

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）  
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）  
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
英家銘（清華大學）  
創刊日：1998 年 10 月 5 日  
網址：<https://www.hpmociety.tw/>  
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

## 第二十七卷第四期目錄

(2024 年 12 月)

- 釜山數學文化館紀行……………英家銘
- 數學普及書籍作為 HPM 的進路與反思  
……………楊清源
- 歐拉之前的拉丁方陣……………劉冠明

## 釜山數學文化館紀行

英家銘

國立清華大學通識中心

2024 年 8 月我到韓國釜山、慶州取材兼旅行，其中一個主要目標是「釜山數學文化館」。2022 年秋韓國在疫後首度開放國門時，我是屬於第一波到韓國的國際旅客之一，但當時這個數學文化館還沒開幕。經過近兩年的等待，我終於排出行程到韓國，其中一個目標是這裡。

釜山數學文化館（부산수학문화관）位於釜山廣域市釜山鎮區，在 2022 年 12 月 14 日開幕，2023 年初開始正式營運，這是全韓國以數學為單一主題的博物館中最大的，而這裡的確是筆者參觀過最大的數學博物館，有地下兩層，地上五層，總共 9,884 平方公尺，也就是將近三千坪的樓地板面積，有十分廣大的空間可以做各種各樣的展示與活動。版主去拜訪的那一天是週末，遇到很多父母到小朋友去參加課程，而在外等候的父母可以在那裡的數學圖書館看書、休息。圖書館座位上有插座，所以也可以帶筆電來工作。

館內除了教室、演講廳、數學圖書館之外，有很多塊演講、展覽與動手體驗的空間，內部主要有四個展廳，包含數學遊戲館、進路探索館、教科體驗館，以及一個倒金字塔形的兒童遊戲體驗空間，內容超級豐富。下面有一些照片跟各位讀者分享。



圖一：釜山數學文化館正門



圖二：演講廳，座位旁有許多古代數學家的畫像



圖三：非歐幾何概念展示



圖四：數學圖書館





圖五：中庭的謝爾賓斯基三角形



圖六：用撞球學圓錐曲線的性質





圖七：古代朝鮮算學著作



圖八：兒童體驗空間

釜山數學文化館原則上無論團體或個人都需要預約才能參觀，各位讀者可以點入[釜山數學文化館官網](#)參考他們的展覽與課程內容。

釜山數學文化館地址：부산광역시 부산진구 부전동 376

交通方式：釜山地鐵 2 號線釜岩驛出站，徒步 3 分即達。

# 數學普及書籍作為 HPM 的進路與反思

楊清源

臺北市立永春高中

## 一、接觸 HPM、數學普及書籍的契機

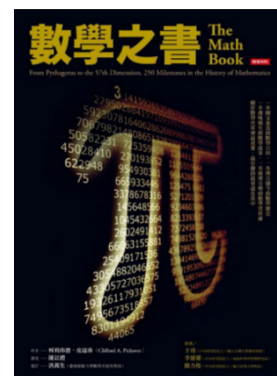
何謂 HPM? 洪萬生教授在 1998 年 HPM 通訊發刊詞上寫道：

是指數學史與數學教學的關聯之國際研究群 (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics)，它隸屬於國際數學教育委員會 (ICMI, International Commission on Mathematics Education)，專門推動數學史在數學教育上的應用工作。簡單地說，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。<sup>1</sup>

從最後一段文字「利用數學史的研究成果，提升數學教師的教學品質與學生的學習成效」，筆者在求學經歷與現今於教學課堂上的實踐，更深刻地體會到數學史在數學學習與教學上的益處，以下將簡述自身求學接觸數學普及書籍的契機，從而引出筆者安排教學活動上希望帶給學生的目標。

圖一為筆者在高中時期第一本擁有的數學普及書籍，作者為柯利弗德·皮寇弗(Clifford A. Pickover)，以數學百科的形式帶領讀者穿梭數學史上二百五十個重大成就，擴展筆者對數學的想像。筆者回顧在大三投稿系上 60 級學長姐獎學金時，曾在閱讀心得中寫下自述數學普及書籍對於自身學習數學的重要性：

學習數學的路上，僅有少數學生知道數學並不止於學校內的知識，而有更深、更廣的內容，可以藉由數學科普書啟發思考，同時對數學歷史的發展有些概念。<sup>2</sup>



圖一

透過數學普及書籍幫助筆者打開視野，看見課堂外的數學世界，擴充原本對數學的公式、系統觀，令筆者不禁思索為何學校不教這些內容，於是，期許自己在教學上能藉由數學普及書籍帶領學生體驗不一樣的數學。

此外，唸大學時，修洪萬生、謝佳叡、英家銘教授合開通識課程《小說與電影中的

<sup>1</sup> 引自洪萬生(1998)，〈發刊詞〉，檢自日期(2024 年 2 月 1 日)。

<sup>2</sup> 此處「數學科普書」與本文「數學普及書籍」意義相同，係指「書籍以數學相關內容為主題，企圖讓讀者感受到數學知識、技能、思想與方法等。」可參考楊清源(2021)，《建構優良數學普及書籍指標》，國立臺灣師範大學數學研究所。



數學思維》，筆者學到「如何實務上透過數學小說與電影，引起學生的學習動機及帶領學生欣賞數學的多元面向，為筆者開設多元選修儲備能量」。這部分在「三、數學普及書籍做為 HPM 的進路」中將詳細說明。

最後，108 數學領綱的訴求：「數學是一種自然語言、實用的規律科學及人文素養」，筆者在教學現場使用數學課本教學的經驗發現，課本各章節相當努力在實踐上述訴求，即便數學普及書籍的內容不能完整的符應某一個數學單元的內容，往往是跨章節、跨學科的知識技能，卻正好能達成「數學是一種自然語言、實用的規律科學及人文素養」，這點便給筆者足夠的信心將數學普及書籍引進課堂。

## 二、數學史、數學普及書籍融入教學之理論基礎

數學史融入教學的研究大部分共同指出對學生學習、教師教學有許多優點，例如：楊淑芬(1992)認為數學史融入教學的目標是「過程中要使大部分學生對數學產生興趣，讓學生去感受數學在人類文化所發揮的功能，經歷一些創造數學樂趣。」，以及，蕭文強(1992)及黃毅英(2005)皆指出數學史融入教學的目標是引起學生學習數學的興趣。最後，洪萬生(1998)認為數學史與數學教育的互動有助提升教師教學品質。

既然數學史在教學上有許多優點，教師準備數學史融入教學的內容時，該抱持何種思考進路融合數學課本與數學史的知識呢？以下援引 Jones(1998)和 Jankvist(2009)在教學上所採取的進路。首先，Jones(1998；轉引自陳玉芬，2006)在 *Historical topics for the mathematics classroom* 的第一章指出：「數學史可視為一種教學工具。……適當地使用它，將它與現代的數學知識與應用連結在一起，那麼數學史會是一個老師如何教出『為什麼』的重要工具之一。」其中，將『為什麼』分成三種類別：

- (1) 時間演進所產生的為什麼：以時間為主軸發展下數學知識的變化。
- (2) 邏輯上的為什麼：歷史能為學生提供大量發展邏輯洞察的能力，因為它包含了公理系統本質的了解、邏輯推理以及定理的證明。
- (3) 教法上的為什麼：是在一種問題中抽絲剝繭後的逆向思考，並藉由歷史中的學習，幫助學生的了解或減少學生所犯的錯誤。

換言之，教師備課時可思考數學知識如何隨時間變化，藉由過去數學家的邏輯論證，呈現當時所遇到的困難及對應的解決方案，從而幫助學生學習數學知識。

次者，Jankvist(2009)將數學史融入教學分成工具(提升情意、學生學習認知)及目的討論，並援引 Niss(2001)的架構，採後設觀點分析三個案例的數學史融入教學教學之目的，案例分別為：錯誤更正碼(The early history of error correcting codes)、資料壓縮(The early history of data compression)、公開金鑰加密與 RSA 加密(The history of public-key cryptography and RSA)，以下為分析架構：

- (1) How does mathematics evolve in time and space?
- (2) What forces and mechanisms cause the evolution of mathematics?
- (3) How does the evolution of mathematics interact with society and culture?
- (4) Can mathematics become obsolete?

綜合兩者，發現數學史融入教學皆著重在數學知識如何促成、如何發展？不過，關於 Niss(2001)的分析架構，筆者在教學上會特別側重(3)，簡言之，除了在數學知識內部的發展外，描述數學知識如何與社會、文化的互動，譬如數學家透過數學著作與達官顯貴的交流，往往能更深刻進入脈絡中體會數學知識對於時人的重要性。這點是筆者深受洪萬生老師開設數學社會史專題，以及，〈數學與明代社會：1368-1607〉的內容所影響。最後，問題(4)指出「數學會過時嗎？」問題直指數學知識的實用性，因為該篇論文的分析案例為近代的數學史，藉由比較「古代數學史」，某層面來說，數學史也能夠推動「數學是一種實用的規律科學」。

既然了解數學史融入教學有其優點，以及，教學上應該側重哪些之後，筆者思考數學史融入教學如何推廣？試想最大的困難點是教師若無受過數學史訓練，對於查閱相關主題二手資料、辨別資料之真偽、轉化成為上課教材，想必增加教師備課的困難度，降低數學史融入教學的意願。

話說回頭，為何要引進數學普及書籍？除了眾多專家學者指出數學普及書籍對教師、學生的優點，例如：

- 英家銘(2004)評論十二本對國高中數學教師的教學或提升專業知能有幫助的數學普及書籍，指出「書籍有助於教師跨領域統整教學、回應學生懷疑數學之必要性、提升教師專業知能，並提供學生從教師身上獲得人格成長與人文素養。」
- 林芳玫、洪萬生(2009)研究指出「數學家傳記可將數學或數學教人性化，降低學生對數學的焦慮或冷漠。」
- 楊清源(2021)整理數學小說在課堂上實踐的教育功能有「降低學生學習數學的焦慮並提升動機，得以鼓勵學生用數學思考，並反思社會如何察覺數學。」

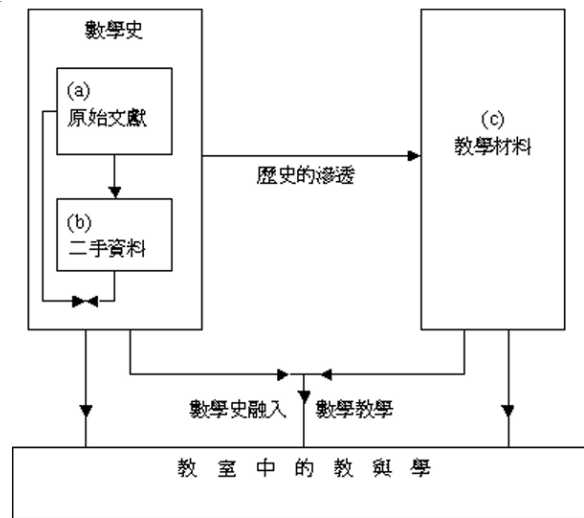
對教師更重要的優點是，根據筆者的研究指出數學普及書籍中有一類書籍為「數學知識演化史類」中的子類別「HPM 參考書籍」，<sup>3</sup>是指「數學史融入數學教育，以提升數學教師之教學品質與學生的學習成效」，透過具備數學史及數學教育素養的學者所撰的書籍，想嘗試數學史融入教學的教師更容易「查閱相關主題二手資料、辨別資料之真偽、轉化成為上課教材」。

---

<sup>3</sup> 可參考楊清源(2021)，〈建構優良數學普及書籍指標〉，國立臺灣師範大學數學研究所。頁 28。



最後，筆者認為「數學普及書籍作為 HPM 的進路」可參考洪萬生(2006)運用數學史教學的架構」，不妨將數學普及書籍中「數學知識演化史類」的書籍視為二手資料。甚至是將其子類的「HPM 參考書籍」視為教學材料，進而運用融入在教學當中。



圖二

### 三、數學普及書籍做為 HPM 的進路

為完整說明圖二的架構，以下僅以「國中區域衛星方案」的課程投影片呈現數學普及書籍實際上如何協助數學史融入教學。

(一) 主題	中西數學交流的見證：以費波那契的著作為例
(二) 時間	2-3 小時
(三) 教學目標	介紹商人兼數學家費波那契及其數學著作，在國家與社會、人群的移動與交流扮演的角色相當多元，既可以做為知識的生產者，亦可作為知識的傳播者，並且除了數學知識有其具體應用，進一步將數學知識作為禮物性質的籌碼，對其階級身分的做交換，徹底展現數學與社會有著深刻的關聯。
(四) 內容摘要	<ol style="list-style-type: none"> <li>費波那契的生平與費氏數列 <ol style="list-style-type: none"> <li>回顧費波那契的生平與數學上對後世的影響</li> <li>大自然中的費氏數列與黃金比例</li> </ol> </li> <li>費波那契著作《計算之書》及其現代意義 <ol style="list-style-type: none"> <li>百雞問題(不定方程)</li> <li>韓信點兵、物不知數(同餘方程)</li> <li>以百雞問題及物不知數問題，比較中、西方解法及其社會意義</li> </ol> </li> <li>費波那契《實用幾何》及其在中西發展的差異 <ol style="list-style-type: none"> <li>土地丈量問題</li> <li>圓周率</li> <li>以土地丈量及圓周率，比較中、西方進展。</li> </ol> </li> </ol>
(五) HPM 參考書籍	《當數學遇見文化》、《溫柔數學史》、《窺探天機：你所不知道的數學家》、《數學起源》、《數學故事讀寫說》、《數之軌跡》

因為國中區域衛星方案的對象為國中資優班學生，講述內容從課堂上的數學知識做延伸，多講述其數學史，約 2-3 小時的內容。

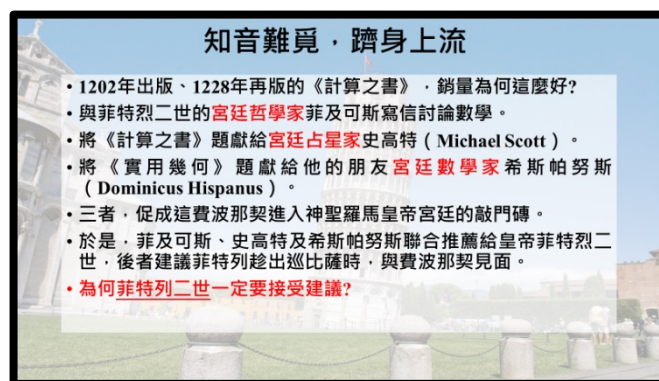
數次演講的經驗歸納，教材設計的準備順序是「了解學生的先備知識、找尋相關的數學史內容、根據時間長度、學生程度及興趣衡量數學史內容」。以下將從「費波那契的生平與費氏數列」、「費波那契著作《計算之書》及其現代意義」、「費波那契《實用幾何》及其在中西發展的差異」三個主題分別說明教材與圖二架構之間的對應。

## 1. 費波納契的生平與費氏數列

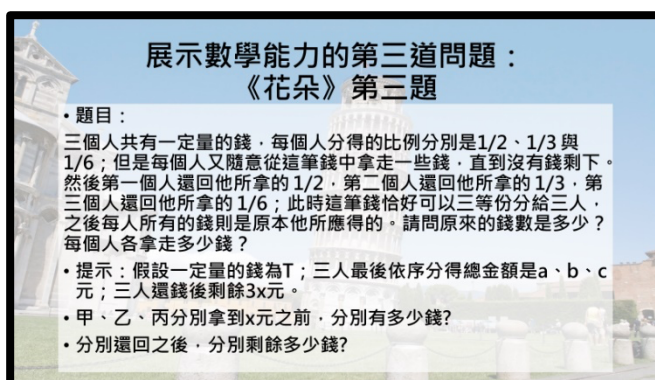
本節希望向學生傳達費波納契的生平與著作，本節主要參考二手資料《窺探天機》、《數字人》、《數學起源》、《喚醒大腦裡的數學家》，為了讓學生在課堂中有參與感，從上述書籍挑選數學問題讓學生搶答，例如：《花朵》第三道問題、羅馬數碼與印度-阿拉伯數碼的轉換、費氏數列與黃金比例。以下面三張投影片補充說明。



圖三



圖四



圖五

## 2. 費波納契的著作《計算之書》與其現代意義

本節介紹費波納契的著作《計算之書》，根據書籍的結構、前言、背景及題目，說明書籍對當時歐洲商人的意義，反思課堂所學的數學如何應用於生活，為此，主要參考原始資料：《計算之書》；二手資料：《Mathematics Education in the European Middle Ages》、《The Algorists vs. The Abacists: An ancient controversy on the use of calculators》、《西去東來：沿絲綢之路數學知識的傳播與交流》、《溫柔數學史》、《從麵包到蛋糕的追求：歐洲經濟社會史》，同時挑選《計算之書》的題目除了讓學生思考如何用現代數學符號列式、解題之外，更深刻認識《計算之書》題目



之實用性。以下面三張投影片補充說明。

### 計算學校(*Abaci school*)

- 圖中兩位男子，珠算師(abacist)、算法師(algorist)，何人得意洋洋?何人愁容滿面?
- 在14世紀上半葉的佛羅倫斯，有一成的商人及貴族在孩子10-11歲會送至計算學校，在14歲時，送孩子去貿易公司，少部分則送他們出國從事國際貿易，如同費波那契。
- 「佛羅倫斯人，人手一支筆」
- 計算師傳採用的書籍以帕西奧利《算術、幾何及比例性質之摘要》的延伸教材。



圖片來源: *Magistra Philosophica*

圖六

### 利息(interest、usurae)

A certain man gave one denaro at **interest** so that in five years he must receive double the denari, and in another five he must have double two of the denari and thus forever from 5 to 5 years the capital and interest are doubled. It is sought how many denari from this one denaro he must have in 100 years.

- 題意?解法?

圖七

### 商人與利息對中古歐洲社會的正反立論

3.商人出生的神學家與教士為利息正當化：

機會成本：暫時借別人錢，損失自己投資的金額。

時間屬於個人：15世紀發明機械鐘，使人們認為時間屬於個人，可以自我掌控，不再屬於上帝。

錢幣屬於商品：會隨時間地點改變，因此中間會有差距，需要補償。

貧窮的看法改變：在13、14世紀之前，貧窮被視為對上帝虔誠的表現；黑死病過後，認為貧窮是因為自身不工作，不努力的後果，至此出現歐洲強調勤奮的工作倫理。

銀行的出現：銀行提供禮物贈予客戶，也提供匯兌、貸款服務。

圖八

### 3. 費波納契的著作《實用幾何》與其在中西發展的差異

本節介紹費波納契的著作《實用幾何》，比較該書與東西方如何證明/說明圓面積公式，主要參考原始資料：《實用幾何》、《九章算術》；二手資料：《數學珍寶》、《溫柔數學史》，展示費波納契、阿基米德、劉徽的思路，幫助學生看見一個基礎的圓面積公式因不同時空、文化而有不同證明想法。以下三張投影片補充說明。

### 《實用幾何》(*Practica Geometriae*)

- 價值
- 「算術和幾何彼此相關並互相倚重，倘若沒有相應的幾何知識，亦或缺乏洞悉數字運算而不知怎樣循此途徑融入幾何，那麼所有關於數的知識都無法被充分表述。本書所述方法充滿著證明和闡釋，它們多以幾何圖形構成。事實上，在另外一本書關於幾何應用的書中，我就解釋了它們與幾何的關聯，每個題目都給出了相應的證明。」---《計算之書》前言

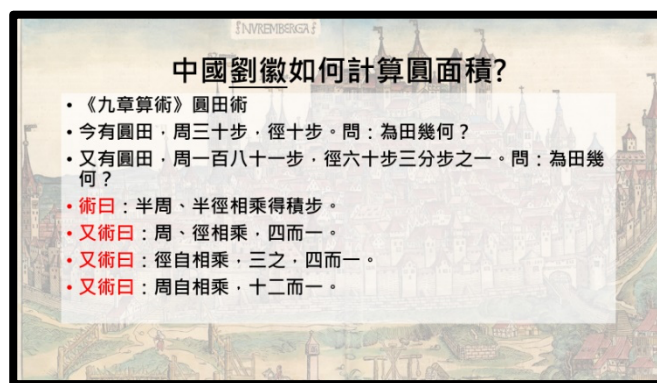
圖九

### 費波那契如何證明圓面積公式?

- Hughes(2008)指出費波那契可能參考Banū Mūsā(9c.)《On Geometry》。
- [191]: 證明圓面積 = 半周半徑。



圖十



圖十一

從上述三個部分，筆者運用數學知識演化史類書籍、作為數學史文獻中的二手資料(b)，為了製造課程的學習動機，再尋找相關主題二手資料(b)，及原始文獻(a)，進行比較、挑選合適的片段進而轉化成為上課教材(c)。

#### 四、教學省思

對筆者來說，數學史融入教學的目標是提供學生不同以往數學課堂的風貌，藉由數學科普書簡化教師備課時間，同時亦能在課堂上直接運用，達到數學知識普及。特別是，上課時筆者觀察到學生雙眼發亮、仔細聆聽數學知識在歷史上如何被發明/發現，是帶給筆者莫大的鼓勵，撇除原始資料、二手資料轉化成教學材料所花費的時間沒有白費。能找到對數學史也有興趣的學生，讓筆者更加倍努力做數學史融入教學。以下簡述筆者使用數學史融入教學遇到的「困難與解決方法」。

筆者在準備教材時，時常遇到三個問題：

1. 如何辨別二手資料的真偽？
2. 如何還原時空背景給不熟悉的學生？換言之，社會史要補充到多深入？
3. 數學史融入教學的主軸是數學還是歷史？

關於問題 1，筆者透過參考數學史專業書籍，如 Katz《數學史通論》，杜石然主編《李儼、錢寶琮：科學史全集》，然而對於一位想嘗試數學史融入教學的教師而言，如此的方式在備課上負擔加重，因此，凸顯數學普及書籍的重要性，運用 HPM 參考書籍中的內文及腳註，便可大大降低辨別二手資料真偽的壓力。

關於問題 2，筆者會考量講題時間長度，選擇貼近學生生活經驗或者深刻的例子，這些例子的取材會來自大學時修課「小說與電影中的數學思維」中所欣賞的電影、書籍等，或者，也會補充近期看到的書籍內容，例如：在準備講題前，剛好閱讀阿部謹也《哈梅恩的吹笛人》，筆者便將書的情節以說故事方式，介紹 13 世紀的德國社會背景，還原中世紀歐洲的商人給學生理解。若同時有書籍和電影都可還原時代背景，筆者建議撥放電影的片段，更能讓學生身臨其境。



關於問題 3，根據過往筆者的經驗，因為時間掌握不好，讓學生流於茫茫的社會史中，無法讓學生的精神聚焦課堂上。筆者的淺見是「在社會史的脈絡下解題、思考數學」是必要的，因此，主軸仍是數學知識，後來筆者認為數學史融入教學的主要策略，「透過社會史還原數學知識被發現的需求，進而引起學生學習動機，以及，看見數學知識間的連結。」經調整比例後，學生上課也愈加投入。

此外，除了學生在課堂上有收穫，筆者在備課時，閱讀不同文獻，往往會發現意想不到的連結，進而獲得研究靈感。筆者認為師生在數學史融入教學中能夠培養「數學洞察力或歷史洞察力」，恰好呼應德福林(Devlin)《數學的語言》的英文標題「The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible」。最後，對想嘗試數學史融入教學的教師，希望上述淺見能提供您一點指引、建議與信心。

## 參考文獻

- Jankvist, U. T. (2009). "History of Modern Applied Mathematics in Mathematics Education", for the learning of mathematics, 29(1), 8-13
- Ying, Jia-Ming (2004). "A Critical Review on Popular Math Publications in Taiwan", In W.-S. Horng, Y.-C. Lin, T.-C. Ning & T.-Y. Tso (eds.), Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference, National Taichung Teachers College, pp. 169-188.
- 林芳玫、洪萬生(2009). 〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉，《HPM 通訊》12(11)：1-11。
- 洪萬生(1998). 〈發刊詞〉，《HPM 通訊》1(1)：1。
- 洪萬生(2006). 《此零非比 0：數學、文化、歷史與教育文集》，臺北：臺灣商務。
- 陳玉芬(2006). 從 HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材。國立台北教育大學數學教育研究所碩士論文。
- 黃毅英(2005). 〈把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？〉，《HPM 通訊》8(10)：1-9。
- 楊淑芬(1992). 〈數學史在數學教育中的重要性〉，《數學傳播》16(3)：16-22。
- 楊清源(2021). 建構優良數學普及書籍指標，國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 楊清源(2023). 〈中西數學交流的見證：以費波那契的著作為例〉，發表於臺北市立瑩橋國中資優數學營，2/06/2023，臺北：臺北市立瑩橋國中。
- 蕭文強(1992). 〈數學史和數學教育-個人的經驗和看法〉，《數學傳播》16(3)：23-29。

# 歐拉之前的拉丁方陣

劉冠明

國立陽明交通大學應用數學系碩士班研究生

拉丁方陣 (Latin Square) 的最早起源，眾所周知是 18 世紀極富盛名的大數學家——歐拉 (Leonhard Euler, 1707-1783)——在 1776 年發表的論文中討論正交拉丁方陣的性質，論文中給出最大的正交拉丁方陣是  $5 \times 5$  的方陣。令人意外的是遠在東北亞的朝鮮半島卻在 1700 年前後，由朝鮮王朝數學家崔錫鼎所執筆的《九數略》一書中，已經出現  $9 \times 9$  的正交拉丁方陣了。毫無頭緒地，作者並沒有交代如何找到這個方陣，以及造這個方陣的動機，僅用「河洛變數」四字稱呼。更甚者，這本數學書中隨處可見朱子學色彩的用詞，為其添上一層神秘的面紗。以下我們分別介紹歐拉與崔錫鼎的拉丁方陣。

## 一、歐拉的拉丁方陣

拉丁方陣在生活中的應用十分廣泛，數獨便是一個分支，不過拉丁方陣的定義再寬鬆些。

定義 1：在  $n \times n$  的方陣中，填入  $n$  個相異的元素，並且其中的每一行與每一列，各元素皆恰出現一次，稱此方陣為拉丁方陣。

定義 2：現在有兩個  $n$  階的拉丁方陣  $L = [l_{ij}]$  與  $M = [m_{ij}]$ ，考慮有序對所形成的集合  $\{(l_{ij}, m_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}$ ，若這  $n^2$  個元素完全相異，則稱  $L$  與  $M$  正交 (orthogonal)。

舉例來說：當  $L =$

0	1	2
1	2	0
2	0	1

， $M =$

0	1	2
2	0	1
1	2	0

，那麼  $L$  與  $M$  正交。

我們先來看一看著名的 16 卡牌問題 (16 cards problem)。18 世紀時，人們考慮將撲克牌中的 16 張大牌 (court cards) A、K、Q、J 放入  $4 \times 4$  的方格中，使得每一行、每一列不重複出現相同的花色與點數。這樣的問題在 1723 年被解出，顯而易見地，圖(一)是該問題的一組解。

♠ A	♥ K	♦ Q	♣ J
♦ K	♣ A	♠ J	♥ Q
♣ Q	♦ J	♥ A	♠ K
♥ J	♠ Q	♣ K	♦ A

圖一：16 卡牌問題的一組解

歐拉花了約莫十年的時間思考，提出著名的 36 軍官問題 (36 officers problem)，將撲克牌中的四種花色與點數，擴增為六種軍種與官階，希望填入  $6 \times 6$  的方格中，能讓每

一行、每一列不重複出現相同的軍種與官階，但這個問題就相對不這麼容易了。在一番努力與嘗試後，儘管無法給出嚴謹的證明，歐拉在 1782 年指出這樣的安排是不可能的。直至 1901 年，法國數學家 Gaston Terry 才證明了其不存在性。我們用數學的語言說明，其實就是想找到兩個  $n$  階互相正交的拉丁方陣，上述的 36 軍官問題，即考慮  $n=6$  的情況。然而，歐拉在 18 世紀時猜想（Euler conjecture）當  $n \equiv 2 \pmod{4}$  時，大概是不可能的。出乎意料的是，1959 年 Martin Gardner 在 Scientific American 雜誌上造出  $n=10$  的互相正交拉丁方陣，隔年三位數學家 Bose, Parker, Shrikhande 證明了 10 以上的也都可以造得出來。

我想歐拉的猜想倒不是空穴來風，由一些簡單的代數性質大概可以看出端倪：

定理 1：當  $n$  是質數次冪（prime power）時（ $n \geq 2$ ），會存在  $n-1$  個  $n$  階互相正交的拉丁方陣。

定理 2：若  $L_1$  與  $M_1$  為  $m$  階互相正交的拉丁方陣，且  $L_2$  與  $M_2$  為  $n$  階互相正交的拉丁方陣，則存在至少兩個  $m \times n$  階的拉丁方陣互相正交。

定理 1 的證明，對有學過代數學的讀者而言，大概可以聯想，當  $n$  是質數次冪時，會存在  $n$  階的有限體（finite field），再利用平移與伸縮的方式，可以造出  $n-1$  個互相正交的拉丁方陣。而定理 2 只需藉助方陣克羅內克積（Kronecker product）的構造再加添一些巧思，便可理解。由於上述兩個定理的證明，不是本文的重點，請容我輕描淡寫的帶過。

有了這兩個定理，如此一來便可找到  $p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \cdots \times p_n^{k_n}$  階的互相正交拉丁方陣，其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  皆為大於 2 的質數。那麼就只剩下  $n=2m$ ，其中  $m$  為奇數的情況了，這樣看一看，也不是無法想像歐拉為什麼會那麼猜想了。

## 二、崔錫鼎的「拉丁方陣」

雖然現在回頭看拉丁方陣的發展，似乎不會覺得太難，可是在 18 世紀是非常重大的突破，也因此影響了後面的組合學，尤其是組合設計這個分支。當我們用歐洲數學發展的這套符號與思維，解讀歐拉的思路，應該能感覺的到合情合理。不過 18 世紀初，甚至更早，東北亞的朝鮮王朝，竟然也出現了酷似拉丁方陣的東西，而崔錫鼎竟用「九九母數變宮陽圖」描述這個神奇的玩意兒，這可有趣了！





圖二：崔錫鼎「九九母數變宮陽圖」

上圖是筆者翻拍《九數略》的一頁，文書寫法與現在不盡相同，底下筆者用我們熟悉的符號來呈現。

(5,1)	(6,3)	(4,2)	(8,7)	(9,9)	(7,8)	(2,4)	(3,6)	(1,5)
(4,3)	(5,2)	(6,1)	(7,9)	(8,8)	(9,7)	(1,6)	(2,5)	(3,4)
(6,2)	(4,1)	(5,3)	(9,8)	(7,7)	(8,9)	(3,5)	(1,4)	(2,6)
(2,7)	(3,9)	(1,8)	(5,4)	(6,6)	(4,5)	(8,1)	(9,3)	(7,2)
(1,9)	(2,8)	(3,7)	(4,6)	(5,5)	(6,4)	(7,3)	(8,2)	(9,1)
(3,8)	(1,7)	(2,9)	(6,5)	(4,4)	(5,6)	(9,2)	(7,1)	(8,3)
(8,4)	(9,6)	(7,5)	(2,1)	(3,3)	(1,2)	(5,7)	(6,9)	(4,8)
(7,6)	(8,5)	(9,4)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,9)	(5,8)	(6,7)
(9,5)	(7,4)	(8,6)	(3,2)	(1,1)	(2,3)	(6,8)	(4,7)	(5,9)

圖三：現代符號表示的崔錫鼎拉丁方陣

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

顯而易見  $A$  與  $B$  是 9 階的互相正交拉丁方陣，而《九數略》中記載的正是將這兩個方陣之對應元做有序對的結果，如圖三。

崔錫鼎想出了這個有趣的拉丁方陣，那他到底是何許人呢？

朝鮮王朝的史料中，太祖實錄／二年（1393）／卷四 七月至十二月／冬十月／27 日／段 294：「設六學，令良家子弟肄習。一兵學，二律學，三字學，四譯學，五醫學，六算學。」各學科的確立，旨在培養各領域的專業人才，由此可見算學在此時期是一個國家重視的學科，僅次於醫學之後。身為兩班階層的崔錫鼎，靠著對數學的天賦與敏銳度，潛心投入浩瀚的數學世界，並在有生之年，完成《九數略》的大作。

崔錫鼎出生於朝鮮王朝的兩班家族，是政治官、文學家也是數學家。從爺爺崔鳴吉曾參與仁祖反正，並於仁祖在位時擔任領議政，便可看出其家世顯赫。下方以表格方式整理崔錫鼎生平的重要事件（川原秀城，2010：119-120）：

表一：崔錫鼎生平發生之重要事件及其年份

年份	西元	年齡	事件
顯宗 7 年	1666	21 歲	進士考試榜首
顯宗 12 年	1671	26 歲	庭試文科丙科及第
肅宗 23 年	1697	52 歲	初任右議政
肅宗 27 年	1701	56 歲	擔任領議政（行政官僚最高位）
			因反對禧嬪張式的處刑，被流放到鎮州
肅宗 28 年	1702	57 歲	再次擔任領議政（多次）
			擔任少論領袖（西人黨爭--老論 vs 少論）
肅宗 36 年	1710	65 歲	兼任內醫院都提調
			因開藥有誤而遭罷職
肅宗 37 年	1711	66 歲	恢復官職
			返鄉與家人同住
肅宗 41 年	1715	70 歲	逝世
景宗 2 年	1722		追封諡號為「文貞」

朝鮮王朝實錄（肅宗實錄／十一年（1685）卷十六／六月／3日／段 98139）：

九萬言：「崔錫鼎文詞經學，今世無出其右。今當講《易》之時，尤不可無此人。」  
吏曹判書呂聖齊，繼陳：「錫鼎文學，通朝所知。臣方欲擬副學而無其人，宜加敘用。」上終不許。

南九萬是崔錫鼎的老師，對崔在文學方面的才幹讚譽有加，給他非常高的評價，尤其「今當講《易》之時，尤不可無此人。」這句，更顯現出崔錫鼎乃易學界的巨擘，這非常直接地影響其寫作風格與哲學觀。

酷似拉丁方陣的「九九母數變宮陽圖」出現在《九數略》中，這雖是一本數學書，不過細讀會發現處處跟易經密不可分，這可能跟朝鮮王朝長時間重視朱子學的儒學思想有關。從目錄看來，可分為數原、數名、數位、數象、數器、數法以及附錄，我們隨意瀏覽數原的部分：

數原第一。數生於道，原者，數之本也，所以本始而生數者也，物它有本，故數源為首。易大傳曰：天一地二天三地四天五地六天七地八天九地十止，集合圖之數也。尚書洪範傳曰：初一次二次三次四次五次六次七次八次九止，即洛書之數也，河圖為體，故始於一而終於十，洛書為用故云：其十而止於九，數之大原出於此。邵子曰：大衍之數其算法之原乎。子曰：亦有太極是生兩儀，兩儀生四象又曰參天兩地而倚數，按太極者，一也，一生二，二生三，參兩而數立矣，邵子曰：太一者數之始也，太極者道之極也其此之謂乎。

從這段文字中，可以看出滿滿的易學色彩，崔錫鼎引用了《易大傳》、《尚書洪範傳》和《邵子》的觀點來闡述數的重要性極其深遠影響，由此淺談數之起源和其在宇宙中扮演的角色，強調數字在宇宙萬物生成和運行中不可或缺的地位與功能。也許在現代人的眼中，無法苟同這種數的哲學觀，不過卻能看出崔錫鼎的思想確實被朱子學深深影響著。

再者《九數略》中的「統論四象」將加減乘除和易經中的四象——太陽、太陰、少陽、少陰巧妙的結合，並冠上日月星辰的字眼，再搭配四象變數的正之正、正之變、變之正、變之變，將數學問題分為十六大類，把九章算數的「九章」用其觀點做分類。這種作法不但有數學的技術，更兼具藝術的風格，將古有的算書組織化、系統化，是一種形而上的哲學觀（川原秀城，2010：137）。

### 三、結語

拉丁方陣是數學組合學中的一個重要概念，其演變和應用範圍極為廣泛。從歐拉的正交拉丁方陣到朝鮮王朝數學家崔錫鼎在《九數略》中的「九九母數變宮陽圖」，我們得以窺見東西方的數學在不同文化背景下獨立發展，卻有殊途同歸之妙。歐拉的研究為組合設計理論奠定了基礎，而崔錫鼎將哲學與數學相結合，從易經的角度闡釋數學，展現



出對數學之美的深刻體悟。無論是歐洲的理性演繹還是東方的哲學觀，都在數學的探索中留下了深遠的影響。概覽拉丁方陣的發展脈絡後有感，數學不僅是科學的語言，更是文化與思想的橋樑，在時代的演進中，不斷豐富人類的智慧財富。

## 參考文獻

- Bose, R. C., Parker, E. T., and Shrikhande, S. S. (1960). "Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture", *Canad. J. Math.* vol.12 189-203.
- Lih, K. W. (2010). "A remarkable Euler square before Euler", *Mathematics Magazine*, 83(3), pp.163-167.
- Song, H. Y. (2008). "Choi's orthogonal latin squares is at least 67 years earlier than Euler's", A presentation to the 2008 Global KMS Conference, Jeju, Korea.
- 川原秀城(2010). 《朝鮮数学史：朱子学的な展開とその終焉》，東京：東京大學。
- 朱立熙(2003). 《韓國史：悲劇的循環與宿命》，臺北：三民書局。
- 洪萬生主編、英家銘協編(2024). 《數之軌跡II：數學的交流與轉化》，臺北：三民書局。
- 國史編纂委員會編(1973). 《朝鮮王朝實錄》，首爾：探求堂。
- 崔錫鼎(1715?). 《九數略》，收入金容雲主編(1985)，《韓國科學技術史資料大系－數學篇》，首爾：驪江出版社。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 [suhy1022@gmail.com](mailto:suhy1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhy1022@gmail.com](mailto:suhy1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpmsociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）

孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）

陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）

林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！