

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）

主編：蘇惠玉（西松高中）

編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）

邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學） 蘇俊鴻（新店高中）

洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新北高中） 謝佳叡（台灣師大

數學系） 林倉億（台師大數學系研究生） 陳鳳珠（台師大數

學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）

葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究

- 郭書春來訪
- 「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告—單元：機率
- 「從對數學式子的評價探數學教師的數學觀」—數學史知識需求面相的另一種思考
- 回應
- 新書櫥窗：《微積分之旅》
- 網站大公開

## 郭書春來訪

台師大數學系 洪萬生教授

中國數學史家郭書春接受本系邀請，於2000年九月十一日到九月二十四日之間來訪，總共在本系演講、座談（各一場次），清華大學歷史研究所科技史組以及台灣綜合研究院各演講一場。同時，他也到傅斯年圖書館（中研院史語所）、故宮博物院及其圖書館、以及國家圖書館拜會參觀。綜觀此次郭書春來訪，行程儘管單純，然而內容卻頗為可觀，賓主盡歡當然不在話下。

郭書春任職於中國科學院自然科學史研究所，在【九章算術】及其劉徽注方面的研究，一向為國際中國數學史學界所推重，此次來台訪問，對於海峽兩岸中算史研究的交流，大有裨益。本系研究生有幸參與演講與座談，並得以從容地向他請益，學習一代中算史家的風範，更是難得的機緣。郭書春在本系的學術活動如下：（一）九月十九日應邀到筆者的『古代數學典籍導讀』課堂上，以『關於【算經十書】的校勘』為題，分享他的典籍研讀經驗，對於【九章算術】的考證與校注，他更是現身說法，將史家的傳統身段發揮得淋漓盡致；（二）九月二十日下午，他則以『中國傳統數學著作的體例與分野』為題，發表一個小時的公開演講，呼應了筆者1995年6月下旬訪問中國科學院自然科學史研究所時所給出一個演講——“On the Format of the *Jiu Zhang Suan Shu* and Other Mathematical Classics”，投桃報李，或可自詡為學術交流之一段佳話也。

在九月十四日，郭書春應邀到清華大學歷史研究所科

這一期的通訊，可以說是一個新的開始，我們換了新的流通方式，在沒有經費的情況下，希望繼續發揮我們的影響力，希望能持續個幾年！這一期中，仍延續上一期，以8月的研討會相關論文為主。同時，從這一期開始，「網路大公開」這個專欄重新開張，將帶領讀者逛進許多讓人嘆為觀止的網站！

技史組訪問，並以『重新品評秦九韶』為題，發表九十分鐘的演講，對於涉及史料解讀的政治與社會文化因素之複雜，

提供了相當細緻的分析。演講後，他與陳良佐教授延續前晚電話中未竟的【九章算術】及其劉徽注之話題。晚餐由清大歷史所做東，品嚐風味絕佳的客家小炒，同席者有傅大為、黃一農、徐光台、雷祥麟、郭書春與筆者。

此外，郭書春也在九月二十日上午應龍村倪之邀，到台灣綜合研究院訪問，並以『中國數學史研究現況』為題，發表演講。龍村倪現職該院高級研究員兼二所所長，業餘兼治中國科學史，總有獨到見解。他愛書成癡，儘管中算史不是他所專擅，但是，對於郭書春的【古代世界數學泰斗－劉徽】（台北明文書局出版），仍然捧讀再三，精神可佩。郭書春抵達台北之後，就一直希望與他會面，可見他在促進兩岸學術交流方面，頗有心得。

郭書春初抵台北時，為了接待方便，特別情商李國偉安排住宿中研院學術活動中心。居停期間，李國偉（中研院數學所）、王道還（中研院史語所）與楊翠華（中研院近史所）等幾位科學史界的朋友，給予熱情接待，善盡地主之誼，令筆者十分感激。此外，九章出版社孫文先也協助接待，他不僅贊助郭書春來訪機票費用，而且在郭書春離台前，親自招待他到天祥太魯閣旅遊，筆者必須在此申謝他的大力支持。

郭書春原報名參加 HPM 2000 Taipei (8/9 - 8/14) 國際研討會，但因故未克及時前來，經筆者懇切邀約之後，他選在九月中下旬來訪。儘管國際 HPM 同行錯過了與他交流的機會，但是，本系的研究生，由於有了從容接觸的機會，卻獲益良多。對於台灣的中算史學而言，他的來訪，帶給我們極正面的東西，值得我們珍惜！

# 「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告 - 單元：機率

成功高中 蘇意雯老師

『如果我們想要預見數學的將來，適當的途徑是研究這門科學的歷史和現狀』

Poincaré(1854~1912)

## 一、前言

在數學課堂上，運用數學史教學可幫助教師充實教學內涵。因此在教學過程中，筆者總是想把數學史融入各個單元中以開拓學生的視野。在高中數學科教材中，基礎數學第四冊的內容可說與前三冊有很大的不同，例如，前面幾冊的內容為數，數列與級數，多項式，三角函數，向量，圓錐曲線等等。但是第四冊討論了機率與統計。筆者於任教的過程中也發現學生之成績常與前三冊相異。有些前面學習成果不理想的學生在本冊中卻可得到很大的躍進。根據個人之觀察，此種現象應是第四冊所需之先備知識較前幾冊來的少，另外，其探討之問題也與日常生活相關，較能吸引學生之興趣。

第四冊的內容共分為三章：依序為排列組合、機率及敘述統計。其中第二章的機率可說是承先啟後的一章，其所佔的地位相當重要。教材編輯小組希望能透過本章之學習，讓同學熟稔拉普拉斯的古典機率。雖然編者在本章起始介紹了費馬和巴斯卡對機率論的貢獻，但這是不夠的。既然基礎數學第四冊對原本數學低成就之學生可造成成績明顯之轉變，因此使得筆者想在這一章裡對機率論的歷史多所著墨，希望藉此能引發更多學生學習的興趣。

## 二、文本

1.賈憲楊輝三角形：說明其出處及其應用。

2.巴斯卡三角形：說明其出處及其應用。

3.巴斯卡肖像：簡介巴斯卡生平。

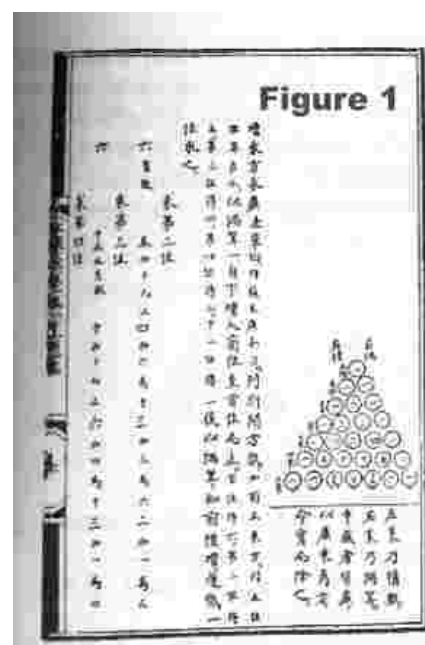
4.機率論之歷史介紹。

5.卡丹諾介紹：卡丹諾給機率下了一個”可能事件的比值”這樣粗略的概念。在他一個標題為”在一顆骰子的投擲上”的這一章中，卡丹諾寫下了相當重要的一段話。他說：當投擲一顆公正骰子時，我能夠打賭出現 1, 3, 5 的次數會和出現 2, 4, 6 時一樣多。這是第一次，我們發現，對於一顆公正骰子，我們從經驗主義轉化成理論的概念。如果就這一觀點看，或許我們可以稱卡丹諾為現代機率論之父。

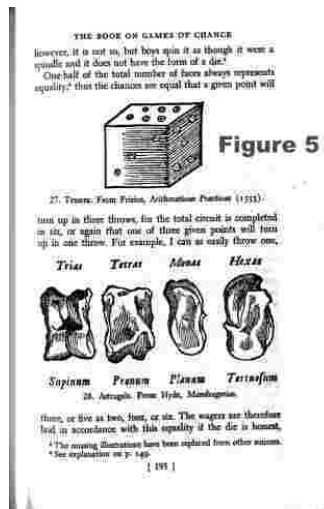
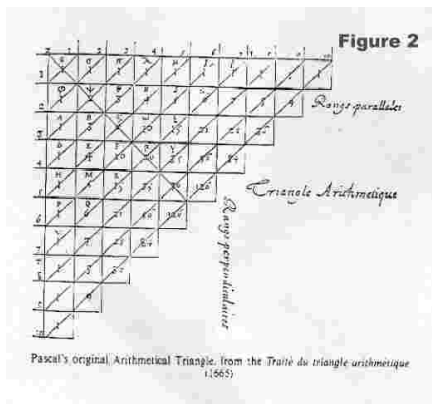
6.塔達利亞介紹：塔達利亞起初也對彩金分配問題給了一個答案，可是最後他下了一個結論：與其說這是個數學問題，毋寧稱它為司法問題；所以無論如何分配最後終不免起訴一途。”由以上這段話，我們不難想見塔達利亞的沮喪。

7.彩金問題：與同學共同研究。

8.巴斯卡賭注之說明：巴斯卡所處的時代是新科學強烈的向舊信仰挑戰的歷史轉捩點上，所以他也如當時一些知識份子般被迫參與這場衝突戰並且尋求解決之道。本性熱心宗



教又是著名的科學與數學貢獻者，巴斯卡的感受無疑的比一般人更為強烈。因為他洞悉科學與宗教，以致於他的內心變成了戰場。有一段話訴說了他的為難，是這樣寫的：『我看到困擾我的事。我到處觀察，除了晦暗不明外，我發現四下虛無。大自然中的萬物無不令人起疑和不安；如果找不到上帝的蹤跡，我將否定祂的存在。如果看到四處是造物者的跡象，我將安於我的信仰。但是觀看太多以致不能否定，而且確信太少以致不能肯定，這使我處境可憐。我上百次的渴望，若有上帝主宰大自然，大自然應毫不含糊的顯現出來，或者上帝有謬誤時，大自然應該把上帝的跡象完全除去；大自然應說出整個真象或什麼都不說，好讓我知道應該站在那一邊。』



但是上帝拒絕現身。因而巴斯卡想起他早期的機率作品和他解決過的賭博問題。也許機率論對宗教信仰的問題會有所啟示吧？他所得到的答案就是今日著名的巴斯卡賭注：一張彩票的價值是中獎機率與獎金的乘積。即使機率或許很小，如果獎金非常之大，彩票還是很有價值的。因此，巴斯卡推算，上帝存在和基督信仰為真的機率雖然很小，而相信祂的報酬卻是永恆的幸福。這張上天堂的彩票，其價值確實很大。反之，如果基督教的教條是假的，連帶損失的價值頂多是短暫生命的享受而已。因此就賭上帝存在吧！或許，從這段敘述，我們不難發現數學期望值的影子。

### Pascal's wager

- This is what I see that troubles me. I look on all sides and I find everywhere nothing but obscurity. Nature offers nothing which is not a subject of doubt and disquietude; if I saw nowhere any sign of a Deity I should decide in the negative; if I saw everywhere the signs of a Creator, I should rest in peace in my faith; but, seeing too much to deny and too little confidently to affirm, I am in a pitiable state, and I have longed a hundred times that, if a God sustained nature, nature should show it without ambiguity, or that, if the signs of a God are fallacious, nature should suppress them altogether: Let her say the whole truth or nothing, so that I may see what side I ought to take.
- The value of a ticket in a lottery is the product of the probability of winning and the prize at stake. Even though the probability may be small, if the prize is very great, the value of the ticket is great. So, reasoned Pascal, though the probability that God exists and that the Christian faith be true is indeed small, the reward for belief is an eternity of bliss. The value of this ticket to heaven is, then, indeed great. On the other hand, if the Christian doctrine is false, the value lost by adherence is at most the enjoyment of a brief life. Let us then wager on the existence of God.

[Cited from Kline(1954),pp.374-375]

### 三、實地教學

在上第二章時，筆者是於起始就先簡介機率論其來由，分成賭博問題的解決及有關保險費和死亡率資料的統計過程。然後介紹對機率論的發展位居要津的巴斯卡其人其事。在介紹巴斯卡時，筆者也回頭對 1-3 的二項式定理的巴斯卡三角形再做一番解釋，並與賈憲楊輝三角形做比較。最後在講述數學期望值時，筆者並補充著名的「巴斯卡賭注」。所有課程結束後，筆者花費一節課的時間，再一次加深學生的印象。

### 四、評量

#### 「數學課堂上使用數學史教學」問卷

在上第二章時，我們一開始就為同學簡介機率論的來由，分成賭博問題的解決及有關保險費和死亡率資料的統計過程。然後介紹對機率論的發展位居要津的巴斯卡其人其事。接著，我們回頭對巴斯卡三角形再做進一步的認識，並與賈憲楊輝三角形做比較，相信此時同學們已有更深一層的認識。講述數學期望值時，我們也補充了著名的「巴斯卡賭注」，並從中發現了數學期望值的影子。學完第二章後，相信同學們也都能應用機率的觀念解決彩金分配的問題。

請您就這樣的上課方式，回答下列的問題：

1.在上這節課之前，您對「數學」的感覺是：

\_\_\_\_\_

2.在上這節課之前，您對「機率」的想法是：

\_\_\_\_\_

3.這樣的數學課上課方式，您覺得：

\_\_\_\_\_

4.在上課的內容中，讓您印象最深刻的是：

\_\_\_\_\_

5.您覺得有關「機率」相關背景的介紹，對您的學習有幫助嗎？\_\_\_\_\_

為什麼？\_\_\_\_\_

6.經過這樣的學習，您對「數學」的想法有無改變？\_\_\_\_\_

為什麼？\_\_\_\_\_

7.您覺得這樣的上課方式，對您的數學學習有無幫助？\_\_\_\_\_

為什麼？\_\_\_\_\_

8.您覺得這樣的上課方式，對您的人格發展有無幫助？\_\_\_\_\_

為什麼？\_\_\_\_\_



## 結果分析：

筆者整理 47 位受訪學生的問卷，所得之答案陳列如下：

對於第一題只有 6 位學生持正面態度，他們的回答是：

\*數學是有趣的

\*數學是訓練邏輯思考的工具

\*數學很容易

\*喜歡的是自己解出題目的成就感

大部份的學生皆認為：

\*數學是無聊的

\*數學很困難

\*數學與日常生活無關

\*不喜歡數學

\*數學全是無窮無盡的計算

\*數學只是考試的工具

這個結果與我們的預測類似，大部分的學生都懼怕或不喜歡數學，或許這是因為數學抽象而不易理解，與其他的自然學科不同。

對於第二題有 29 位學生認為：

\*機率是有趣的

\*學習機率很容易

\*機率較為有用

只有 12 位的學生認為

\*機率是無聊的

\*機率與日常生活無關

\*機率很困難

\*不喜歡數學

\*機率只是用來考試罷了

沒有意見的有 6 位同學

這個結果也與我們的觀察符合，機率與日常生活有較強的關聯也較能吸引學生，所以學生在此單元有較好的表現。

對於第三題有 37 位學生認為：

\*對學習數學有所幫助

\*如此較為有趣

而有 7 位學生認為無所幫助，沒意見的有 3 位同學。

這樣的結果對筆者是一個很大的鼓舞，它顯示了大部分的學生都喜歡這種學習方式，也印證了數學史對於數學教學是有幫助的。

對於第四題的回答是：

\*卡丹諾：4 位

\*無印象：7 位

\*塔達利亞：8 位

\*數學家的創造力：9 位

\*巴斯卡三角形：10 位

\*賈憲楊輝三角形：11 位

\*巴斯卡賭注：26 位

為何學生印象最深刻的內容是巴斯卡賭注可能是因為這對學生來說很新鮮，而且又很容易理解。此外，學生也可利用這個觀念去解決數學期望值的問題。

對於第五題有 28 位學生認為「機率」相關背景的介紹，對學習有幫助，他們所持的理由分別是：

\*上課會比較生動，不會無聊

\*比較真實，不會都很抽象

\*增進一些常識

\*可知真正的來源，而不是死記公式

\*觀念更清楚

\*增進學習興趣

而有 13 位學生認為：

\*如此對考試無所幫助

\*對未來的學習沒有用

沒意見的有 6 位同學

大部分的學生都支持「機率」相關背景的介紹，能幫助學習，這再一次佐證了筆者的想法。

對於第六題有 29 位同學持正面的態度，他們的理由是：

\*原來數學還是有好玩的地方

\*數學好像終於可以用在日常生活當中

\*數學也是有歷史的

\*對於新的教材比較快令我入境

\*公式不是死的，而是有變化而來

\*數學不只是一門學科，而是人類由古至今

智慧與經驗的累積

\*比較有信心

\*不會再感到上課=計算如此乏味

而有 11 位學生認為：

\*對於必須參加聯考的我們這並不重要

\*不懂的部分還是不懂

沒意見的有 7 位同學

對於少部分的學生持負面的態度，或許這與筆者的教學技巧以及升學壓力有關。很顯然地，在升學掛帥及文憑主義下，如何有效而合適地運用數學史教學對教師是一大挑戰。

對於第七題，有 34 位同學認為這樣的上課方式對數學學習有幫助，持反面看法的同學大部份都認為：

\*考試不考

\*雖然會想聽，可是不會算的還是不會算

可見在當今的教育環境，如何拿捏其中之分寸仍是一門大學問。

至於第八題對人格的發展，少數認為有影響的同學所持的理由是

\*不會侷限於從前之窠臼中，創造新視野

\*遇到生活中不甚了解的地方，可以嘗試著去解決

\*較全面化

\*會學習巴斯卡的宗教信仰方式，改變一些思考方式

為何筆者會安排此題的理由是因為筆者認為引述數學家的事蹟可激發學生產生有為者亦若是的心理。但是這個回答結果顯示筆者應該改善表達方式以及讓問題更易明瞭。

由以上的整理，讀者可以發現大部分的學生還是持肯定的態度並且認為數學史的運用有助教學，這對筆者是一大鼓舞，也讓筆者更確信整合數學史於教學過程中可以充實以及改善數學教學，這也正是 HPM 的宗旨。

## 五、參考文獻

Burton, D.M. (1991), *Burton's History of Mathematics: An Introduction*. Dubuque: Wm. C. Brown Publishers.

David, F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner Publishing Company.

Kline, M. (1954), *Mathematics in Western Culture*. London: George Allen and Unwin Ltd.

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Katz, V. (1993), *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins



College Publishers.  
Ore, Oystein (1965), *Cardano-the Gambling Scholar*. New York: Dover Publications.  
袁小明 (1998), 《數學誕生的故事》.台北: 九章出版社.

劉 鈍(1997), 《大哉言數》.瀋陽:遼寧教育出版社.

蘇意雯 (1993), 〈從賭博出發〉, 科學月刊 第 24 卷第 11 期, 頁 821 – 828.



## 「從對數學式子的評價探數學教師的數學觀」

### ---數學史知識需求面相的另一種思考

台灣師大數學系助教 謝佳叡

#### 一、前言

為期六天的『HPM 2000 Taipei 國際研討會』圓滿的落幕了，在洪萬生老師的鼓勵與謝豐瑞老師的指導協助下，也讓我有幸成為這個國際舞臺上的一角。在此之前，未曾有過此類的發表經驗，更未曾在公開場合使用英文演講（自娛此為 *Double-trouble*），其焦慮程度幾乎到了食不下嚥的地步。所幸，滿場的聽眾給了我最大的鼓勵，對我的研究表示有興趣的話語更是給予諸多的肯定，幾個月來的努力盡化成甘甜的回憶，而這個難忘的經驗，將永遠在我的記憶中佔據一個位置，一個好的位置。

不可否認的，數學教師的教學行為往往受其心中的數學觀與數學教育觀所影響。因而，探討數學教師的數學觀成了許多國內外學者研究的焦點，期能藉由對此方面的瞭解，達到更好的數學教學成效。本論文的靈感亦來自相同的動機，但方法上卻採用另一種不同的角度，亦即藉由教師們對數學式子的『美』、『有用』及『對數學史發展史知識的需求』三個方面的評價，一探數學教師的數學觀。

我們對 373 位學生教師、46 位來自各地的在職教師，及 139 位高中生進行問卷調查，問卷內容乃針對 38 個的數學式子進行五個項目的票選。此外，也從中選擇了九位不同類型的樣本進行訪談，除了檢驗和確認我們詮釋的適當性，也可將詮釋的內涵更細膩精緻。研究中，我們得到許多有趣且發人深省的結果，限於篇幅，僅擇摘其中『對數學史知識的需求』部份的一些結果以及個人心得，與各位分享。或許藉由這個機會，我們得以更深一層的思考，在大家致力於將數學史引入數學課堂的同時，是否真正掌握了使用數學史的動機和目的？

#### 二、為什麼要在數學課堂中引入數學史？

在這一節開始之前，我們先看看這九位受訪者對於『使用數學史對教學、學習有何幫助？』所做的回應。

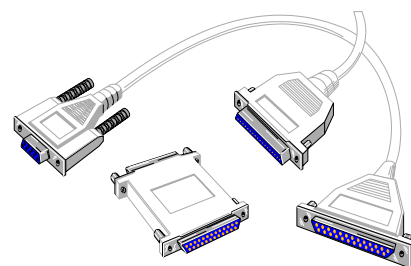
表一、使用數學史對教學、學習有何幫助？

T1	1.教科書上的知識太冰冷了，加進數學史學起來會較有感覺 2.並非每個人都適合學那麼多數學，一些歷史的啟示更重要。 3.數學史可以讓我知道數學家在何處是曾遇到困難，讓我更注意教學。
T2	配合生活、歷史故事對學生可以全面的聯想較多的東西，對我可以引起動機，讓上課更有趣。
PT1	如果不介紹數學史就好像只有解題。
PT2	數學史和人們的學習過程很像，知道數學史可以模仿這些學習經驗
S41	可以讓上課更有趣吧！因為沒使用過所以不清楚。
S42	我覺得上了數學史的課後對我的教學影響很大，上課比較有趣，對於內容的來龍去脈較有先後，不會只教課本內容。
S43	1.數學史會告訴他們所學的是怎麼來的，會較有感覺。 2.使用數學史會提供一個學習動機。
S31	對學生可以多一點認識、多一點興趣，也可以知道的更多；對教學可以使上課氣氛活絡
S32	對學生學習可以更有興趣，而看他們學的高興我也會感到高興。
T:在職教師 PT:實習教師 S4:台師大四年級學生 S3:台師大三年級學生 最末碼為序號	

使用數學史對教學、學習有何益處？引起動機、讓上課有趣生動總是第一個被想到。但這是否有透露了幾件值得思考的問題：數學本身真的如此乏味，需要數學史來使上課變的有趣？數學史的主要功能是在這裡嗎？教師們真能做到『引發學習動機』的效能嗎？常聽到：數學是一門藝術，但我們就很少聽說在美術課中，教師們需要藉由述說美術的發展史來引起學生的學習動機。的確，數學家的奇聞軼事對於提振學生上課的情緒是容易且有效的，但之後呢？如果數學史的功用無助於數學知識的學習，而只在於捕捉學生短暫的注意力，則數學史的必要性或許還比不上幾個笑話來的強。

有些教師認為從歷史的角度注入數學活動，實踐多元文化與人文的關懷，讓數學成為有血有肉的學門，但不可輕忽的是，這事說來容易做起來可就不簡單，因為此將涉及更專門的數學文化史或數學社會史，並非每個教師對這些領域都有接觸。有些教師認為數學史可讓教學更有系統，讓學生知道所學的數學從何而來，但必須留意的是，目前數學教科書的呈現結構以及單元間的順序，並非依照數學發展史的進展安排，例如，發展上遲得多的『負數』在國中教科書卻一開始就出現，如要藉數學史讓教學更有系統，教師必得多花工夫在材料的找尋與教學的設計上。藉由前人的經驗做為現今教學的參考想必也是很多教師所贊同的，但如再細思，不能不注意這其中所潛在的危險性。怎麼說呢？能成為被記載的數學史資料，都是極其優異的數學家或是奧妙的數學知識，即使是發展上不順遂的事件，主角人物也都是數學家。而我們不得不承認，數學家的思維跟我們的學生是有很大的差異，數學家的困擾學生未必感受，數學家認為顯然的知識學生也未必接受，我們豈能期望學生能追隨這些數學家思考的腳步，一味地引用參考，豈不正是『愛之適足以害之』。

『製造連結 (making connections)』是數學史教學所展現出的一個重要功能，它可以開拓學生的視野，培養更寬闊、全方位的認知能力，數學內部各領域的連結、數學與其他學門的連結、數學與生活的連結等。而數學史的學習本身也是一種學習，同時也讓我們知道，數學也是人類發展的一種知識活動，如同詩詞、音樂一般。數學史是不是數學知識的一部份？除非你將數學視為單純的解題活動，否則對數學史的忽視將使得數學本體殘缺不全。但從教師普遍認為課堂上的數學內容過於冰冷，可以推測他們將數學知識的傳授以『去脈絡 (out of context)』的方式



進行，數學史的『製造連結』正好補其『脈絡』。相同的，而數學史如果沒有數學知識充當骨肉，它將只是一個空架而失去意義，正因為數學史難以單獨存在，其功能性又不可忽視，將之引入數學課堂正是相得益彰。

這些意見無意在『大家熱心推動數學史的創業階段』予以冷水傾潑，而正如前言所說是提供一個反思的機會，對於任何將數學史引入課堂的努力都應給予鼓勵與肯定。但如有耀『千分光』之能，卻只發『百點熱』之效，豈不憾哉？況且這些困難，都是可以克服的，全看教師用心程度了。如將自己限於起點，要將數學史的功能發揮到淋漓盡致，此等美事豈能經常發生？

### 三、數學史知識的需求

沒有人會懷疑，教師的知識及其影響對教學活動的重要性。然而，本研究有意將重點鎖定在數學史知識，是為了與數學知識及數學能力做一區分。因為就台灣的中學數學教師的選擇與培育而言，中學教師對於中學範圍的數學知識大多不會有問題，然而整個師資培育過程，數學史知識卻沒有受到太多的重視。許多教師表示，自身對於數學常是為學習而學習，缺乏其背景瞭解，以致無法在課堂上隨心所欲地展現數學史的教學活動。因此，教師們對數學史知識的需求是得以理解的。

在這個象度上，我們又將之分成兩個項目探討：(一) 最想知道數學史的式子；(二) 最應教給中學生數學史的數學式。

最想知道數學史的數學式子部分之結果較為多樣，各階段教師的需求也不盡相同(見表二)，這能提供中學數學教師或師資培育者一個參考。再輔之以訪談資料，我們可以得到教師們思考此問題大致站在兩個角度：(1) 教學上可以用到：認為身為一個數學教師應當具備某些基本知識，對學生的學習與自己的教學都會有幫助；(2) 滿足自己的求知慾：這個求知慾大多來自對知識的缺乏感與渴望，這些缺乏感來自以前並沒有機會得到這些訊息，而渴望來自好奇。然而，訪談之中我們注意到，這些教師對找尋這些數學史資料卻十分被動，他們多半認為沒有時間或不得其門，而寄望有誰能提供現成資料，值得師資培育者深思與憂心。

表二、最想知道數學史的式子排行及票數 (FT：基本定理)

階段	一	二	三	四	五
大一 (84)	v-e+f=2 38	Cauchy不等式 28	Fibonacci 數列 25	微積分FT 25	畢氏定理 24
大二 (81)	Cauchy不等式 33	畢氏定理 29	v-e+f=2 29	Fibonacci 數列 28	海龍公式 17
大三 (96)	Cauchy不等式 29	v-e+f=2 26	海龍公式 25	畢氏定理 24	組合公式 21
大四 (77)	微積分FT 24	v-e+f=2 20	$e^{i\pi} = -1$ 17	柯西積分公式 17	Cauchy不等式 16
大學部	v-e+f=2 113	Cauchy不等式 106	畢氏定理 92	Fibonacci 數列 86	微積分FT 82
碩士 (35)	質數定理 14	v-e+f=2 12	柯西積分公式 11	Fibonacci 數列 10	代數FT 9
教師 (47)	v-e+f=2 14	泰勒公式 14	L' Hospital 法 13	海龍公式 13	Cauchy不等式 13
高社 (81)	Cauchy不等式 36	海龍公式 29	組合公式 28	判別式 $\Delta$ 26	點線距離公式 23
高自 (58)	海龍公式 21	隸美弗定理 16	Cauchy不等式 15	圓球體積公式 13	v-e+f=2 13

(階段後括弧內的字為調查人數，式子後欄為得票數。)

至於最應教給學生數學史的部分(見表三)，『中學生常用』是最主要的選擇因素。訪談結果指出，有的受訪者認為這些數學史會帶給學生更深的感受，有的則以(或猜測)學生有興趣知道為選擇因素，也有是自己覺得有趣，欲與學生一同分享。倒是 S41 頗為特殊的情形，其認為不必要在數學課堂上教授數學史，以免增加學生負擔，課堂時間也不允許，而是教師

們要自己瞭解這些知識融入教學活動，只在課堂講講故事對學生幫助不大。

值得注意的是，教師與學生皆認為『Cauchy 不等式』的歷史應被教給中學生的比例很高，但由前一部份看來，它也是教師們最欠缺的部份。教師們自己認為不熟歷史的式子卻認為中學生應該學會（那誰來教他們？），若不是選擇者是不同的人，就是教師自己內心的矛盾，或是教師學這個式子時並沒有深刻感受，而認為有這個歷史知識對學生有幫助。

表三、最應教給中學生數學史的數學式排行及票數

排行 階段	一		二		三		四		五	
大一 (84)	畢氏定理	46	Cauchy不等式	38	海龍公式	21	判別式 $\Delta$	18	點線距離公式	16
大二 (81)	畢氏定理	54	Cauchy不等式	26	圓面積公式	25	圓周長公式	19	海龍公式	18
大三 (96)	畢氏定理	63	Cauchy不等式	31	三角形內角和	24	判別式 $\Delta$	22	圓面積公式	20
大四 (77)	畢氏定理	58	圓面積公式	20	Cauchy不等式	20	圓球體積公式	18	三角形內角和	17
大學部	畢氏定理	221	Cauchy不等式	115	圓面積公式	79	三角形內角和	69	判別式 $\Delta$	65
碩士 (35)	畢氏定理	22	圓面積公式	13	三角形內角和	11	等差級數	11	圓周長公式	9
教師 (47)	畢氏定理	34	Cauchy不等式	21	圓面積公式	12	對數公式	11	三角形內角和	10
高社 (81)	Cauchy不等式	29	畢氏定理	27	點線距離公式	25	海龍公式	24	判別式 $\Delta$	23
高自 (58)	Cauchy不等式	22	海龍公式	18	判別式 $\Delta$	17	點線距離公式	16	畢氏定理	11

(階段後括弧內的字為調查人數，式子後欄為得票數。)

再仔細思考，什麼樣的數學式子的發展史最獲教師們的青睞？從訪談中，看得出教師們大多以數學史做為輔助學習『常用』的式子為主，數學史居於配角的地位不言可喻。『常用』說穿了就是『常考』，這個結論在本研究的另一部份揭露，在教師的心中，數學具高度的封閉性。這個封閉性的觀點來自何處？或許底下的研究提供了一個線索。在另一份研究裡（謝豐瑞，1999），調查二十四位在職教師對教學影響的因素，研究顯示實際對他們教學有最大影響的是『考試（聯考、一般考試、成績）』。其他幾個影響如『課程進度』、『學校行政壓力』、『學生學習態度』也大都因此而起。考試不但限制實際數學教學，也無形中影響了教師們的數學觀，**數學最大的用處即在考試中得到好成績**。這不禁令人擔憂，在重視考試的環境下，磨損了他們主動找尋教學資源的能力事實已隨處可見，過渡重視考試的情形再不改善，只怕努力推動數學史融入課堂又將落入另一種考試的內容，另一個學生的夢魘。

### 參考資料：

Hsieh, C. J., & Hsieh, F. J., (2000), "What Are Teachers' Views of Mathematics? –An Investigation of How They Evaluate Formulas in mathematics", in Horng, W. S. & Lin F. L. (eds) *Proceedings of the HPM 2000 Conference: History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium*, pp.98-111. Taipei: Department of math, NTNU.

謝豐瑞 (2000), "The value of mathematics learning". Unpublished study.

洪萬生 (1998), 〈HPM 隨筆(一)〉, 《HPM 台北通訊》, 第一卷第二期

唐書志 (2000), 〈數學史、數學教育與終身學習：來自紐澳的啟示〉, 《HPM 台北通訊》, 第三卷第八、九期合刊

# 回應

回應《HPM 通訊》第三卷第八、九期合刊，〈科技在配合歷史的數學教學中之運用---由數學史所得到啟示的現代科技教學〉

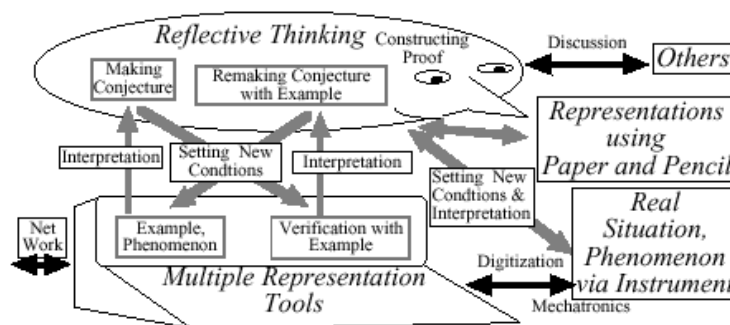
台師大數學系研究生 黃哲男

上期通訊中，黃清揚學長摘譯日本學者 Masami Isoda 之論文《The use of Technology in Teaching Mathematics with History-Teaching with modern technology inspired by the history of mathematics》。細觀全文，學長已經將原文之重點盡譯，本文之目的主要是補上一些說明。

在摘譯文章中將動態幾何軟體譯成 GSP，事實上，Masami Isoda 文中所指的動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software，DGS）並非特定指稱 The Geometer's Sketchpad（GSP）。“Dynamic Geometry”確實是 Key Curriculum Press 為 GSP 所註冊之用語，嚴格而言，Dynamic Geometry Software 可以等同於 GSP。不過，原作者在此處使指的是可使得幾何物件動態化的軟體；這樣的軟體有很多，例如 Cabri Geometry、The Geometric Supposer、幾何專家等，甚至像 Maple 勉強也可以算是 DGS，只是其不似 GSP 等軟體可以那麼方便直接操弄幾何物件罷了！

另外摘譯文章中還出現了 CAS 一詞，這是 Computer Algebra System 的縮寫，原作者指的是類似 Derive、Mathematica、Maple 等在數值計算方面之功能較強大的軟體。基本上，全文便是在講如何整合數學史與上述 DGS、CAS 以及其他現代科技產品的各種表徵連結於數學教學活動中。

另外，原文中的 “technology” 所代表的意義並不完全是譯文中的「科技」。原作者在其論文中將 technology 分成 “modern technology” 以及 “traditional technology”，細究其意，technology 應指當代的工藝技術、科學技術、儀器工具等，亦即對 Descartes 而言，圓錐曲線的作圖工具就是那個時代所發展出的 technology 之一，相對於古希臘時期，便是 “modern”。在其論文的第一部份 “Why we should use technology in teaching mathematics history” 便是就 technology 廣義的意義來論述，文中便提到利用 Descartes 時期的（仿古）作圖工具（實物）可以使學生更「親近」Descartes 的想法，而現代科技（指電腦）則提供了一個方便的模擬環境，雖不見得可以使學生「親近」Descartes 的想法，但卻提供了一個多重表徵的環境，使得學生可以從不同的角度思考與學習 Descartes 所提出的數學概念（下圖即 Masami Isoda 所提出之模型。上方是一個人的頭腦，下方是一台電腦）。



文中還提到一個論點，值得從事電腦輔助教學的人思考（當然也值得沒有利用電腦輔助教



學的教師思考)：為了建構知識，應該給學生選擇、尋找以及創造新工具或表徵的機會。過去電腦輔助教學之所以沒有獲得重大進展，主要的原因即在於跳脫不了「電腦展示—學生聽看」以及「電腦問—學生回答」之單向的教與學模式。Masami Isoda 認為應該相信學生有自發學習的能力，盡所能地提供各種工具、方法，甚至讓學生自己創造發明新工具、新方法，去建構或重新建構知識。從此角度思考，電腦網路科技提供了方便且資源豐富的角色，但並非全部！人才是學習的主體，別讓電腦決定學生要學什麼以及怎麼學，而是讓學生自己決定要如何應用電腦去學習。

註：Masami Isoda 於大會結束曾經告訴筆者，在日本，GSP 的使用率並不及 Cabri，他之所以會在大會演講中使用 GSP 的原因是因為他知道 GSP 在台灣較為流行。關於 Cabri 這套動態幾何軟體，筆者目前正在進行中文的工作（已完成約 80%）以及編寫操作手冊，希望能盡快與大家分享。此外，對於 Masami Isoda 的論點有興趣之讀者，可以參考其

《Inquiring mathematics with history and software》。收錄於 John Fauvel 以及 Jan van Maanen 所編之《History in mathematics education : the ICMI study》，Dordrecht : Kluwer, 2000, pp. 351-358。此外此書之第十章與 Masami Isoda 的論點頗有關聯，有興趣的讀者可以參考。



書名：微積分之旅 作者：David Berlinski 譯者：陳雅茜

出版社：天下文化

出版資料：共 300 頁，定價 280 元。

國際書碼：ISBN 957-621-718-0

台師大數學系 洪萬生教授

閱讀本書，我們很容易被作者的文字所吸引。即使我們所面對的是中文譯本，本書敘事仍然散發了文學創作的渲染功夫。本書的特色，無疑是：作者大量地利用優美的詞藻，向我們訴說微積分的動人故事。

儘管如此，本書作者還是試圖把他的文學抒情還是收攝在數學知識的邏輯架構之中。誠如作者開宗明義所說，『微積分基本定理是本書的焦點，也是各章節共同希望完成的目標。』因此，論述儘可軟調甚至於有一點低聲下氣，但是作者對於導向此一定理的知識內容—如『中間值定理』、『洛爾定理』與『均值定理』，卻絕不妥協，硬是不惜添加（數學的）『附錄』（全書共十二個），企圖說清楚、講明白。

譬如說吧，第八章附錄（也是全書第一個）就提供了 $\sqrt{2}$  是無理數的戴德金證明，說明這種『對應不到有理數的切口』補滿之後，實數的存在（或完備性）得以建立起來，也因此微積分在處理幾何圖形（通常是連續的）時，才有理論依據。接著，第二個附錄（在第十三章之後）也再度地處理了實數完備性，不過，標題卻十分花俏與耐人尋味—『無窮大與無窮小皆是空』。在最後一個附錄（附在第二十五章之後）中，作者則提供了微積分基本定裡的證明。

本書還有一個特色，那就是對於數學家傳記片段的安排與書寫（包括了極生動的服裝與肢體語

言)。這些數學家包括了萊布尼茲、牛頓、笛卡兒、戴德金、克隆尼克、歐拉、伽利略、柯西、波爾察諾、洛爾、拉格朗日以及黎曼。作者總是可以適當地剪裁，切入相關的章節，讓這些數學家的身影適時地重現，既凸顯論述主軸，也讓我們見識到作者的敘事與抒情本事。

這種寫作手法，可以印證本書寫作企圖揉和數學與文學（作者也寫小說！）之努力。可惜，本書的文學風格並沒有提高它的可讀性。照理說，正如數學史家 Morris Kline 的呼籲，恰當地描繪數學的歷史人文風貌，的確是瞭解與鑑賞數學知識的最佳進路之一。然而，本書作者對自己的函數概念說明之告白—『寫了這許多虛矯浮華的文字，已經叫人膩了，即使對我來說也是如此』，卻也貼切地刻劃了全書的风格。至於論述之欠缺親和力的主要原因之一，則在於數學與文學這兩種質素並未水乳交融在一起，反倒是文學的浮華堆砌與數學的邏輯嘮叨，一再地逼視讀者的眼睛，讓我們感受到極大的壓力，平白地喪失閱讀科學人文的樂趣。

其實，本書如果寫得精簡一點，割捨掉過於賣弄的文學成分，而代之以篇幅合度的數學史論述，那麼，相信讀者（不管是不是主修數學者）一定比較容易欣賞作者的苦心造詣，而渴望『散發在這艱澀學科上的多一點光芒』。



St Andrews MacTutor History of Mathematics

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/>

★★★★★

台師大數學系研究生 黃哲男

這是一個英國的網站，屬資源庫型態。一般而言，資源庫網站的要求有很多項，其中資料豐富、傳輸速度與更新頻率等乃是最基本且最重要的要求，此網站乃是這方面的翹楚，而且此網站不僅僅只收集「古人」資料，關於現代活生生的數學家，也可以在此網站中找到豐富的資料，正因為如此，筆者才選擇此網站作為數學史網站介紹系列的第一個網站；不過，由於此網站內容豐富，筆者不可能介紹詳盡，因此建議讀者簡單地瀏覽本文之後，親自連上網路，直接在這個寶庫裡面挖寶吧！

如上圖所示，此網站有著「乾淨清爽」的特色，且站內搜尋功能相當完備；此外，此網站也提供了「Help」功能，裡面有非常詳盡的網站內容與功能介紹，可以幫助第一次造訪的

瀏覽者更快地熟悉與更快速地找到資料。

底下筆者將依此網站的主結構來介紹：

## Biographies Index

The screenshot shows a navigation menu for the Biographies Index. It is divided into two main sections: 'Alphabetical indexes' and 'Chronological indexes'. The 'Alphabetical indexes' section lists letters from A to L, with some letters having sub-links (e.g., A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z). The 'Chronological indexes' section lists years in ranges, such as -500 AD, 500-1499, 1500-1599, 1600-1649, 1650-1699, 1700-1749, 1750-1779, 1780-1799, 1800-1819, 1820-1829, 1830-1839, 1840-1849, 1850-1859, 1860-1969, 1870-1879, 1880-1889, 1890-1899, 1900-1904, 1905-1909, 1910-1919, 1920-1939, and 1940-1957. At the bottom, there are four links: 'Female mathematicians', 'Recent changes in the archive', 'Full Alphabetical index', and 'Full Chronological index'.

此網頁依字母與年代順序羅列數學家的傳記，瀏覽者可以依數學家名字的第一個字母或其年代，於對應的選項中找到該名數學家。此外此網頁還有四個大項：

- **Female mathematicians**：其中收集了許多女數學家的傳記。
- **Recent changes in the archive**：由於此網站內容不斷更新，故有許多數學家之傳記有所更新或擴充，在此網頁內條列出最近更新的部分。
- **Full Alphabetical index**：此網頁乃是將此網站中所收集之所有數學家的傳記，依其名字的第一個英文字母順序條列。
- **Full Chronological index**：此網頁乃是將此網站中所收集之所有數學家的傳記，依其年代順序條列。

The screenshot shows a search bar with the text 'Enter a word or phrase:' followed by an input field and a 'Search Biographies' button. Below the search bar, there is a navigation menu with several links: 'Main index', 'History Topics Index', 'Time lines', 'Famous curves index', 'Mathematicians of the day', 'Birthplace Maps', 'Societies, honours, etc.', and 'Search Form'.

此外，此網頁下方還有一些選項，如上圖。其中如搜尋引擎以及部分選項在其他網頁也有，目的是使瀏覽者方便地轉往自己有興趣的網頁。部分的內容將於底下介紹。

## History Topics index

此網頁主要是介紹一些有名的或是有趣的數學史論題，內容非常精彩。每個主題還盡量鏈結相關或相同主題的其他網站，藉此可以收集到世界各地豐富的資料。



### Famous curves index

本網頁收集了許多有名曲線的資料，其中除了定義與一些數學性質之外，還有歷史內容，如：在何種背景下由誰發現，哪些數學家曾經研究過該曲線，以及該曲線在數學史上的地位與意義等等。此網頁的曲線可不是靜態的，建議讀者使用支援 JAVA 的瀏覽器，花一點時間等待（絕對值得），便可以操弄該曲線哦！

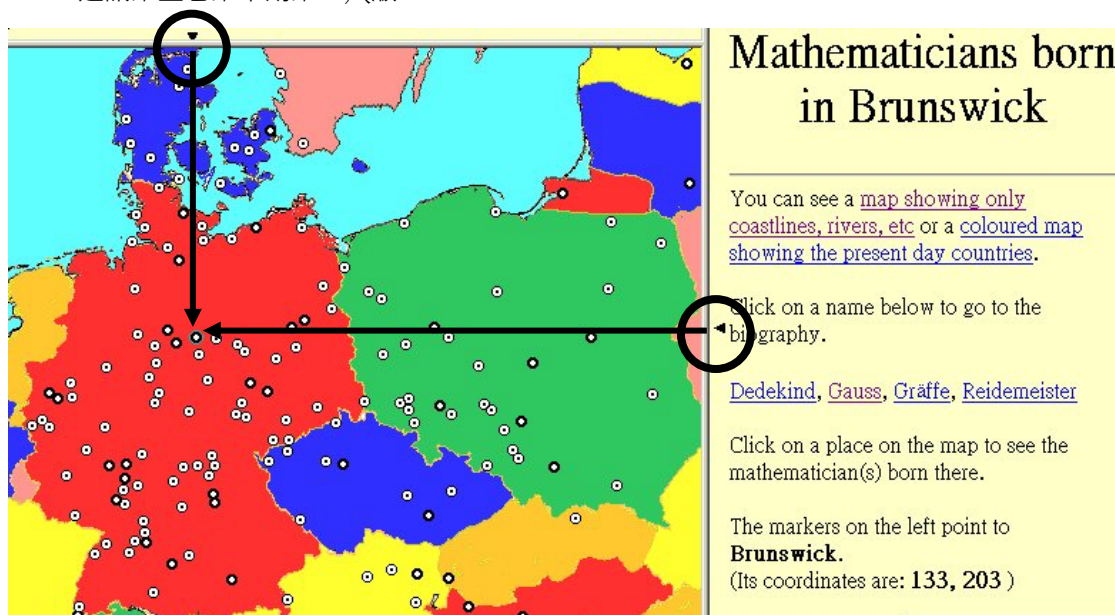
### Mathematicians of the day

此網頁會隨著瀏覽日期的不同而出現不同的網頁，譬如說瀏覽者 10 月 1 日造訪該網頁，該網頁便呈現歷史上 10 月 1 日出生與過世的數學家。當然，如果想找其他日期也是很方便的，只需在網頁下方的「Whole year」按一下，便有 366 天的日期可供選擇。利用此網頁，可以讓學生看看和自己同一天出生的數學家有哪些，相信學生一定會很高興原來自己和某些數學家同一天出生，也許可以藉此拉近學生與數學之間的距離。

<a href="#">Yesterday</a>	<a href="#">Today</a>	<a href="#">Tomorrow</a>	<a href="#">Whole year</a>
<a href="#">Main Index</a>	<a href="#">Posters</a>	<a href="#">Biographies Index</a>	
<a href="#">History Topics index</a>		<a href="#">Birthplace Maps</a>	
<a href="#">Time lines</a>	<a href="#">Quotations</a>	<a href="#">Famous Curves index</a>	
<a href="#">Search Form</a>	<a href="#">Societies, honours, etc.</a>		

另外還有幾個選項相當有趣：

- **Birthplace Maps**：此網頁以歐洲與北美洲地圖為底本，將數學家的出生地標出，瀏覽者只需點選標記，便可將該地出生之數學家的資料顯示在右方視窗，如下圖（圈圈與箭頭標記為筆者所加，請讀者注意圈圈內有小箭頭，此乃此網頁設計精良之處。瀏覽者只需要依照上方與右方的小箭頭指示，便可以找到標記點）。也許會有讀者認為，想從眾多的標記點找到某個數學家的出生地名，有如大海撈針；一個優良的網站當然不會讓瀏覽者像無頭蒼蠅般到處亂按，只需回到「Biographies Index」找到自己想找的數學家，在其傳記網頁中找到「Show Birthplace location」，按一下即可。至於歐洲與北美之外的地區國家，此網站雖然沒有用地圖標記的方式列出數學家的出生地，但還是有用文字的方式條列出，讀者可以在網頁中找到：「Other countries」。



**Mathematicians born in Brunswick**

You can see a [map showing only coastlines, rivers, etc](#) or a [coloured map showing the present day countries](#).

Click on a name below to go to the biography.

[Dedekind](#), [Gauss](#), [Gräffe](#), [Reidemeister](#)

Click on a place on the map to see the mathematician(s) born there.

The markers on the left point to **Brunswick**.  
(Its coordinates are: 133, 203 )

- **Posters**：如果瀏覽者想自製有數學家肖像的明信片或海報，只需要利用上面介紹的方法（如姓名或出生日期），在該網頁中找到自己想要的數學家即可。
- **Societies, honours, etc.**：介紹一些數學組織團體以及許多獎項，譬如裡面就有費爾茲獎（Fields Medal）的詳細資料。

後記：

看過此網頁之後，筆者認為沒有人不驚嘆的吧！資料之豐富、網站設計之精良，實非三言兩語能說得清楚，建議讀者親自上寶山一趟，相信絕對不會空手而回。此外，筆者深覺國外能夠投入大量的人力、物力與時間、金錢建構如此優良之網站，國內當然也可以，尤其中文網站中尚缺少類似的資源庫網站，值得大家努力。

