教與學】(註一)一文中，提出了 13 種將數學史融入數學教室的方法，其中的第六項：「恰當地使用歷史上出現的謬誤、另類概念、觀點的改變、隱含假設的修訂以及直觀論證等等」和第十項：「編劇本」，對話錄恰好提供了一種結合這兩項的表現方式，倘若能真實演出的話，不但能增進數學課的樂趣，更提供了一個機會，讓學生能夠以更寬闊的眼光來看待數學與數學的學習。

註一：原文是：The essence of mathematics lies in its freedom.
註二：收入 Ronald Calinger, ed. 1996. Vita Mathematica. Washington D.C.: MAA.
註三：刊載於本通訊的第一卷第二期。
註四：在此對話中，「根」是對方程式而言，「解」是對題目而言。
註五：原文中用的是「代數(algebra)」一詞而非「負根」。
註六：De Morgen 是出生於印度的英國人。
註七：指的是對數字所持的神秘思想。
註八：這句是引用 D'Alembert 的話：”Algebra is generous, she often gives more than is asked of her.”
註九：刊載於本通訊的第二卷第四期。

虛數 $\sqrt{-1}$ 的誕生

台師大數學系碩士班研究生 陳鳳珠

一般人都知道虛數 $\sqrt{-1}$ 是方程式 $x^2+1=0$ 的根，在合理的推論之下，虛數 $\sqrt{-1}$ 應該是誕生在二次方程中。如果你也這樣以為，那麼數學史家的觀點，絕對出乎你的意料之外。在數學史的發展過程中，早期的數學家面對方程式 $x^2+1=0$ 時，

和我們現在的國中數學課本處理方式一樣，他們認為這樣的方程式是無解，當然也就沒有發明一個數來表示方程式 $x^2+1=0$ 的根。因此，當我們回顧虛數 $\sqrt{-1}$ 誕生的故事時，便會認同數學史家的觀點，虛數 $\sqrt{-1}$ 並非誕生在二次方程式中，而是在三次方程。

關於虛數 $\sqrt{-1}$ 誕生的故事，可以從西元 1545 年義大利的學者卡當諾（G. Cardano，1501-1576）談起。卡當諾是數學史上有名的怪人，不但博學多才，通曉醫學、數學與天文學，且喜好賭博與占星術。他對當時的一切知識相當投入，著述豐富且涉及許多方面。在 1545 年時，卡當諾發表了他的傑作《大術》（Ars Magna，原意為「偉大的技藝」），其中介紹一般三、四次方程的求根公式最為著名。書中首先以具體方程為例，說明了（不完全）三次方程 $x^3+mx=n$ （m、n 為正整數）的解法：「**將 x 項係數的三分之一自乘三次，再加上方程式常數項係數 n 一半的平方，將兩者之和開平方。將此過程重複一次，其中一根加上常數項係數 n 的一半，另一根則減去常數項係數 n 的一半……然後前者的立方根減去後者的立方根，剩下的即為 x 的值。**」換言之，所謂卡當諾公式解即是

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}\text{ 。}$$

例如卡當諾求解三次方程 $x^3+6x=20$ 時，根據他的公式可得到

$$x=\sqrt[3]{\frac{20}{2}+\sqrt{\frac{20^2}{4}+\frac{6^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{20}{2}+\sqrt{\frac{20^2}{4}+\frac{6^3}{27}}}=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}\text{ 。}$$

卡當諾的論證純粹為幾何性質，涉及單純的立方體與其體積。用現代的代數方法說明，亦即設 $t-u=x$，則原方程式 $x^3+mx=n$ 變成 $(t-u)^3+m(t-u)=n$，利用立方和公式展開 $t^3-u^3-3tu(t-u)+m(t-u)=n$，化簡後得 $t^3-u^3+(t-u)[m-3tu]=n$。觀察後，令 $3tu=m$ 與 $t^3-u^3=n$，從前式可得 $u=m/3t$，然後帶入後式得到 $t^3-\frac{m^3}{27t^3}=n$，兩邊再乘以 t^3，且重新整理可得方程式 $t^6-nt^3-\frac{m^3}{27}=0$。若將此方程式視為 t^3 的二次方程式：$(t^3)^2-n(t^3)-\frac{m^3}{27}=0$，利用早已為當時數學家所熟知的二次方程式公式解得出：

$$t^3=\frac{n\pm\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}=\frac{n}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}\text{ ，}$$

接著將 t 開立方可得 $t=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$ 。我們從 $u^3=t^3-n$，便知

$$u^3=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}-n \text{ 或 } u=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}} \text{ 。}$$

最後，我們得出三次方程式 $x^3+mx=n$ 的卡當諾公式解

$$x=t-u=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}} \text{ 。}$$

要特別注意的是，十六世紀時的數學家要求方程式中的係數必須為正數，因此，卡當諾在書中分別針對 $x^3=mx+n$、$x^3+n=mx$ 等等（不完全）三次方程，提出了以現代眼光來看似乎是多此一舉的公式解。《大術》的最後，卡當諾做出了結論，他認為三次方程已獲得解答。事實果真是如此嗎？答案顯然是否定的，因為他所處理的是不完全的三次方程，並非針對一般的三次方程式。儘管如此，對於三次方程的解決，卡當諾公式仍令人感到相當振奮。不過，卻也因為卡當諾公式的出現，引出了一個數學史上的重要難題。

接著出現的難題，卻成為虛數 $\sqrt{-1}$ 誕生的契機。當我們考慮到三次方程 $x^3=15x+4$ 時，卻出現了令當時數學家難以解釋的結果，因為根據卡當諾的公式解可得 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 。就當時數學家的觀點，出現負數的平方根絕對是不合理的，所以很容易忽略它，而認為這個三次方程是不可解。然而，我們卻可以輕易的檢驗出 $x=4$ 是此三次方程的一個解，但是為何在利用卡當諾公式所求得的結果中，卻沒有看到 $x=4$ 出現？究竟所得到的解 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 和 4 有沒有關係呢？

事實上，卡當諾早已遇到虛數根的問題。他在《大術》第三十七章中，提出並解決這樣的問題：「把 10 分為兩部分，其中一部份乘以另一部份結果為 40…因此，將分成的兩部分應是 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 。」並且分析：「讓我們解除思想的束縛，用 $5+\sqrt{-15}$ 乘 $5-\sqrt{-15}$，我們便得到 $25-(-15)$，也就是 $25+15$。因此乘積為 40。」然後，他寫道：「算術就是這樣的精巧奇妙，它最根本的特點，正如我所說過的，是既精妙又無用。」雖然卡當諾已經遇到虛數根，但卻未能解決三次方程所謂"不可約"（即判別式為負）的情形。關於卡當諾所面對虛數根的困惑，數十年後另一個義大利數學家邦貝力（R. Bombelli，1526-1573）提出了他的深刻想法。

邦貝力認真看待虛數，用它解出不可約三次方程，並建立了虛數的運算法則，這是人們對數認識的一大進步，儘管他仍認為虛數是人為而非真實的數。針對三次方程 $x^3=15x+4$ 的兩個解 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 和 4 的關係，他暫時拋開當時數學家對虛數 $\sqrt{-1}$ 潛在的成見，提出了不受侷限的奇妙想法。因為 $2+\sqrt{-121}$ 和 $2-\sqrt{-121}$ 只是運算符號上的差異，所以他大膽地令 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$ 和 $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}$，將 $a+\sqrt{-b}$ 開立方的結果和 $2+\sqrt{-121}$ 作對照可得 a= 2，b= 1，然後檢驗出 x= $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=$（$2+\sqrt{-1}$）+（$2-\sqrt{-1}$）= 4。如此，邦貝力不但賦予了虛數 $\sqrt{-1}$ 的意義，並且也發展出虛數 $\sqrt{-1}$ 的運算法則，奠定了虛數理論的基石。用現在的符號 $i=\sqrt{-1}$（尤拉在 1748 年提出）表示，除了乘法運算法則：$(\pm 1)i=\pm i$，$(\pm i)(+i)=\mp 1$，$(\pm 1)(-i)=\mp i$， $(\pm i)(-i)=\pm 1$，也包含虛數的加法與乘法運算，例如：$8i+(-5i)=+3i$ 和 $\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{2}i}\right)\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}i}\right)=\sqrt[3]{8+11\sqrt{2}i}$。邦貝力深刻洞悉了虛數 $\sqrt{-1}$ 在代數中所扮演的角色，不愧為十六世紀義大利的偉大數學家之一。

在虛數尚未在數學王國之中取得正統地位之前，許多數學家和卡當諾一樣，認為虛數是不存在的。在 1629 年，荷蘭數學家吉拉德（A. Girard，1595-1632）曾臆測每個次數大於 0 的虛數係數方程式至少有一個虛數根，他為了找到方程式根與係數的關係，表示應該接受虛數，至少把它看成是方程式「形式」上的解，如此才能保證 n 次方程式必有 n 個根。此外，笛卡爾（G. Descartes，1596-1650）把負根稱為“假根”（false root），而將前述這種形式的根稱為“虛根”（imaginary root），這就是虛數（imaginary number）這個名詞的來源。後來，高斯認為必須將虛數 $b\sqrt{-1}$ 和 $a+b\sqrt{-1}$ 區別，才引進複數（complex number）。笛卡兒曾說道：「方程式的根不一定是實數，有時他們可以是虛數。」他辯稱負根可由方程式的變換轉為實根，但虛數根則無法辦到，因此它是虛根而不是實根，它們並不是數目。由此可見，笛卡兒仍是無法接受虛數。甚至牛頓（I. Newton，1643-1727）也不覺得虛數有什麼特別意義，可能是因為當時無法發現虛數的物理意義之緣故。

虛數$\sqrt{-1}$的地位，一直要到兩世紀後經過尤拉（L. Euler，1707-1783）、高斯（F. Gauss，1777-1855）和柯西（A. Cauchy，1789-1857）的努力，才算在數學王國之中取得正統。 十六、七世紀的數學家，大都把虛數看成是不可能或是不存在的，約翰・白努利（Johann Bernoulli，1667-1748）在 1702 年的發現引起了相當的震撼。他把虛數引進分析學中，例如：

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{1}{(x+ai)(x-ai)}dx=-\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)dx=-\frac{1}{2ai}\left[\log(x+ai)-\log(x-ai)\right]$$

。然而，自從納皮爾（J. Napier，1550-1617）發明對數以來，一直都只容許正數才有對數，約翰・白努利在上列的式子裡，卻出現了虛數的對數，因而引發了長達三十多年的爭議，亦即負數和虛數是否有對數？

關於負數是否有對數的爭論，首先由萊布尼茲（G. W. Leibniz，1646-1716）和約翰・白努利開始，從 1712 年到 1713 年之間共長達十六個月。萊布尼茲的看法是負數沒有對數，或者更正確地說，負數沒有實數值的對數。可是，約翰・白努利積極想證明負數有實數值的對數，雙方各持己見沒有定論。後來，這個爭論也發生在約翰・白努利和他的學生尤拉（L. Euler，1707-1783）之間，約翰・白努利仍堅持十多年前的想法，尤拉卻不同意約翰・白努利所提出的等式：$\log_e(-x)=\log_e x$，但尤拉自己也沒有明確的想法。尤拉在 1740 年在寫給約翰・白努利的信中提及指數、三角函數和虛數的一個關係式，他認為 y=2cosx 與 $y=e^{ix}+e^{-ix}$ 是同一個微分方程式的解，因此，兩個函數應該相等。這個結果在 1747 年發表，亦即複變分析學中最根本的公式：$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$，$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，$e^{ix}=\cos x+\sin x$。

直到 1747 年，尤拉才提出多值函數的概念來定義非零負數的對數。除了定義虛數的對數外，尤拉在 1749 年又利用虛數的對數，來定義虛數的虛數乘冪。後來，高斯在 1799 年的博士論文中，證明了代數基本定理：「每個次數大於 0 的虛數係數方程式至少有一個虛數根。」他在論文中說道：「只要分數、負數與實數都已完全瞭解，那麼虛數是可以容忍的。」換言之，只要實數系有嚴密的邏輯基礎，那麼虛數的邏輯基礎就沒有問題了。

高斯對虛數邏輯基礎所做的註解，引起了柯西和漢彌頓（W. Hamilton，1805-1865）的回應。柯西採用純代數的方法來定義虛數，他仿照同餘的概念，根據對模實數係數多項式 x^2+1 做同餘類，給出了嚴密且抽象的複數定義。柯西給的複數定義是相當抽象的，另一個較具直觀性的定義，是由漢彌頓在 1837 年的

論文中所提出來，他把複數 $a+bi$ 定義成有序實數對 (a,b)。根據這樣的定義，只要實數系有了嚴密的邏輯基礎，複數系也就會有邏輯基礎了。

數學家之所以願意如此為虛數「扶正」身分，全都是因為它十分「有用」。 虛數 $\sqrt{-1}$ 發展至今，在處理代數、分析、幾何與數論的問題上，皆可看到複數的蹤跡。讓我們觀察恆等式：$(2^2+3^2)(4^2+5^2)=533=7^2+22^2=23^2+2^2$ 和 $(17^2+19^2)(13^2+15^2)=256100=64^2+502^2=8^2+506^2$。它們會是一種巧合嗎？事實上，它們僅是數論中定理的例子，亦即：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=A^2+B^2=C^2+D^2$。我們利用虛數 $\sqrt{-1}$ 便可清楚得到印證：

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)]\\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i]\\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2\end{aligned}$$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=[(a+bi)(c-di)][(a-bi)(c+di)]=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。或者讀者願意試試 $(89^2+101^2)(111^2+133^2)=A^2+B^2=C^2+D^2$，找出其中 A、B、 C 和 D 分別是多少？

任何數學知識的發展，都是由解決問題開始，虛數的誕生當然也不例外。希臘數學家丟番圖（Diophantus，250-275）的《算術》（*Arithmetica*）書中，就已出現負數根的問題：「一直角三角形周長為 12 面積為 7 試求其邊長」，但是丟番圖並不考慮虛根的問題，一直到卡當諾才去面對方程式中的虛數根，雖然他認為虛數是精妙卻無用，卻引起邦貝利對虛數的興趣，進一步研究虛數的運算法則。因為方程式的虛數根是不可避免的，虛數不應輕易再被忽視，數學家也因此被強迫去面對虛數。

當然，要讓數學家就此接受虛數是不容易的。正如吉拉德雖然認為要接受虛數，但卻將它視為「形式」上的根；笛卡兒一樣也難以接受虛數，認為是它並不是數。那麼是何種理由，奠定了虛數在數學王國裡的地位呢？在經過尤拉、高斯和柯西等人的努力，除了虛數可以滿足數學家天生對完美的渴望外（例如：滿足算術基本定理），更重要的是它相當「有用」。正如吉拉德所說：「有人可以說這些不可能的解有什麼用？我回答：它有三方面的用處－一是因為它能肯定一般法則；二是它們有用；再有，還因為除此之外再沒有別的解。」總之，它的誕生與發展，倒真地呼應了克萊恩（M. Kline）所言：「虛數……其強自佔入算術計算也，不特未嘗獲得世人之承諾，抑且與算學家之始願相違，但終以日積月累之功，在其表現效能範圍之內，流行日廣。」

回顧了虛數 $\sqrt{-1}$ 誕生的過程，值得一提的是虛數 $\sqrt{-1}$ 的出現，與一般人所認知的並不相符。它之所以出現在數學的領域，並不是用來作為解二次方程式的工具，而是誕生在三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 解法的懷抱中。這不是很出乎我們的意料之外嗎？

參考資料：

李文林主編，1998，【數學珍寶】，北京：科學出版社。

洪萬生，1991，【孔子與數學】，台北：明文出版社。

Dunham, W.，1998，【天才之旅】，台北：牛頓出版社。

Kline, M.，1983，【數學史】，台北：九章出版社。

Glas, E., 1988, ‘Fallibilism and the Use of History in Mathematics Education’. *Science & Education* 7：361-379.

Kleniner, I., 1988, ‘Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers(with a Moral）’. *Mathematics Teacher*. October. 583-592.

Nahin. P. J., 1998, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton University Press.

NCTM, 1989, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Washington, D. C.: NCTM.

[illegible]

74 [illegible]
[illegible] 明 k3s gor [illegible] suhy@hp715.math.ntnu.edu.tw
84 [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
94 [illegible]
[illegible] 8666
[illegible]
[illegible] 明 k3s gor [illegible]
suhy@hp715.math.ntnu.edu.tw
:4 [illegible] 86 [illegible]
;4 [illegible]
6. [illegible] 明
[illegible]