

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 英家銘（清華大學）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日
 網址：<https://www.hpsociety.tw/>
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十六卷第四期目錄 (2023 年 12 月)

- 「蟲蛀算」國小學習工作單編製探討
.....蘇意雯
- 《數之軌跡》推薦序.....于靖

「蟲蛀算」國小學習工作單編製探討

蘇意雯

臺北市立大學數學系 yiwen@uTaipei.edu.tw

十二年國教數學課綱的基本理念提及數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感：「適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。」，也強調在教科用書的編寫中可以適當編入數學史、民族數學以及數學家的介紹，「以引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並了解不同性別者的成就與貢獻。」(教育部，2018)。教學現場將數學史融入數學教學的方式，在中學階段多使用學習工作單的形式，小學現場的實施則比較多元。例如可以用說故事口語講述方式實施，以及用學習工作單方式實施，或者是用數學史動畫輔以學習工作單方式實施(蘇意雯，2011)。但是對於國小一年級學生，受限於學生的年齡，以及適用史料的難尋，針對國小一年級學生的 HPM 學位論文是付諸闕如的(蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019)。本篇文章想探討的，就是針對國小一年級 HPM 學習工作單的編製。

在數學的解題中，相信大家都接觸過數字被水漬弄髒或者是收據汗損無法辨識數據等等，需要由給定的線索推測出未知數字的題型。諸如此類問題，在日本稱為「蟲蛀算」，這個稱呼的由來是因為日本古代的紙容易被蟲蛀食，也就因此應運而生了這類題型。促進日本本土數學(和算)發展的一大因素是「遺題繼承」，這個傳統的起源最初是為了打擊盜版，數學家吉田光由在 1627 年出版《塵劫記》一書廣獲好評，由於盜版猖獗，到了 1641 年新版的《塵劫記》，就在書末提出 12 個問題對有心向學的讀者挑戰，引發了和算家「遺題繼承」的風氣(城地茂，2009)。之後的和算家往往會在自己所撰寫的和算書卷末，再提出一些數學難題讓讀者探究，經過弟子、門人、或其他讀者努力研究，解決了難題之後，通常要撰寫難題解答之書，在卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去解題，促使更進一步深入的研究(蘇意雯，2009)。也因此，「遺題繼承」就成為重要的和算文化與數學知識活動。在此傳統下，「蟲蛀算」問題也出現其中。

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版正是因為前面所提及的「遺題繼承」的傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出

版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題。

這題的文意是敘述偶然在方箱中得到一張陳舊的紙，打開閱覽只知道是分銀給 37 個人，銀的總量上下被蠹蝕了只看到 23 匁(日本以前的重量單位，1 匁為 3.75 克)。而且每個人所分到的銀量也被蠹蝕了，只看到最後是二分三釐(0.23 匁)，要問總銀及每人所分得的銀數各是多少。這個題目按照題意，我們可以列出 $\underline{\quad}23.\underline{\quad} \div 37 = \underline{\quad}.23$ 的式子，依照乘除互逆的性質我們可以利用直式乘法，解出 $95.23 \times 37 = 3523.51$ ，也就是「總銀三貫五百二十三匁五分一厘，每人銀九十五匁二分三厘。」的答案，這道問題後來由神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》一書中解答出來。

隨著和算的蓬勃發展，1808 年和算家松岡能一的《算學稽古大全》中，就直接將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但字據被蟲蛀了一個大洞，要讓讀者從殘餘的數據中算出米的單價和銀的總數。日本數學史家平山諦認為，「蟲蛀算」會引起人們感興趣的原因在於肯定是能夠解答的問題，而且問題的解有一個或兩個，即使有若干個也不會失去它的意義。此外就是「蟲蛀算」的問題比一目了然的問題更加吸引人(平山諦，1956/2005)。設計日本「蟲蛀算」之學習工作單，讓學生知曉江戶時代將每筆買賣記錄在帳簿中的商人，可以利用「蟲蛀算」計算出原本被除帳的金額，除了體會異國文化的數學趣味，並進而探究解題，這正是課堂上可供運用的數學史素材(蘇意雯，2023)。

對於有心想嘗試將數學史融入數學教學中的師長，以上介紹的「蟲蛀算」典故正可以視所教學生程度，編入教材設計。例如針對國小一年級學生，教師可以先介紹「蟲蛀算」故事的由來，讓學生知曉蘊藏於文化中的數學，接著請學生解決「蟲蛀算」問題中未知的部分，透過蟲蛀的氛圍提升解題的樂趣(請參見附錄一)。

本份「蟲蛀算」國小學習工作單主要設計於二位數的加減單元，範圍集中在二位加一位，或一位加二位，或二位減一位，其中加法的和以及被減數是在 50 以內。對應十二年國教數學課綱的學習表現是第一學習階段 n-I-3 應用加法和減法的計算或估算於日常應用解題。設計理念主要是透過「蟲蛀算」讓學生學習解決二位數加減中部分量未知的問題。教學實作流程是學生每人一份學習工作單，由教師進行一節課的教學。在此上課時間中，教師先導讀故事，再讓學生完成學習工作單，並請他們填寫回饋單。由於實驗對象為一年級學生，因此回饋單除了勾選回答問題，也請他們寫一寫或畫一畫故事中印象最深刻的部分。實驗教師並請學生回去與家人分享故事，也請家長提供回饋。

經由國小一年級兩個班級學生共 44 人參與的實作分析，對於第一頁的帳本問題，44 位學生中有 3 人算錯，一位是寫出 $13+5=19$ ，一位是寫成 $19-13=7$ ，另一位是資源班學生沒有作答。第二頁消失的數字第一題學生全部都答對，第二題有 8 個學生做錯，第三題由於牽涉到減數未知的問題，對於一年級學生是較難的題型，因此有 13 個學生答錯，大部份都是在借位的地方出錯。

對於開放性問題「寫出你的想法或做法」，由於學生並不太知道題目的用意，所以

出現了「計算出來的」、「用手指算」、「用頭腦算」、「我用直式算出來的」、「因為我想要幫他找回來」、「多看點書就知道了」等等多樣性的回答。也因此，實驗教師 A 建議「對一年級小朋友而言，如果老師沒有引導，小朋友會天馬行空的亂寫，如果引導太多又可能會寫得很像，所以是否就刪了呢？」；實驗教師 B 則表示「對一年級的孩子來講，要確切說出原因已有難處，要用寫的方式完整表達自己想法，更是困難的!這是很棒的開放性題目，如果使用說說看的方式，也許更能清楚他們的邏輯思考。」。這也是日後使用本份「蟲蛀算」學習工作單進行教學時，可以調整的地方。

在學生的量化回饋中，針對「你覺得『蟲蛀算』的故事有趣嗎?」的問題，勾選「很有趣」的學生有 32 人，百分比為 73%；勾選「普通」的學生有 8 人，百分比為 18%；勾選「我不喜歡」的學生有 4 人，百分比為 9%。針對「你想再聽一些和數學有關的故事嗎?」的問題，勾選「很想聽」的學生有 28 人，百分比為 64%；勾選「都可以」的學生有 12 人，百分比為 27%；勾選「不想聽了」的學生有 4 人，百分比為 9%。

在家長回饋中，針對「您覺得這份學習單對孩子的數學學習有幫助嗎?」的問題，勾選「有的」之家長有 36 人，百分比為 82%；勾選「還好」的家長有 4 人，百分比為 9%；無家長勾選「沒有」選項，但未作答的家長有 4 人，占百分比為 9%。針對「對於老師所補充的故事系列，您覺得:」的問題，勾選「很棒」之家長有 40 人，百分比為 91%；無家長勾選「還可以」及「不需要」選項；未作答的家長有 4 人，占百分比為 9%。家長的看法諸如「訓練思考邏輯，很棒。」、「很好，平常作業中可做補救教學。」、「很棒的小故事，也幫助加深印象。」、「比較能理解加減法。」、「不錯，可以讓孩子動動腦。」、「這樣能讓小孩更能想要學習。」、「學習單元變得比較有趣，不會無聊。」、「○○很開心的分享上課的過程，小故事使他更接受數學了，謝謝老師那麼用心。」，顯示出家長對本份學習工作單的肯定。

在「蟲蛀算」學習工作單的教學之後，實驗教師們也進行了反思。實驗教師 A 認為「小蟲子吃掉數字是能吸引一年級的小朋友去做探究和追蹤，小朋友印象深刻的部分幾乎都是蟲子吃掉書本。蟲蛀算的模式可以套用在各種四則運算中，達到讓學生熟練運算的目的。」。實驗教師 B 也認為「果然看到小動物，孩子的眼睛就睜大了，完全不覺得是在解數學，只是想著快快找出被吃掉的數字。蟲蛀算的設計貼近孩子的喜好，有趣又實用。」。此次的教學實驗，也讓實驗教師們體驗到數學史融入國小一年級教學的可能。

經由本研究所展示的「蟲蛀算」教學實作，我們發現對於此份融入數學史故事的學習工作單，一年級學生及家長都有正向的回饋，從中也顯示出，數學史融入一年級數學教學正是可以努力的一個方向。也就是說，先利用一個有趣的「蟲蛀算」數學史故事引動學童的興趣，之後教師們可以自行布置適合的「蟲蛀算」問題讓學童挑戰。希望這些素材能為有心將數學史融入國小低年級數學教學的教師們，提供參考使用。

參考文獻

- 教育部(2018).《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》。臺北市：教育部。
- 蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏(2019).〈臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以1992年至2017年學位論文為例〉，《臺灣數學教育期刊》，6(1)，27-51。
doi:10.6278/tjme.201904_6(1).003
- 蘇意雯(2009).〈遺題承繼，串起中日代數史〉，收錄於《當數學遇見文化》，頁172-183。臺北：三民書局。
- 蘇意雯(2011).〈數學史融入數學教學之理論與實務探究〉，《國教新知》，58(3)，65-73。
- 蘇意雯(2023).〈日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」探討與教學研究〉。載於2023年第十五屆科技與數學教育國際學術研討會議程手冊(143頁)。臺北市：國立臺北教育大學。
- 平山諦(2005).《東西數學物語(東西数学物語)》，代欽譯。上海：上海教育出版社。(原著出版於1956)
- 城地茂(2009).《日本数理文化交流史》。臺北：致良出版社。

《數之軌跡》推薦序

于靖

台灣師範大學數學系退休教授

很高興看到洪萬生教授帶領他的學生們寫出大作《數之軌跡》。這是一本嘆為觀止，完整深入的數學大歷史。萬生耕耘研究數學史近四十年，功力與見識足以傳世。他開宗明義從何謂數學史？為何數學史？如何數學史？講起。巴比倫，埃及，希臘，中國，印度，阿拉伯，韓國，到日本。再從十六世紀到二十世紀講西方數學的發展與邁向巔峰。《數之軌跡》當然也著力了中國數學與希臘數學的比較，中國傳統數學的興衰，以及十七世紀以後的西學東傳。

半世紀前萬生與我結識於臺灣師範大學數學系，那時我們不知天高地厚，雖然周圍沒有理想的學術氛圍，還是會作夢追尋各自的數學情懷。我們一起切磋，蹣跚學習了幾年，直到1976 暑假我有機會赴耶魯大學博士班。1980 年我回到中央研究院數學所做研究，那時萬生的牽手與我的牽手都在外雙溪衛理女中執教，我們有兩年時間在衛理新村對門而居，茶餘飯後沈浸在那兒的青山秀水，啟發了我們更多的數學思緒。1982 年我攜家人到巴黎做研究才離開了外雙溪。後來欣然得知萬生走向了數學史，1985 年他決定赴美國進修，到紐約市立大學跟道本周 (Joseph Dauben) 教授專攻數學史。

1987 (或1988) 年，我舉家到普林斯敦高等研究院做研究。一個多小時的車程在美國算是「鄰居」，到紐約時我們就會去萬生家拜訪，談數學，數學史，述及各自的經歷與成長。1988 年暑假我回臺灣之前，我們倆家六口一起駕車長途旅遊，萬生與我擔任司機，那時我們都不到四十歲，從紐約經新英格蘭渡海到加拿大新蘇格蘭島，沿魁北克聖羅倫斯河，安大略湖，從上紐約州再回到紐約與普林斯敦。一路上話題還是會到數學與數學史。

我的數學研究是在數論，是最有歷史的數學，來龍去脈的關注自然就導引數論學者到數學史。在高等研究院那年，中午餐廳裡年輕數論學者往往聚到韋伊 (Andre Weil) 教授的周圍，聽八十歲的他講述一些歷史。韋伊是二十世紀最偉大數學家之一，數學成就之外那時已經寫了兩本數學史專書：數論從Hammurabi 到 Legendre，橢圓函數從 Eisenstein 到 Kronecker。

1990 年代，萬生學成回到臺灣師範大學，繼續研究並開始講授數學史。二十餘年來他培養指導了許多研究生，探索數學史的各個時期及面向，成績斐然。這些年輕一代徒弟妹：英家銘，林倉億，蘇意雯，蘇惠玉等，也都參與了撰述這部《數之軌跡》。特別是在臺灣推動 HPM 數學史與數學教學，萬生的 School 做了許多努力。在這本大作導論中，萬生指出他的數學不只包含菁英數學家 (elite mathematician) 所研究的「學術性」內容，而是涉及了所有數學活動參與者 (mathematical practitioner)。因此《數之軌跡》並不把重點放在數學歷史上的英雄人物，而著眼於人類文明的發展過程中，數學的專業化 (professionalization) 與制度 (institutionalization)，乃至於贊助 (patronage) 在

其過程中所發揮的重要功能。

在《數之軌跡：再度邁向顛峰的數學》第4章裡，《數之軌跡》試圖刻劃二十世紀數學。萬生選擇了四個子題來描述二十世紀前六十年的數學進展：艾咪·涅特，拓撲學的興起，測度論與實變分析，集合論與數學基礎。這當然還不足以窺二十世紀前五十年數學史的全貌：像義大利的代數幾何學派，北歐芬蘭的複分析學派，日本高木貞治的代數數論學派，與抗戰前後的中國幾何學大師陳省身，周緯良，都有其數學史上不可或缺的地位。從二十世紀到二十一世紀，純數學到應用數學，發展更是一日千里。《數之軌跡》選了兩個英雄主義的面向：「希爾伯特 23 個問題」、「費爾茲獎等獎項」，來淺顯說明二十世紀數學知識活動的國際化。這些介紹當然不能取代對希爾伯特問題或費爾茲獎得獎工作的深入討論。最後寫科學的專業與建制，以及民間部門的角色：美國 vs. 蘇聯。這是很有意思的，我希望數學史家可以就這個題目再廣泛的搜集資料，因為在 1960 年之後，不同的重要數學研究中心在歐洲美國出現，像法國 IHES，德國的 Max Planck, Oberwolfach 等。到了 1990 年世界各地，包括亞洲（含臺灣，中國），數學研究中心更是像雨後春筍般冒出。這是一個很有意義的數學文化現象。另一方面，隨著蘇聯解體，已經不再是美國 vs. 蘇聯，而是在許多國家百花齊放。從古到今，數學都是最 Universal！（2023 年10 月）



書名：數之軌跡I：古代的數學文明

ISBN13：9789571476988

出版社：三民書局

主編：洪萬生

斜邊：英家銘

作者：黃俊瑋、陳玉芬、林倉億

審訂：于靖、林炎全

裝訂 / 頁數：平裝 / 232 頁

出版日：2024/01/03



書名：數之軌跡II：數學的交流與轉換

ISBN13：9789571476995

出版社：三民書局

主編：洪萬生

斜邊：英家銘

作者：黃俊瑋、博佳佳、林倉億、琅元

審訂：于靖、林炎全、單維彰

裝訂 / 頁數：平裝 / 256 頁

出版日：2024/01/03

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpmsociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）

孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）

陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）

林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

蟲蛀算

日本江戶時代(大約 300 多年前)，商人^{シヤウジン}在做生意^{シヤウジ}時^{トキ}，會^シ將^ル每^{ヒト}筆^{ヒト}買^カ賣^カ記^ス錄^ス在^ニ帳^カ本^カ中^ニ稱^ヒ為^ス流^カ水^カ帳^カ，過^シ一^{ヒト}段^{ヒト}時^カ間^カ再^シ依^ヒ流^カ水^カ帳^カ的^カ記^ス錄^ス去^キ收^メ錢^カ，但^シ是^シ，帳^カ本^カ放^ク置^ク一^{ヒト}段^{ヒト}時^カ間^カ後^ニ，有^シ些^シ會^シ被^ル蟲^カ蛀^ク掉^ク，就^シ可^シ能^シ看^エ不^ク清^ク楚^ク原^ノ本^ノ記^ス下^ノ的^カ數^カ字^カ了^カ，於^テ是^シ得^ル動^ス腦^カ筋^カ算^ス出^ス來^ル，這^レ就^シ是^シ「蟲^カ蛀^ク算^ス」的^カ由^リ來^ル。

有一位^{ヒト}賣^ル書^カ的^カ商^{シヤウ}人^{ジン}想^シ查^メ看^ル

一^{ヒト}月^カ三^カ日^カ下^ノ午^カ賣^ル出^ス多^ク少^ク本^カ書^カ，

可^シ是^シ帳^カ本^カ被^ル蛀^ク蟲^カ吃^ク了^カ

許^ク多^ク洞^カ，數^カ字^カ看^エ不^ク太^ク清^ク楚^ク

了^カ，請^ク你^カ幫^カ忙^カ想^シ法^カ子^カ算^ス出^ス

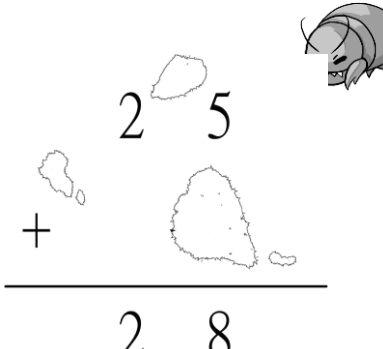
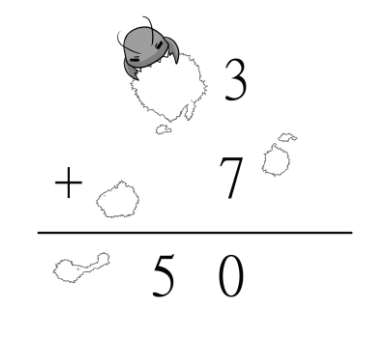
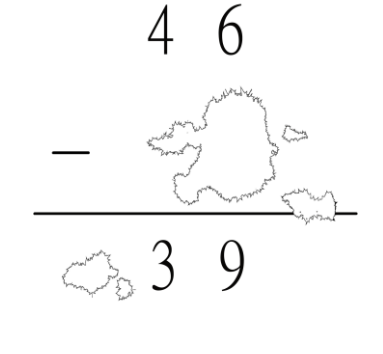
來^ル？



消失的數字

年 班 姓名：

下面的算式，有些數字被蟲蛀了。聰明的小朋友，請你動動腦，把它找回來吧！請在右邊的格子中寫出原來的算式和想法。

 $\begin{array}{r} 2 \quad 5 \\ + \quad \quad \\ \hline 2 \quad 8 \end{array}$	<p>原來的算式：</p>	<p>寫出你的做法 或想法：</p>
 $\begin{array}{r} \quad 3 \\ + \quad 70 \\ \hline 50 \end{array}$	<p>原來的算式：</p>	<p>寫出你的做法 或想法：</p>
 $\begin{array}{r} \quad 4 \quad 6 \\ - \quad \quad \\ \hline 3 \quad 9 \end{array}$	<p>原來的算式：</p>	<p>寫出你的做法 或想法：</p>

學會了「蟲蛀算」再多的蟲也不怕！



回 饋 單

年 班 號 姓 名 :

小朋友，你喜歡「蟲蛙算」這個單元嗎？請回答

以下問題，在□中打✓。

一、你覺得「蟲蛙算」的故事有趣嗎？

😊 很有趣 😐 普通 ☹️ 我不喜歡

二、你想再聽一些和數學有關的故事嗎？

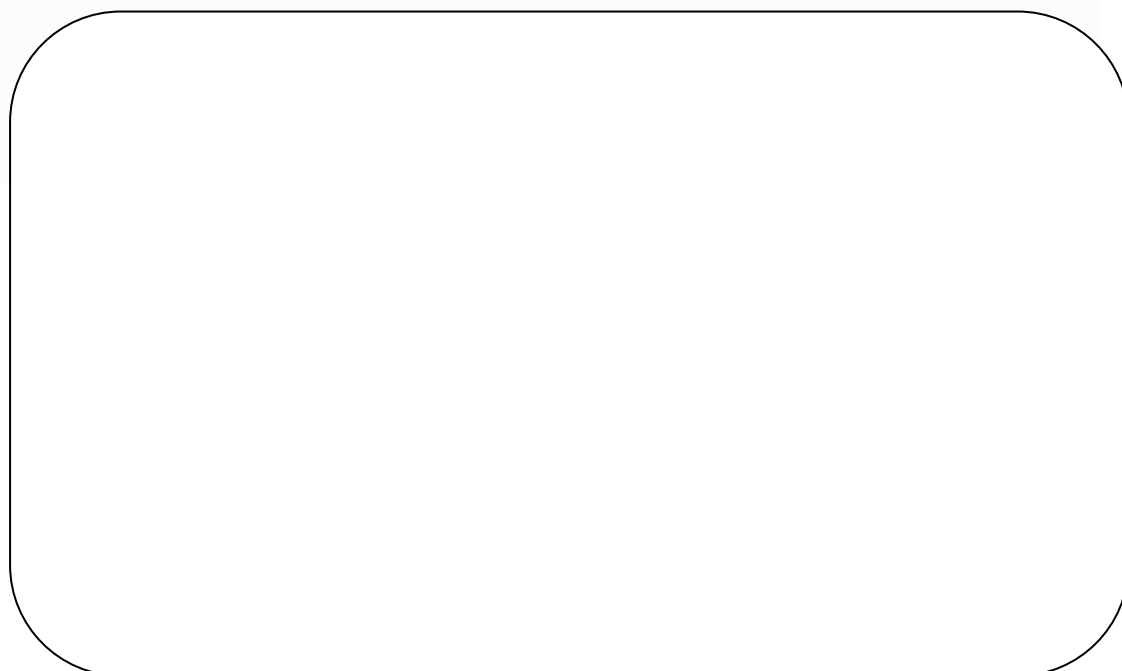
😊 很想聽 😐 都可以 ☹️ 不想聽了

三、回去後，我和（ ）分享了「蟲

蛙算」的故事。

四、寫一寫或畫一畫故事中最深刻的部分

分：



四、 家長的分享：

1. 您覺得這份學習單對孩子的數學學習有幫助嗎？

有的！

還好。

沒有！

分享您的看法：

(

)

2. 對於老師所補充的數學故事系列，您覺得：

很棒！

還可以。

不需要！

您認為：

(

)

家長請簽名：_____