HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：https://www.hpmsociety.tw/
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十八卷第一期目錄

(2025 年 3 月)

莫比烏斯地鐵

洪萬生
台灣數學史教育學會榮譽理事

一、楔子

波士頓地鐵第 **86** 號列車失蹤了！**3** 月 **4** 日當天，它還在奔馳服務，然後，就從軌道消失了。然而，卻是在三天後，地鐵當局才有正式的「尋車」通告。這也難怪，因為地下鐵路線的規模越來越龐雜，以最近加入的伯爾斯頓直達線（**Bolston shuttle**）為例，它就連結了七條主線通過，並交會於地下四層之間。還有，每日大約有 **227** 部列車提供服務，載運乘客多達一百五十萬人。因此，一部列車不見了，恐怕只有地鐵當局會因通報而覺察到。

這是科幻小說《名為莫比烏斯的地下鐵》（***A Subway Named Mobius***）所布置的場景，其目的是要把莫比烏斯環（或紐帶 **Mobius band / strip**）請出場，讓搭乘這部「失蹤」多日的地下鐵列車，得以在最後平安地返回乘客熟悉的軌道上。按今日分類判準，這部短篇小說應歸類為「數學小說」（**mathematical fiction**），[1]而非科幻小說（**science fiction**）。數學小說是這幾年才問世的新興文類（**genre**），但在（數學）普及書寫（**popular writing**）領域，卻已經發揮了巨大的影響力。[2]底下，我們要藉此稍加說明。

我所以注意到這篇「數學」小說，完全源自毛爾（**Eli Maor**）的《毛起來說無限》（***To Infinity and Beyond***）。[3]在這本普及書寫作品中，毛爾採取文化史（**cultural history**）的進路，因而敘事有了更大的迴旋空間。事實上，該書（共 **29** 章）依序說明「數學的無窮」、「幾何的無窮」、「美學的無窮」，以及「宇宙的無窮」。至於莫比烏斯環（或紐帶）則在美學的無窮脈絡中被引進。既然如此，與美學息息相關的藝術家之創

[1] 「數學小說」文類可參考網站：https://kasmana.people.charleston.edu/MATHFICT/。也請參閱洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》。
[2] 參考同上。
[3] 毛爾的普及書寫如《毛起來說 *e*》、《毛起來說三角》、《畢氏定理四千年》，以及《毛起來說無限》，都採取文化史的進路。又，本書由曹亮吉教授（**1943-2021**）中譯。

作，當然是毛爾的關注要點。他就是在這個關連中，介紹瑞士雕塑家畢爾（**Max Bill, 1908-1994**）的作品（圖一）。

圖一：《無盡的彩帶》的一個版本（維基共享）

根據畢爾的自白，他當年是想要創作一件在空中會「旋轉懸浮」的雕刻，於是，他「就創造了一個單面的物品」。他強調：「我不依靠科學或數學追尋靈感，我靠的是美學 …… 我把這件作品叫做『無盡的彩帶』」。可惜，「後來有人來告訴我，我以為是自己發掘或首創的那件創作，只是一種叫做莫比烏斯紐帶的藝術詮釋，而且理論上沒有兩樣 …… 得知我不是第一個發現它的，這件事讓我受到打擊，因此，有一段日子，我不再朝這個方向鑽研了。」

最後，畢爾還是釋懷了，他以莫比烏斯環為模型繼續創作。只是我們不知道他對數學家的視覺思考有何評論。

二、莫比烏斯 vs. 利斯廷

這個不可定向的（**non-orientable**）、「單面的」、「無盡的」曲面，並非是莫比烏斯（**August Ferdinand Möbius, 1790 -1868**）最早發現。[4]儘管目前數學界的命名，似乎是歸功給莫比烏斯，他是在公元 **1858** 年投稿到法蘭西科學院的論文中提及此一「物件」，該論文主旨是求解多面體的幾何理論之問題，但從未公開發表，直到他死後才被數學家發現。

另一方面，也是在公元 **1858** 年，但時間稍早於莫比烏斯，利斯廷（**Johann Bennedict Listing, 1808-1882**）也發現此一曲面的性質。甚至相關的學科名稱「拓樸學」（**topology**）也是他最早提及，因為他體認到拓樸學這個全新的領域，應該也要有全新的名稱才是。[5]

上述這兩位德國數學家都出身哥廷根大學，因此，他們都與高斯有師生之誼，高斯甚至還是利斯廷的博士論文指導教授。除了數學之外，他們也都投注心力在其他科學領

[4] 莫比烏斯傳記可參考 **https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius/**。

[5] 拓樸學之興起，也可參考洪萬生主編、英家銘協編，《數之軌跡》第 **IV** 輯，頁 **176-183**。利斯廷傳記可參考 **https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Listing/**。

域如天文學、測地學以及物理學等等的研究。因此，藝術家畢爾應該不需要那麼「玻璃心」才是，因為傑出數學家總是心思敏銳細緻，單純地運用心智（**mind**），就能創造一些極為獨特、甚至不可思議的數學物件。

三、敘事：數學小說 vs. 科幻小說

公元 **2004** 年，美國 **CBS** 放映電視影集《數字搜查線》（***NUMB3RS***），造成大眾文化的極大轟動，美國 **AAAS**（**American Association of Advancement of Science** 美國科學促進會）還為此頒發科普獎章給該影集的製作人，表彰他們為數學普及開創全新的里程碑。這部影集最佳賣點，是有一對兄弟合作辦案，哥哥是 **FBI** 警探，常常獲得數學家弟弟的協助，而得以成功破案。他們兄弟倆所採取的不同進路，「具有不同解題的人員互動之吸引力」：在犯罪現場，哥哥的切入邏輯是出自經驗老到的刑警之街頭智慧，至於弟弟，則是為該犯罪問題引進抽象邏輯思維的專業知識。

圖二：利斯廷肖像

圖三：莫比烏斯肖像

如此一來，我們究竟應如何為這種影視作品的數學知識活動之表現，賦予恰當的定位呢？在《案發現場》（***The Number behind NUMB3RS***）一書中，兩位作者德福林（**Keith Devlin**）與洛頓（**Gary Lorden**）特別強調：

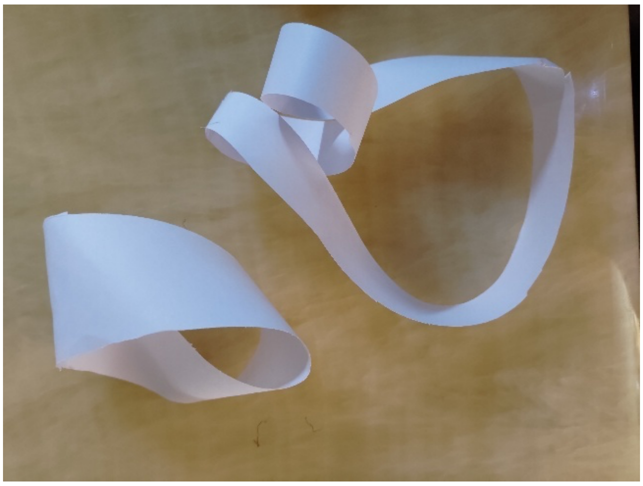
> **思考這套影集有很多方式，最正確的，就是拿它與好的科幻小說比較：在很多案例中，《數字搜查線》對於數學在偵破犯罪的一種特別應用，是未來可能、甚至也許會發生的事情。**

德福林與洛頓在此所以提及「科幻小說」的比喻，主要指向數學的實用面向。不過，要是情節涉及尚未解決的數學猜想時，編劇者（數學家洛頓是其中之一）在劇終時都會交代，譬如本劇集第一季的〈頭號嫌疑犯〉（**Prime Suspect**），就提及黎曼猜想（**Riemann hypothesis**）之求解及其功敗垂成。事實上，這也是數學小說敘事迥異於科幻小說之處，數學小說家頂多針對未解的猜想，訴諸一種「無言的」結局，譬如在《鸚鵡定理》（***The Parrot's Theorem***）中，作者居耶德（**Denis Guedj**）在故事結尾時，就安排被謀殺數學家的「伙伴」鸚鵡，對著群鳥講解牠所記得的哥德巴赫猜想（**Goldbach**

conjecture）之證明。而當然現實上，這個猜想還有待證明！

四、莫比烏斯環（或紐帶）

正如前述，在《名為莫比烏斯的地下鐵》小說情節中，作者「虛構」日益複雜的波士頓地鐵系統，導致列車在莫比烏斯環（或紐帶）的軌道上行駛，而難以追蹤。事實上，有許多波士頓居民報案說，他們曾聽到這班車從他們的「正上方」或「正下方」通過。因此，正當地鐵總經理、工程師以及所有人都一籌莫展時，有一位哈佛數學家自告奮勇，試圖說明這第 **86** 號列車可能駛入四維空間中的莫比烏斯環（或紐帶），才會有列車在同一條軌道，但一下子在「上方」，一下子卻又在「下方」的現象。（參見圖四）不過，他承認自己的專長是代數學，很難說明白這一迷蹤的列車究竟在「何處」（**whereness**）。至於真正的專家，亦即專長為拓樸學的 **MIT** 數學家，則可能就是搭上了那一列車。



圖四：莫比烏斯環及其沿中心線剪開圖

不過，這位哈佛數學家還是有他自己的見解，他知道：要想說服那些數學的門外漢，當然緣木求魚，然而，他引用的有關莫比烏斯環，以及相關的克萊恩瓶（**Klein bottle**）理論，卻可以說明若干現象，譬如，第 **86** 號列車一下子在波士頓市民的「正上方」，一下子在「正下方」，就相當符合莫比烏斯環的「單面」（**one-sidedness**）特性，此外，在圖四中的環面沿中心線剪開的形狀已經非常複雜，要是將莫比烏斯環從 **1/3** 寬度的地方剪開，那麼，「它會自動沿著另一邊的 **1/3** 線全部剪完。而且，他竟變成一個原先 **2** 倍長的大環掛著跟原先一樣長的小環，而寬度都只有原先的 **1/3**。大環扭轉了兩圈，小環則跟原先的莫比烏斯環一樣，扭轉了一圈！」[6]

與「單面」息息相關的，還有雕刻家畢爾所想像的「彩帶無盡」之特性。在《拓樸學超入門》中，名倉真紀、今野紀雄引進如下的比喻：假設你是被關進莫比烏斯環帶的「二維人」。如此一來，單面特性固然容易辨識，然而，二維人究竟身在莫比烏斯環的

[6] 引喬望舒，《未來少年》第 **101** 期，頁 **27**。該期封面故事是「神奇的數學拓樸，酷！」由張靜如策劃，翁秉仁審訂，值得參閱。

「何處」，我們卻無從標誌，因此，二維人在該曲面上「爬行」，想必會感覺無窮無盡。

五、科學家＋科幻作家：多伊奇

現在，我們簡要介紹《名為莫比烏斯的地下鐵》（***A Subway Named Mobius***）的作者 – 天文學家暨科幻小說作家多伊奇（**Armin Joseph Deutsch，1918-1969**）。**1940** 年，他畢業於亞利桑那大學，然後在 **1946** 年，榮獲芝加哥大學天文學博士學位。**1958** 年，他在威爾遜山天文台舉行的專題討論會，首次提出都卜勒成像（**Doppler tomography**）概念。此外，他也曾擔任《天文與天體物理學年鑑》審查副主編，可見他在美國天文學界頗有聲望。

以上資料取自維基百科，但過於簡短，無法顯示多伊奇的文理博雅如何養成。比起書寫、繪製《啟發每個人的數學小書》的李伯夫婦（**Lilian & Hugh Gray Lieber**），他大致晚了一個世代。不過，他們應該都一起孕育了美國開始主導世界數學研究的文化。而且，也都見證了美國數學家養成教育的逐漸成熟，[7]以及二十世紀早期美國本土培養的數學博士，如何以數學教育與普及為職志。[8]

《名為莫比烏斯的地下鐵》首版於 **1950** 年問世，最早發表於 ***Astounding Science Fiction*** 雜誌，其定位當然是科幻小說（**science fiction**）。後來，這篇短篇小說一直被收入相關文集。顯然由於作者的超凡的想像力，到了 **2001** 年它仍被 **Retro Hugo Award** 委員會提名，最後名列第四高票，足見它的閱讀率一直歷久不衰。[9]

六、結語

在哈佛數學家去會見地鐵總經理時，他還攜帶了一個克萊因瓶的小模型，意在說明莫比烏斯環只有一個奇點（**point of singularity**），但克萊因瓶卻有兩個。因此，如果地鐵站的連線之複雜度遠遠超過克萊因瓶，那麼，其連結之程度（**order of connectivity**）可能就趨向無限大，同時，軌道曲面的奇點也就變成無限多了。在圖五（克萊因瓶）中，所謂的奇點，是指這瓶子（閉曲面）在三維空間中相交。經由展開圖（參考圖五），我們可知克萊因瓶內藏了兩條莫比烏斯環。[10]

克萊因瓶是德國數學家克萊因（**Felix Klein, 1849-1925**）所發現，那是一個不可定向（**non-orientable**）且只有一側的二維閉流形。克萊因在利斯廷兩個世代之後，將哥廷根大學數學系經營成為世界級的研究機構，他在這個瓶子上所投注的心血，看起來正是呼應了他的日耳曼前輩莫比烏斯及利斯廷等人的貢獻。我們經由多伊奇的數學小說，多

---

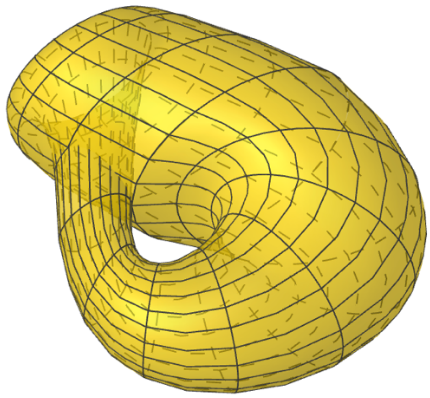
[7] 譬如，莉莉安・李伯榮獲克拉克大學（**Clark University**）博士學位，後來該校轉為教學型大學，不再培育博士生。另外，正如前述，多伊奇是芝加哥大學博士出身。

[8] 參考洪萬生主編、英家銘協編，《數之軌跡》第 **IV** 輯，頁 **218-223**。

[9] 可參考 **Alex Kasman** 的數學小說網站：**https://kasmana.people.charleston.edu/MATHFICT/mfview.php?callnumber=mf102**。

[10] 參考名倉真紀、今野紀雄，《拓樸學超入門》，頁 **80-81**。

少得以分享拓樸學的初創時的點滴概念。這是難得的閱讀經驗，值得我們珍惜。



圖五：克萊因瓶的 GeoGebra 模擬圖

總之，《名為莫比烏斯的地下鐵》是一篇十分耐讀、值得精讀的數學小說。它在七十多年前一開始被視為「科幻小說」，但是，當我們檢視作者多伊奇所安排的情節，可以發現到他將莫比烏斯環的主要特性，發揮得淋漓盡致。譬如說吧，當哈佛數學家提及第 **86** 號列車撞到一個節點（**node**）時，他是指奇點（**singularity**），但是，地鐵總經理無法理解這個「換一種說法」，而誤解那是一種軌道上的阻礙物。而事實上，正如總經理一再強調地，軌道上沒有阻礙物，他親自巡視過一遍。在通過這個節點（奇點）之後，這部列車就進入四維空間的莫比烏斯環了。

時序來到（同年的）**5** 月 **17** 日，哈佛數學家在平常上下班的路線上，剛好搭上這部「幽靈列車」，他趕緊設法通知地鐵總經理，當然，他也無從得知它如何「跳回」這尋常的鐵道，所幸乘客看起來無恙。最後，他建議地鐵當局移除伯爾斯頓直達線，以降低軌道系統因而產生的複雜度。然而，地鐵總經理卻無奈地回答說：來不及了，有一部列車（第 **143** 號）在二十五分鐘前，已經消失無蹤了！

參考資料

毛爾（**Eli Maor**）**(2014).**《毛起來說無限》（曹亮吉中譯），臺北：天下文化出版社。

名倉真紀、今野紀雄 **(2020).**《拓樸學超入門》（衛宮紘中譯），新北市：世茂出版社。

李伯（**Lilian & Hugh Gray Lieber**）**(2012).**《啟發每個人的數學小書》（***The Education of T. C. Mits: What Modern Mathematics Means to You***）（洪萬生、英家銘中譯），臺北：究竟出版社。

洪萬生 **(2017).** 〈《鸚鵡定理》：兩千年數學之旅〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》（臺北：遠足文化公司），頁 **203-212**。

洪萬生 **(2017).**〈《案發現場》與《數字搜查線》〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》（臺北：遠足文化公司），頁 **213-220**。

洪萬生 **(2017).** 〈比喻與數學的敘事理解〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆

記》（臺北：遠足文化公司），頁 **231-238**。
洪萬生 **(2017).**《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》，臺北：遠足文化公司。
洪萬生主編、英家銘協編 **(2024).**《數之軌跡》第 **IV** 輯，臺北：三民書局出版社。

後記：

謹以本文紀念曹亮吉教授（**1943-2021**）。他告別式當天，由於我早約定好在清大發表主題演講而未克參加，非常遺憾。年輕時，我之所以有幸參與科學月刊社的活動，主要是因為他與張之傑對我數學史書寫的賞識。他曾譯《阿基米德寶典：失落的羊皮書》，並要求出版社請我撰寫書評。此外，我在 **1985** 年申請 **CUNY** 入學許可時，甚至還勞駕他撰寫推薦函，他滿口答應，甚至當面說一定大力推薦！

日本御幣製作與教學分享

李政憲
林口國中

今年二月份，承蒙臺灣數學史教育學會邀約於年會分享，談了一些日本與台灣有關摺紙的歷史，也意外發現裏面有一些可以用於數學教學的內容，為了讓這些收穫讓更多人看到，特撰此文以饗讀者。

一般我們談及摺紙，最先想到的都是摺紙鶴，根據網路上搜尋的資料，摺紙發源於中國，發展於日本；18 世紀時，三重縣桑名市長円寺的僧人義道一円寫了《秘傳千羽鶴折形》並出版，裏面有高達四十九種紙鶴的摺法，並附上詳盡的展開圖與說明，是世界第一本摺紙書【註 1】，然而這並不是所知關於日本摺紙的最早歷史發展。

事實上日本人從古墳時代（約三世紀後半至四世紀初）開始，也就是從日本歷史的神話與傳說時代開始，可能就把珍貴的物品「幣帛」奉獻給神靈；而到了奈良時代（西元 710-794 年），「幣帛」開始被專指為布料；隨著時間演進，布料取而代之的是一種懸掛在兩側的折疊紙，被稱為紙垂。到了室町時代（西元 1336-1573 年）至江戶時代（西元 1603-1868 年）前後，由紙垂組成的「幣束」已經很常見【註 2】（如下圖 1【註 3】）。

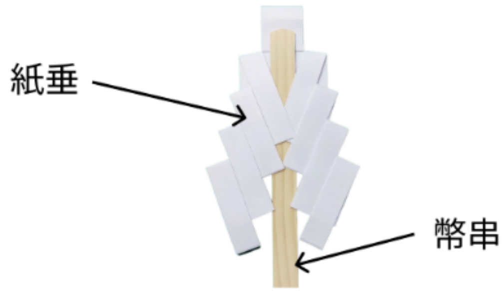


圖 1

明顯可以看到一個幣束是由兩個部份組成：上面的紙垂與所支撐的幣串。然而上面的紙垂如果是用黏的，應該不太容易完成且會有所誤差。所以根據我們所查到的資料，它的製作方式大概如下圖 2【註 4】：

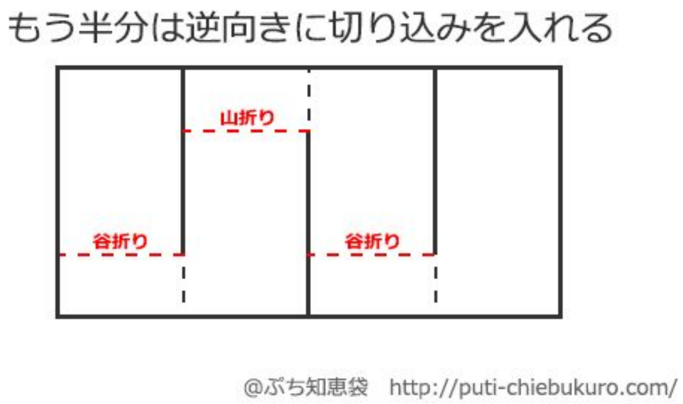


圖 2

請各位讀者先試著想一下，如果拿一張長方形白紙，依照上面的實線剪下後，沿著紅色的山谷線分別摺製後，[11]會形成什麼樣的圖形？又會有什麼規律呢？
為了方便討論起見，我們不妨假設此長方形紙張的長度為 a，寬度為 b，且不失其一般性，每次剪下的長度為 c 均相同（如下圖 3）。

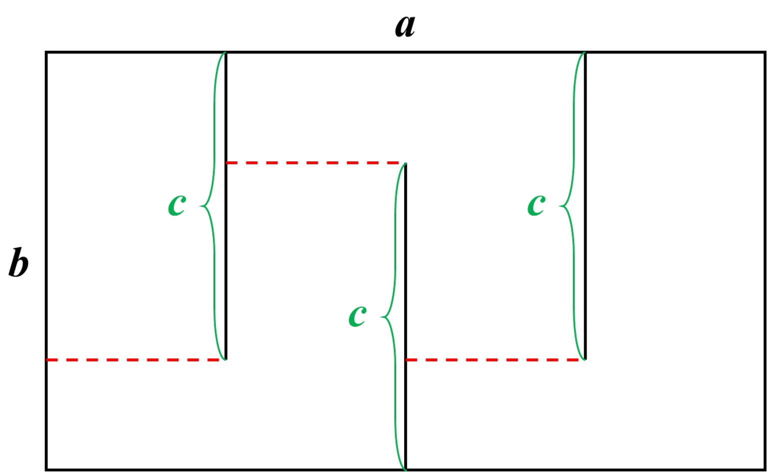


圖 3

由摺製過程，我們明顯可得知紅色虛線會影響的只有整個作品的上下長度，不會影響左右寬度。然而會怎麼影響呢？

如果是教師在教學時，不妨先讓學生先猜猜看，如果只有摺左邊的第一道摺痕，上下長度會怎麼改變？跟哪些長度有關呢？

如下圖 4，實際摺製左邊第一道摺痕之後，您會發現一件十分有趣的事，也就是這個作品的上下長度會變成 2c，與原來的寬度完全無關，且 c 的長度剪的愈多，其總長度也會愈長！

---

[11] 所謂的山線，所指的是摺製後摺痕會突起如山型接近自己；谷線則相反，摺製後摺痕會凹下如谷型遠離自己。

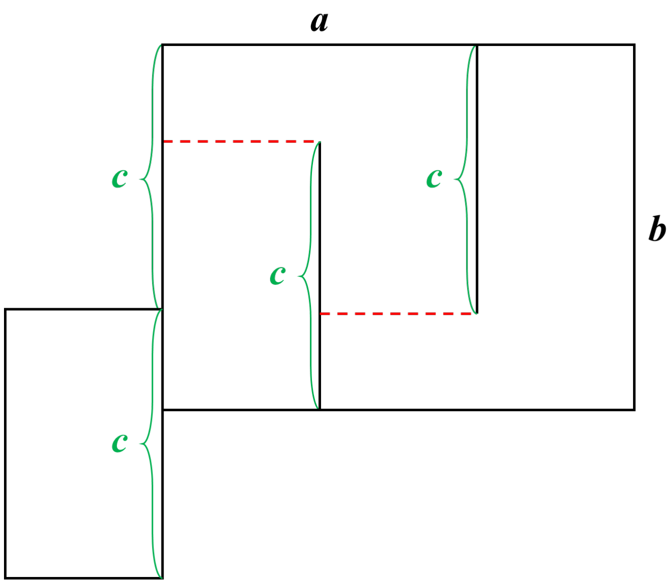


圖 4

請各位讀者不妨再想想：如果我們沿著第二道摺痕繼續摺製，長度會再增加多少？這個結果仍然與 b 無關嗎？

由於第二條摺痕根據資料顯示要摺的是山線，我們不妨把左邊兩個長方形一起向後摺製如下圖 5，請您確認一下跟您想像的圖形與結果是否相同呢？

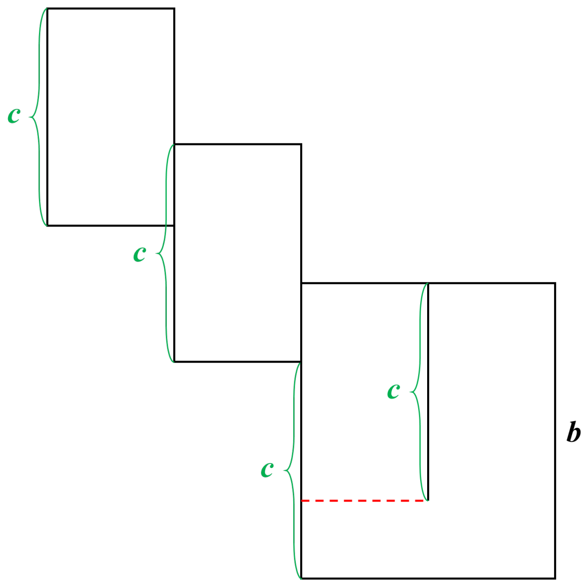


圖 5

其實上圖乍看之下會以為又多了 c，然而當我們仔細再看一次，發現左邊的兩個長方形長度有一段重疊的長度 b-c 後，會發現其結果應該是 3c-(b-c)=4c-b，也就是這個結果會與其原始的寬度 b 有關！

由於我們還有最後一道摺痕（谷線）需要摺製，這次在摺製前，不妨再想一下，其結果會是什麼樣子，長度又會怎麼改變呢？是否可以由前兩次的規律，直接推導出這一

次的結果呢？

在此先稍微岔一下題，也讓讀者們再思考一下上面的結果。其實關於摺紙的問題，有時候很難用教的就會，需要自己多想像、多嘗試錯誤，甚至有張紙張在手邊操作，例如一開始在還沒介紹紙垂的剪痕製作方式前，可以提供不攤開的成品，讓學生猜想或試作看看，使有形的紙張慢慢轉換成自己心裏的紙張，屆時遇到類似或延伸題型時，才有機會舉一反三，這也是筆者此次於年會分享「空間之謎」主題的目的，以及本篇文章以一步一步的方式，手把手帶各位讀者思考的主要原因。

往下翻摺之後，你會發現結果如圖 **6**，不曉得跟您想像的圖形是否相同？圖 **5** 左方的三個全等長方形會沿者最後一條谷線一起向下摺，不曉得您看出來其長度又變為多少了呢？

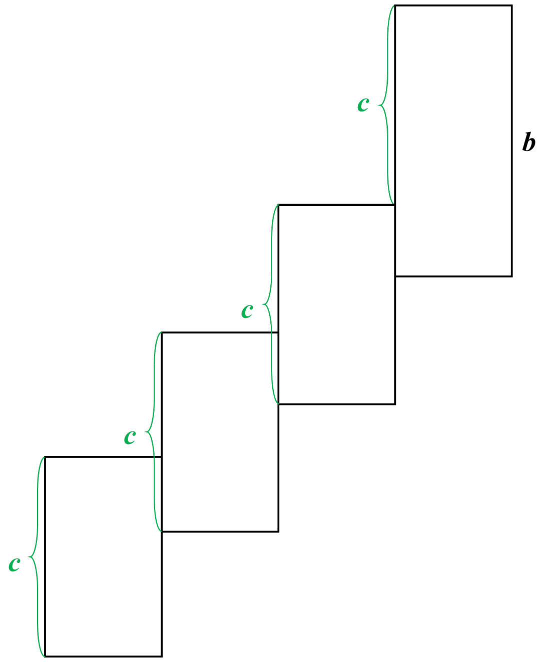


圖 6

明顯我們可以看到，總共有四段 **c** 的長度，其中有兩段 **c** 的長度與之前相同，都重疊了 **b-c**。所以其長度的計算應為：**4c-2(b-c)=6c-2b**，不曉得您的結果是否與之相同呢？

讓我們整理一下目前的所有結果吧！

a1=b，**a2=2c**，**a3=4c-b**，**a4=6c-2b**，不曉得您從這裏看出什麼規律了嗎？

原本以為沒有關聯性的第一項與第二項，在把第三項及第四項分別算出來後，我們發現目前居然成了一個等差數列！其首項為 **b**，且其公差為 **2c-b**。然而如果有第四邊剪痕，按照同樣的方式繼續製作下去，是否仍然會維持這個規律呢？

我們不妨把圖 **6** 換個方式來看！如下圖 **7**，若我們將最右邊的長方形長度 **b** 當作首項（紅色矩形長度），接下來每次增加的長度作為公差（紫色矩形長度），就可以明顯發

現其增加的長度就是 **c-(b-c)=2c-b**，也就是這個作品若有接下來的剪痕，會繼續維持這樣的規律增加長度。

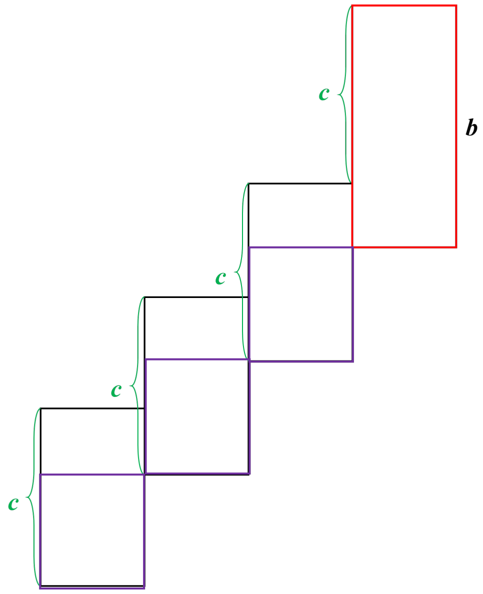


圖 7

接下來還可以討論什麼呢？讓我們回到圖 **1**，發現紙垂的成品是左右對稱的，也就是我們在一開始摺製時，就可以把這個結果考慮進去了。

如下圖 **8**【註 **5**】，這次我們把剛剛所假設實際的長度標上（長度 **16** 公分，寬度 **12** 公分，剪痕無論上下都是 **8** 公分，且每個剪痕的間隔是 **2** 公分），且把紙垂左右對稱的特性一併放入，請各位讀者不妨想想以下幾個問題：

這個紙垂的總長度多少？重疊後的總面積又是多少？

若支撐這個紙垂的幣串長度為 **40** 公分，為了讓這個幣束放在地上不落地，請問可以依同樣規律再多剪幾刀（一上或一下皆稱為一刀），這個紙垂的長度仍不會超過幣串呢？

按照之前的習慣，一樣請各位讀者先想一下，我們再進行後續的討論，剛剛的結果是否可以直接用呢？

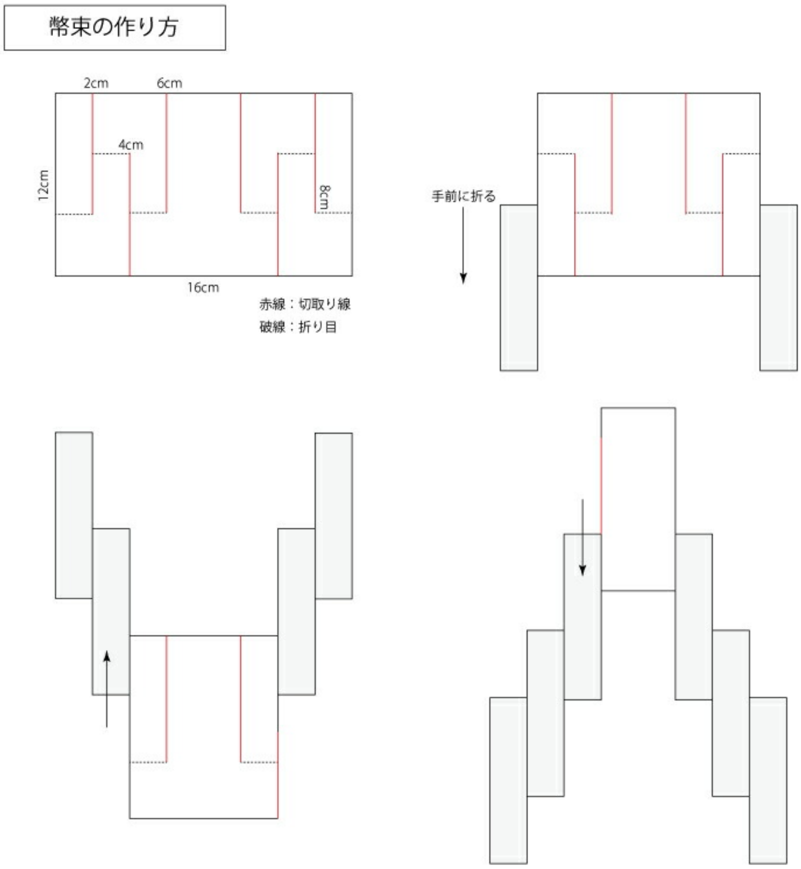


圖 8

問題 **1** 紙垂的總長度容易計算，根據題目給的條件，此時 **b** 的長度為 **12** 公分，**c** 的剪痕為 **8** 公分，可以直接代入公式 $a_4=6c-2b=6\times8-2\times12=24$（公分）。

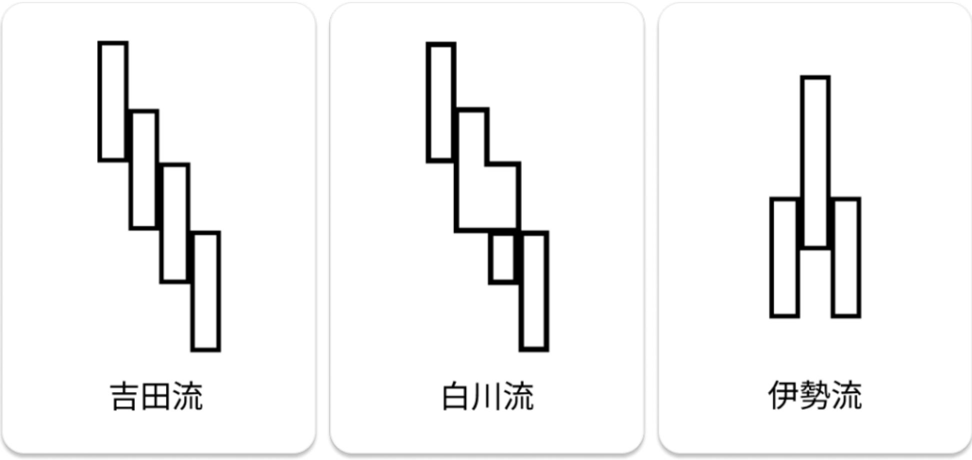
問題 **1** 中紙垂重疊後的總面積是延伸題，目的是看看讀者們是否可以由前面的討論思考出比較迅速或系統式的解法，或是只能一個步驟一個步驟計算其重的面積呢？

我們由題目的已知條件，得知一開始的長方形紙張面積為 $12\times16=192$（平方公分），而圖 **8** 的最後一個步驟完成後，左右的長方形各重疊了三塊，且其面積都完全相等 $=4\times2=8$（平方公分）。故所求 $=192-8\times6=144$（平方公分），不曉得跟您想的方式與計算的結果是否相同呢？

問題 **2** 比較屬於生活中實際的應用，當我們知道幣束的製作方式，也了解其可以延伸性後，就會想要如何使其發揮最大的效用，如何盡可能讓這個幣束的紙條長度更長呢？

既然我們知道這是一個首項為 $b=12$ 公分，公差為 $2c-b=4$ 公分的等差數列，依題意可以列出 $a_n=12+(n-1)\times4<40$ 的結果，解得 $n<8$，也就是最多只能左右各剪 **7** 刀，才能完成題目所需的幣束（剪 **8** 刀會剛好與幣串的長度相同）。

最後，我們再看一下幣束的另一種延伸，根據筆者所查到的資料**【註 3】**，其實幣束的外觀不只一種，如下圖由左至右就有三種不同流派的幣束，讀者們也不妨思考一下或試作看看，三種幣束的製作方式有何不同？又有什麼可以再接著討論的問題呢？**【註 6】**



本文從日本摺紙的第一本出版書談起，並討論其祭祀時所需的紙垂幣串，應用於教學時可以討論的問題與教學方式建議，恰與國二數學目前正在學習的等差數列可以緊密結合。另外承蒙台師大電機系賴以威教授分享「摺紙，科技與藝術的交會點」相關簡報內容，使本文得以成稿，特此致謝。

【註 1】維基百科：秘傳千羽鶴折形
【註 2】維基百科：御幣
【註 3】圖片來源：御幣束とは？｜黒岩春日神社【公式】
【註 4】圖片來源：鏡餅飾り御幣の作り方！簡単に折り紙で作ろう！
【註 5】圖片來源：【楽天市場】【マラソン限定ポイント 5 倍】 御幣立て 紙垂 幣束 幣束立て 3 本神社：神棚の里

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：**https://www.hpmsociety.tw/
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）
孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）
陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！