

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：<https://www.hpsociety.tw/>
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十七卷第三期目錄

(2024 年 9 月)

- 2024 HPM 會議紀行……………英家銘
- 樸實無華的幾何知識饗宴
……………洪萬生
- 《生活中的數學魔法：動手做幾何，
激發數感能力》自序……………陳玉芬
- 孔子開過補習班教數學嗎？
……………林倉億

2024 HPM 會議紀行

英家銘

國立清華大學通識教育中心/歷史研究所

2024 年 7 月 1 – 5 日，筆者到位於澳洲雪梨的新南威爾斯大學（University of New South Wales, Sydney, Australia）參加 2024 年數學史與數學教育國際會議（HPM），這是筆者繼 2016 年法國蒙彼里耶（Montpellier）之後，第二次參與 HPM 會議。2016 年臺灣有多位學者參與盛會，當時本刊還出了一期「2016 Montpellier HPM 專輯」（第二十卷第一、二期合刊，2017 年 2 月）。2020 年的 HPM 會議原本預定在澳門舉辦，但因為疫情的緣故改為線上演講，沒有實體的學術研討會。這次會議地點在澳洲雪梨，地理上對西歐與北美國家來說幾乎接近地表球面上的對蹠點（antipodal point），距離十分遙遠，而相對來說亞太地區的國家就比較近，所以原本大家預期會有較多亞洲學者參與，歐美學者較少。但實際會議在籌備的過程中，似乎也遇到一些預料之外的問題，使得無論歐美或亞太地區的參加者都相對較少，最後是一個大概五十位國際學者參與的小型國際會議。



圖一：2024 HPM 會議地點新南威爾斯大學

這次的主辦人屬於新南威爾斯大學數學與統計系，他們在系館門口的展示區就有很多跟 HPM 相關的物品，例如曲面的模型與巴比倫泥版的複製品。會議因為僅有約五十位學者參加，以一般綜合大學數學系規模的教室與交誼廳來說，空間上算是十分適合。



圖二：新南威爾斯大學數學與統計系系館門口展示區的巴比倫泥版複製品

這次會議歐美學者來得不多，各國主要的 HPM 研究者都僅有數名參加，亞太地區很可惜這次也因為各種原因參加者較少，中國有三名研究生參加，日本有一位數學教育研究者參加，韓國這次完全沒有參與者，新加坡有一位，而我們臺灣雖然也有一些 HPM 研究者，但參加人數不如 2016 年的 HPM 會議，這次僅有我參加。洪萬生教授本來有意參與，但因為差不多同時間在德國黑森林有另一場數學史的會議必須參加，只好放棄這次會議。這次會議的主題是「Mathematics of Australia and the Indo-Pacific」，所以相對來說有較多澳洲、紐西蘭的學者參與。比較特殊的是，這次有巴布亞紐幾內亞的學者參與。澳洲學者長期與巴紐學者在各方面有研究合作，包含民族數學與數學教育，這次也有澳洲與巴紐學者發表關於這方面的論文。



圖三：澳洲與巴布亞紐幾內亞學者發表關於巴紐民族數學與數學教育的研究

這次會議我個人發表的論文是關於大學數學文化通識課程對大學生數學信念的影響，研究結果未來將會在適當的期刊出版。會議中唯一的日本學者發表的內容不意外地跟和算有關，內容是和算「宅間流」與「關流」有使用不同的代數符號表示法，而「至誠贊化流」是關流的支流，使用相同符號，這個流派的《淇澳集》有提到一些數學學習的方法，這些內容都可以作為未來筆者研究和算的參考。

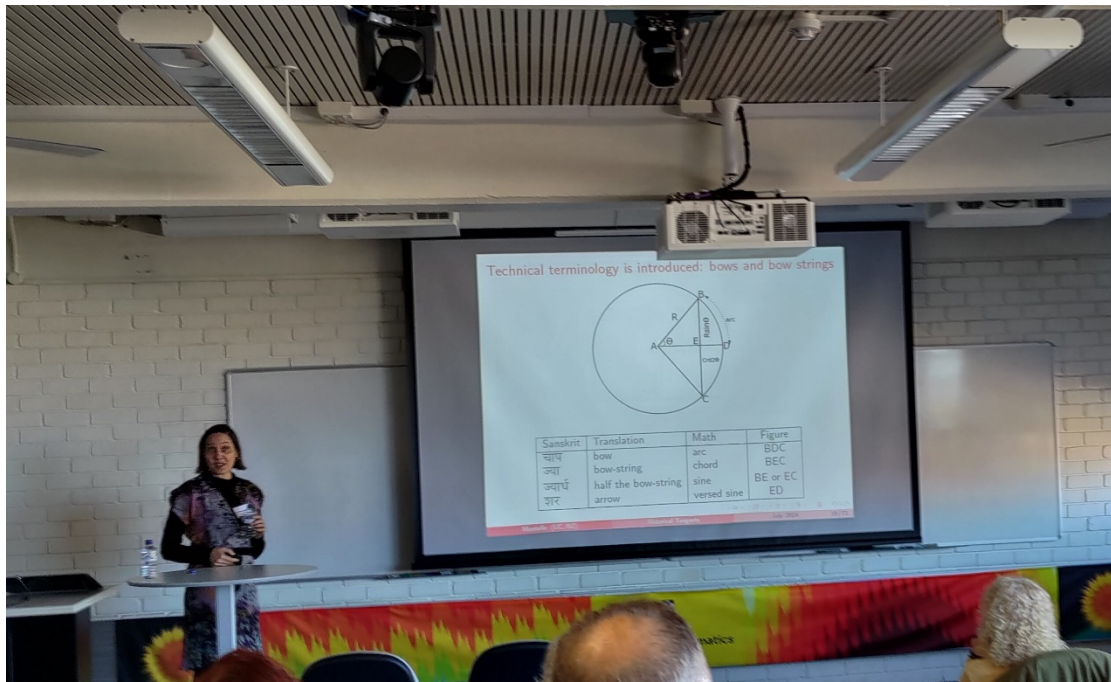
這次會議的大會演講有請到包含澳洲和紐西蘭各一位女性的數學家分享，澳洲數學家分享的是在澳洲的女性數學從業人員地位的改善。在性別平權這方面，其實澳洲、紐西蘭是全世界名列前茅的國家。全世界最早讓女性可以參與投票的國家，是 1893 年的紐

西蘭，而南澳大利亞在十九世紀末是全世界最早讓女性可以成為候選人的領地之一。澳洲現在有很多鼓勵女性參與科學與數學學習的計畫，包含鼓勵女性從事數學與計量金融研究的 **Hypatia Scholarship**。我們東亞國家在鼓勵女性從事數學與科學研究及工作的部分，其實政府也有很多輔助措施，但不容易突破的是社會的刻板印象，這一點或許我們臺灣 HPM 學者可以再思考有什麼能做的地方。



圖四：澳洲學者分享女性在澳洲數學界的發展

這次大會演講邀請到的紐西蘭學者 **Clemency Montelle** 是位有趣的人物，她是布朗大學數學史研究所（就是那個傳說中全世界少見專門研究數學史的研究所）的博士，現任紐西蘭坎特伯雷大學（**University of Canterbury**）數學與統計系主任，主要研究領域是印度數學史，這次演講的內容是印度數學中的正弦表。**Montelle** 教授過去有一位博士生研究和算，她們曾經受到紐西蘭政府資助，在京都北野天滿宮奉納算額，是史上第一組在日本奉納算額的外國人。當然，這次與會的日本學者和我有一起去告訴 **Montelle** 教授我們是和算研究者，認識她的學生，也到北野天滿宮看過他們奉納的算額。



圖五：紐西蘭學者 Clemency Montelle 關於印度正弦表的演講

本次會議美國 HPM 團隊分享將數學史融入大學數學教學的線上公開素材，其實頗適合臺灣數學雙語教學與 IB 課程，另外也有美國學者開發使用 GeoGebra 進行中學代數、大學複變與線性代數圖像化的教材，內容十分有趣而且能夠幫助學生將數學與文化或圖像連結，這些內容可供國內 HPM 研究與教學者使用，相關連結請見文末。

這次小而精緻，五天的 HPM 會議在各學者充分交流的過程中結束，大家相約四年後再見。HPM 會議通常會配合四年一度的國際數學教育會議（ICME），在差不多的時間，在相同或鄰近的城市舉行，這次兩個會議都在雪梨進行，下次 2028 ICME 預定在捷克首都布拉格舉行，所以 HPM 應該也會在東歐的某個城市舉辦，希望下次臺灣的 HPM 工作者會有更多人參加。



圖六：鳥瞰雪梨歌劇院

【相關連結】

HPM2024 官方網站：<https://hpm2024.sciencesconf.org/>

Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources (TRIUMPHS，內有數學史融入大學與中學數學教材)：

<https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs/>

MAPPING DIAGRAMS: FUNCTION VISUALIZATION (以 GeoGebra 呈現函數對應圖像)：<https://www.geogebra.org/m/hewfgxum>

樸實無華的幾何知識饗宴

洪萬生

臺灣數學史教育學會名譽理事長 / 臺灣師範大學數學系退休教授

推薦陳玉芬的《生活中的數學魔法：動手做幾何，激發數感能力》。

這本數學普及書籍的問世，在臺灣的科普出版界，一定是非常值得註記的插曲。這是因為作者陳玉芬老師在本書中，為讀者鋪陳了「老少咸宜」的幾何驚奇，讓擁有數學經驗的「老者」，以及還在直觀摸索的「少者」，都能獲得深刻的啟發。尤其對於後者來說，儘管本書有些題材尚屬「陌生」，然而，經由玉芬老師的巧手示範，一定也可以參與實作，而埋下日後發芽的種子。從閱讀的外在效應來說，這是最值得珍惜的早期學習經驗。推動閱讀的有志之士，千萬不可等閒視之。

本書內容有三個面向，依序介紹幾何學的「有用」、「經典典雅」以及「美麗」。至於這三個面向，還多虧了古希臘人（尤其是歐幾里得）所建立的幾何理論系統，而互相連結在一起。在「經典」的歷史脈絡中，幾何同時「有用」與「有趣」，真是太令人驚奇了。玉芬老師總是在貌似平淡無奇的「美術勞作」中，給了我們莫大的知識驚奇，這種敘事已經顛覆了我們慣常所謂的：你說話「太希臘」（all too Greek）了。原來「希臘」幾何學一點也「不太希臘」！事實上，誠如玉芬老師的文章所訴求，「我又不是要你『化圓為方』！」

相反地，根據希臘哲學家的看法，數學知識是簡單的、有秩序的，而且是可以理解的。同時，只要運用簡單的論證，我們往往可以「看到」令人驚奇的結果。因此，持之有恆的閱讀，你終究可以理解本書努力鋪陳的數學驚奇。

總之，玉芬老師在本書的書寫中，總是有令人意想不到的選材，此外，在安排內容時，她也注意到論述的前後呼應，以及敘事的融貫性。雖然這是小小的一本著作，但是，她所投注的熱情與周到，卻有著少見的堅持，令人欽佩。這是我大力推薦本書的主要原因之一。

《生活中的數學魔法： 動手做幾何，激發數感能力》自序

我希望這本書猶如一幅幅美麗的數學風景，在刻意有意識的擺放與設計下，可以使讀者帶著好奇心、探索力以及求知慾，進入數學中的幾何世界。《這才是數學》一書作者保羅·拉克哈特認為：「數學是迷人的，好奇的，令人興奮的，智力上令人信服的，只要你沒有被迫以一種盲目、壓力和機械的方式接近它。」本書亦努力嘗試呈現這樣的幾何，雖知無法「全等」，但求「相似」。

本書閱讀對象定位在小學高年級至國中學生，所以本書的數學知識大都以較為輕鬆的對話方式開啟，設計鋪陳則以二位靈魂人物數海與精靈爺爺——麥斯，作為數學知識的探索者與引路人。書中內容雖與學習階段之數學知識相關，但書寫初衷仍在於「數學·生活·素養」，希望讀者透過文章的閱讀，發現生活中的數學，提供養成數學素養的機會。儘管閱讀對象設定為幾何的初學者，但作者亦私心期待所有愛好數學的普羅大眾，亦能結緣翻閱，書中內容固然點到為止，但也不要淺嘗即止，也許再多一點點的好奇與反思，能帶來數學學習的小確幸。

個人教書生涯自民國 80 年始，至民國 89 年開始在校內自辦「數食店月刊」，其動機不外乎想提供一個學生有發表成果的機會，以及教師亦有教學經驗分享的平台。後來亦承蒙師大洪萬生教授支持，將部份內容收錄於現今「臺灣數學博物館」<https://hpmociety.tw/>。一路走來，驀然發現，也許冥冥中預言了，寫書是我退休後可以考慮的斜槓人生！所以本書的出現，只覺一切只是因緣時機成熟，像正巧覺得有些許退休後的閒情逸緻，正巧有些許教學心得想訴諸文字，正巧三民書局捎來訊息，一切就是這樣地水到渠成了。

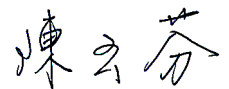
「幾何」，我覺得抽象亦具象。喬丹·艾倫伯格在所著的《形狀》一書中說到，「我們需要知道如何透過純粹的形式演繹做幾何學，但幾何學並不僅僅是一連串純粹的形式演繹，因為不只是形式系統。它存在於我們對空間位置和運動的思考方式之中，我們無法不幾何。換言之，我們有幾何直覺。」所以個人戒慎恐懼地期許自己真能喚起初學者對幾何直覺的能力。全書內容分成三個觸角書寫：幾何的有用、幾何的典雅、幾何的驚艷。並在每個主題結束時，附上一些小啓思或手作的應用，企盼小小讀者在課餘閒暇之際將它作為替代電玩的手作遊戲。

總之，本書得以完成，我要感謝我的恩師洪萬生老師，沒有老師的鼓勵就沒有這本書的問世，這本書之所以可以完成，全是因為他說了「我會幫妳！」這句話足以讓我產生絕決般勇氣，勇敢面對艱難挑戰。再來也感謝博班的指導教授單維彰老師，他讓我在數學文本的寫作中，深刻理解每個字詞擺放與用意，讓我覺得自己像個「類」專業的數學文本創作者。此外，也感謝三民書局強大的編輯團隊，可以將原本爬滿枯燥文字的內內容轉化成一篇篇易於閱讀的漫畫小品，真的不容易。

有人說「數學像空氣，因為它無處不在！」我相信數學家與學生都深表認同，只是各自解讀不同。前者認為數學重要，因為每個人都需要它；後者亦認為數學真的重要，只是每個人都看不到它。而對於曾執教 30 年的數學老師我而言，自然能感受數學的存在感，但更能理解學生對其視而不見的不存在感。所以，數學可不可以是生活中的塩？不但讓學生看得到，也讓他們的生活多一點味道？

如果每一門學科在自然界中都能找到與之對應的事物，那我希望數學像是一道雨後彩虹，不僅斑斕絢目，更讓人有雨後清新為之一亮的驚艷，吸引大家駐足欣賞，然後有幸自己在這裡遇見妳！

（本文亦感謝福州易施科技有限公司總經理施祥鴻書法家，在本書封面內頁所題之「數海與麥斯」墨寶，著實為本書增色許多，謹在此表達誠摯的謝意）



于三峽 2024.09.28

編者註：本書預計近期出版，敬請期待！

孔子開過補習班教數學嗎？

林倉億

台南一中

《論語》〈泰伯〉中有這麼一段：「子曰：『三年學，不至於穀，不易得也。』」這段話有不同的解讀，其一是道德層面的，孔子感嘆學習三年而不追求利祿的人很少。另一種則比較貼近字面上的意思，孔子說很少人學了三年還找不到好工作。這兩種說法，乍看之下，南轅北轍，但仔細想想，不同說法背後的共通點，很可能就是在孔子時代，學習三年，追求利祿或找好工作並不是件困難的事。

筆者是數學老師，雖然沒有能力像清代考據學家在這段話上追根究柢，但仍十分好奇，學習三年可以追求利祿或是找到好工作，那三年要學習的知識或技能，有沒有包含數學？

孔子曾經自述「吾少也賤，故多能鄙事。」講白了就是孔子年少時地位卑微，做過貴族不會碰的工作、擁有平民百姓的生活技藝。那這些工作、技藝是否包含數學呢？這其實不好說，但《孟子》一書中曾提及

孔子嘗為委吏矣，曰：會計當而已矣。嘗為乘田矣，曰：牛羊茁壯，長而已矣。

「委吏」、「乘田」分別是管理糧倉、畜牧的小官／職位。司馬遷在《史記》〈孔子世家〉中描述：「孔子貧且賤。及長，嘗為季氏史，料量平；嘗為司職吏而畜蕃息。由是為司空。」其中「司空」是管理工程的小官／職位。如果孟子和司馬遷所說不差，那孔子年輕的時候管理糧倉、畜牧表現良好，獲得上級賞識提拔而管理工程。由此，我們可以斷言孔子不僅懂數學，還靠數學「升官晉祿」。

既然孔子懂數學，那孔子開始收束脩授徒後，教不教數學呢？孔子倡禮、樂、射、御、書、數六藝，孔門弟子修習的項目，包含數學應該是合理的。那接下來的問題就是：教材是什麼？誰來教？

先秦時代的數學教材或者是數學簡牘並未流傳下來，所以我們只能從近代考古出土的秦、漢竹簡中的數學材料來推估，這之中最重要的就是秦簡《數》與漢簡《筭數書》。秦簡《數》有 236 枚竹簡和 18 枚殘片，竹簡長度大多約 27.5 公分，寬約 0.5~0.6 公分，在其中一枚竹簡的背面有一個「數」字，故稱此份秦簡為《數》，編成的年代下限定為西元前 212 年（秦始皇 35 年）。《數》中，包含了 81 題完整算題，分別與租稅、面積、體積、穀物換算、分數計算…等有關。

漢簡《筭數書》出土自湖北江陵張家山的一座漢墓，共有竹簡 190 枚，竹簡長 29.6~30.4 公分，竹簡寬 0.6~0.7 公分，其中一枚竹簡的背面有「筭數書」三個字，就是這部竹簡名稱的來源，編成的年代下限定為西元前 186 年（西漢呂后 2 年）。《筭數書》

中完整的題目有 92 題，與分數計算、比例應用、面積、體積…等有關。

秦簡《數》與漢簡《算數書》就是目前可見較為完整的秦、漢數學文獻，其內容不出中國傳統數學分類「九數」的範疇。¹筆者在此不詳述這兩部竹簡的數學內容，初聞這兩部竹簡的讀者，可先從洪萬生教授主編的《數之軌跡 I：古代的數學文明》認識它們。筆者要凸顯的是，這兩部竹簡都是抄錄而來的，抄錄來源不只一個。《算數書》中出現的「楊」、「王」、「楊已讎」、「王已讎」，指明有楊、王兩人擔任抄寫或校正的工作。至於抄錄這兩部數學竹簡的目的，可以大膽地推斷是用來訓練官吏或吏徒。秦朝以吏為師，學吏制度中嚴格規範了史（文書）、卜（卜事）、祝（祭祀）三種小官吏的訓練與考核，這制度延續到漢初，而地方官吏為了執行任務或法令，必須學會一些數學知識，例如租稅、穀物換算、面積與體積的計算。由此，中國古代早期的數學發展圖像，就呼之欲出了。在教育制度未普及、數學知識不易保存與傳播的時候，秦、漢時期藉由官吏或吏徒的訓練，將數學知識傳抄、傳遞下去。對此主題有興趣、想要繼續追究的讀者，可參閱《數之起源：中國數學史開章《算數書》》中的第 6 章〈張家山漢墓的墓主〉。

那麼，在孔子生存的春秋末期，數學知識的傳播與保存，與秦朝或西漢初年會有截然不同的圖像嗎？秦簡《數》與漢簡《算數書》抄錄的題目能否回溯到春秋戰國、甚至更早之前？這些問題仍需要有更多的出土證據才能作進一步的釐清。不過，雖然現存文獻上沒有春秋戰國時期完整的史、卜、祝的學吏制度記載，但地方治理仍需要擁有這些技能的人才，孔子擔任過的「委吏」、「乘田」、「司空」地方小官或是專門職位，正是地方治理不可或缺的。孔子能勝任這些職務，想必除了基本文書技能外，基礎的數學能力也是有的。至於孔子是如何學習數學的，目前仍不可考，但可以確定當時一定有懂數之人與數學材料，「少也賤」的孔子才得以學到數學。「三年學，不至於穀，不易得也。」這句話如果出自早年在魯國私塾授徒的孔子，那時候孔子名聲不顯，收到的學生幾乎是平民百姓，離禮樂治國十分遙遠，那麼，很少人學了三年還找不到好工作這說法就說得通了。果真如此的話，那年輕的孔子在其職業訓練所／補習班教導學生數學，也就是可能的想像了！

參考資料

李碩 (2024). 《孔子大歷史：初民、貴族與寡頭門的早期華夏》，臺北市：麥田出版。

洪萬生 (1999). 《孔子與數學：一個人文的懷想》，臺北市：明文書局。

洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻等著 (2006). 《數之起源：中國數學史開章《算數書》》，臺北市：臺灣商務。

洪萬生主編、英家銘協編，黃俊瑋、陳玉芬、林倉億著 (2024). 《數之軌跡 I：古代的數學文明》，臺北市：三民書局。

¹ 「九數」中國傳統數學的九個主題：方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、贏不足、方程、勾股。漢朝成書的《九章算術》，就是以這九個主題逐一作一篇文章。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpmociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）

孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）

陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）

林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！