HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：https://www.hpmsociety.tw/
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十六卷第二期目錄
(2023 年 6 月)

古算典籍中的題組：以《張丘建算經》為例

洪萬生
臺灣數學史教育學會

內容（content）與形式（form）一向是閱讀文本時，必須掌握的兩大要素。如果閱讀的對象是我們比較陌生的數學典籍時，尤其需要在內容之外，也關注到它的體例（format）。事實上，數學文本的內容固然離不開歷史脈絡，這些內容的編排，有時好像「意外地」留住了歷史的那一瞬間，為我們提供回味無窮的歷史想像。

本文將以《張丘建算經》的一個體積計算的「題組」（卷中第 9-10 題），嘗試說明這種迴異於傳統的內容編排，如何地可能暗喻「說算者」張丘建的「教學」風格。

一、《張丘建算經》的題組：「斬高」vs.「接築高」

《張丘建算經》卷中第 9-10 題合而觀之，可以讓我們看到中國古算中的某些「題組」表現了獨特的風貌，儘管相對於中國東漢成書的經典《九章算術》來說，《張丘建算經》內容粗淺許多，因此，難以進入史家之「法眼」，也是情理之常。

根據數學史家考證，該書作者張丘建生平不詳，僅能推測是第五世紀，今山東臨清、河北清河一帶人氏。[1]在目前流傳的校對版本中，有「北魏張丘建撰、隋算學博士劉孝孫細草」，以及「唐朝議大夫行太史令上輕車都尉李淳風等註釋」之署名。總之，它是中國南北朝時代的著作。至於其最大「賣點」，則是該書卷下最後一題的所謂「百雞問題」：**「今有雞翁一，直（值）錢五；雞母一直（值）錢三；雞雛三直（值）錢一。凡百錢買雞百隻。問雞翁、母、雛各幾何？」**

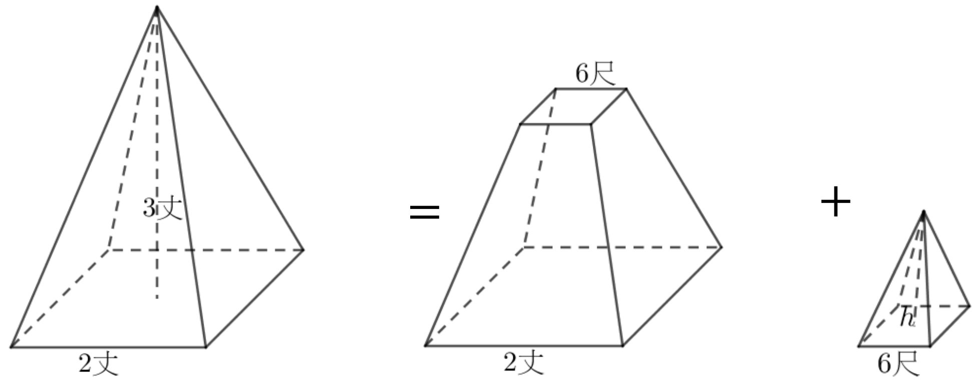
不過，本文不打算討論這個問題，事實上，它的「能見度」在科普書寫中可說是汗牛充棟，尤其這種題型如何先是經由印度傳到中亞，最後再經由斐波那契（Fibonacci）的

[1] 臺北木柵地區有一家張姓家祠，號清河堂，不知是否巧合？

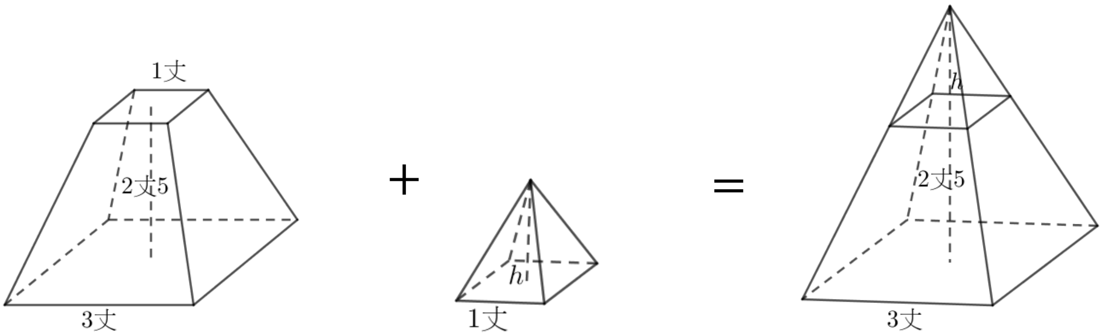
《計算書》（***Liber abacci*, 1202**）之介紹而傳入西歐的「東風西漸」之旅，更是讓許多史家所津津樂道。

在此，我們還是想針對《張丘建算經》卷中第 **9-10** 題，來考察「題組」在這個脈絡中之為用。先引述這兩題及其答案如下：

今有方錐下方二丈，高三丈。欲斬末為方亭，令上方六尺，問斬高幾何？
答曰：九尺。



今有方亭下方三丈，上方一丈，高二丈五尺。欲接築為方錐，問接築高幾何？
答曰：一丈二尺五寸。



這兩題依序涉及方錐與方亭這兩個立體的變換，都是求有關方錐體的高之問題：「斬高」**vs.**「接築高」！第 **9** 題是將方錐「**斬末**」為方亭，第 **10** 題則是將方亭「**接築**」為方錐。

二、《九章算術》：方錐 vs. 方亭

張丘建所提出的這個題組，在中國古算書中似乎是僅見的案例，因為通常的體積計算問題，以《九章算術》卷五「商功章」為例，大都是給出立體的（三邊）廣、袤、高，然後計算其體積。譬如，該章第 **9** 題是計算方亭的體積：

今有方亭，下方五丈，上方四丈，高五丈。問積幾何？
答曰：一十萬一千六百六十六尺太半尺。[2]

---

[2] 「太半尺」是指 **2/3** 尺。

術曰：上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。

若翻譯成為現代公式，則其形式如下：$\frac{1}{3}h(ab+a^2+b^2)$，其中 a 是下方（底部正方形邊長），b 是上方（頂部正方形邊長），h 是方亭的高。

第 **11** 題則是計算方錐之體積：

今有方錐，下方二丈七尺，高二丈九尺。問積幾何？
答曰：七千四十七尺。
術曰：下方自乘，以高乘之，三而一。

若翻譯成現代公式，則其形式如下：$\frac{1}{3}ha^2$，其中 a 是底部正方形邊長，h 是方錐的高。

三、張丘建題組的歷史趣味

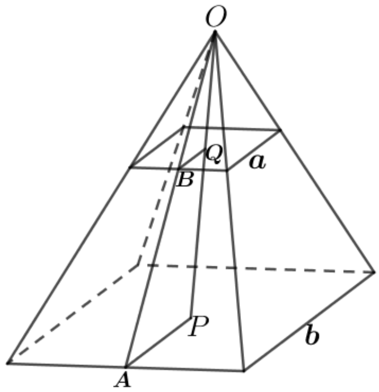
現在，讓我們回來考察（北魏）張丘建的「術曰」、劉孝孫的「細草」，以及李淳風團隊的「註釋」。針對第 **9** 題，張丘建提供的術曰（解法）如下：「**令上方尺數乘高尺數為實。以下方尺數為法。實如法而一。**」[3]至於這個公式所以成立，則有李淳風的註釋：「**此術下方為句率，高為股率，上方為今有見句數。以見句乘股率，如句率而一，即得。**」請注意：句＝勾。計算時，利用所謂「今有術」（或三率法）：見句數：見句率 ＝ 見股數：見股率。

在將這個解法「翻譯」成白話文之前，我們先解釋幾個數學名詞。所謂方亭，現在的對應用詞是「截頂方錐」（英文是 **truncated pyramid**），亦即將一個方錐體「截掉」頂端部分所形成的立體，古書原文是「斬末」，亦即，「斬掉末端」的小方錐。因此，它的「底部」與「頂部」都是正方形，從而在古書中，「下方」與「上方」就分別指底部正方形、頂部正方形的邊長。如此一來，參見圖一，OQP 是方錐體的高，OBA 為方錐體的側邊上的直線，其中 O 點為錐頂，Q、P 依序是頂部、底部正方形的中點，而且 ΔOQB、ΔOPA 是相似的直角三角形（古稱「句股形」），QB 與 PA 為其各自的句邊，OQ 與 OP 為其各自的股邊。令下方為 b，上方為 a，則所求為 OQ（「斬高」）。根據張丘建的「術曰」以及李淳風團隊的解說，

$$\frac{a}{b}=\frac{a/2}{b/2}=\frac{OQ}{OP}\ \Rightarrow\ OQ=\frac{a\times OP}{b}$$

---

3 所謂「實如法而一」，是指「實」（被除數或分子）以「法」（除數或分母）為單位來進行除法的意思。

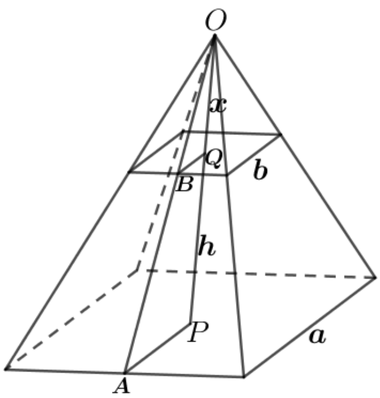


圖一

（「**上方尺數乘高尺數為實。以下方尺數為法**」）[4]由於給定的條件如下：$a = 6, b = 20,$ $OP = 30$，因此 $OQ = 9$。

現在反過來，如果給定的立體是一個方亭，那麼，我們當然可以在其頂部「接築」一個（小）方錐體，而構成一個較大的方錐體。參見圖二。先檢視張丘建的「術曰」:「**置上方尺數，以高乘之，為實。以上方尺數減下方尺數，餘為法。實如法而一。**」再考察劉孝孫的「草曰」，可以說只是將給定條件代入術曰:「**置上方十尺，以高二十五尺乘之，得二百五十尺。以上方一丈減下方三丈，餘二丈，為法。除實，得一丈二尺五寸。乃合前問。**」至於此一公式何以成立，李淳風團隊並未證明。顯然，同樣根據相似句股形原理，如令方亭下方為 a，上方為 b，「接築高」為 x，則依題意可得如下比例式，進而推得其解：

$$\frac{x}{h+x} = \frac{b/2}{a/2} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{bh}{a-b}。$$



圖二

因此，李淳風團隊未提供注解，是再當然也不過了。

四、結語

[4] 「實」是被除數，「法」是除數。

《張丘建算經》在唐代國子監太學「明算科」的教科書中，佔有一席之地。(前述的)《九章算術》、《緝古算經》(唐初王孝通撰)及《綴術》(祖沖之撰)當然是訓練這些學生的數學專業之重頭戲(其修業年限分別是三或四年)。相形之下，《張丘建算經》與《孫子算經》比較像是入門科目(修業期限只需一年)。因此，在它們的敘言中，就出現許多勉勵初學者的「精神喊話」，譬如，〈張丘建算經序〉開宗明義就強調：「**夫學算者不患乘除之為難，而患通分之為難。是以序列諸分之本元，宣明約通之要法。...... 余為後生好學有無由以至者，故舉其大概而為之。法不復煩重，庶其易曉云爾。**」亦即，通分很難，所以，在該書中，張丘建序列各種分數的本源，並且詳細說明約分與通分是重要的方法。這或許也可以解釋何以劉孝孫為該書詳列「細草」(逐步的解法)。劉孝孫的官銜是隋朝算學博士，官階不高，但卻是教授算學的專門官員，他當然也與科舉制度的「明算科」有關。至於李淳風團隊的註釋，目的就是編定十部算經，作為明算科的教材。[5]

以上是有關中國隋唐數學教育的科舉制度面的簡要說明。這個制度的特色，是先教育(訓練)、再考試，合格後再任官。但由於其官階是文官最低級出身，遠遠不如明經科與進士科，只能招收到低級官吏或庶民出身的學生，因此，這一套教育與考試制度對於中國古代數學的發展，影響極其有限。不過，由於《張丘建算經》是入門教材，因此，它的體例頗值得我們注意。

以本文討論的這個「兩題一組」的題組來看，方亭與方錐的「互換」初步地連結了這兩個立體的「幾何圖形」關係，甚至在計算的脈絡中，利用方錐來「定義」方亭，這是《九章算術》「商功章」(專論立體體積)所不及的特色。此外，計算之所以行得通，無論是「斬末」還是「接築」，完全都是基於這些立體所截出的相似句股形之相關原理。這個教學或學習的進路，相較於《九章算術》的體積公式計算(只是代入公式)來說，顯然具有更多的啟發性。當然，如果「商功章＋劉徽注」，那就是另一番風景了。

五、附論

數學史家紀志剛在他的《張丘建算經》導讀中，[6]將上述題 **10** 以及題 **7-8** 合而觀之。因為他發現這三題「雖然都可以歸結為相似勾股形的比例問題，但從問題的設計與算法的結構來看，已表露出一種向一般相似形轉變的跡象，特別是似已採用了『平行線』移動以構成相似三角形的技巧，並認識到對應線段成比例的基本性質(如高與邊的比)，這是中算幾何學發展中值得注意的新動向，看來此後李淳風在註釋《周髀算經》時所用的一般相似形方法並非偶然。」

為了印證他的評論，在此引述他針對題 **7** 的解說。卷中第 **7** 題：

今有築城，上廣一丈，下廣三丈，高四丈。今已築高一丈五尺，問已築上廣幾何？

---

[5] 這些教材除了本文主角《張丘建算經》之外，還包括前述的《孫子算經》、《緝古算經》、《綴術》，以及《周髀算經》、《海島算經》、《五曹算經》、《五經算術》，《夏侯陽算經》。

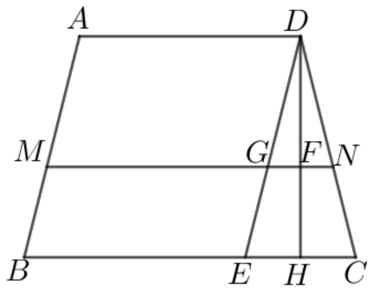
[6] 請注意：「張丘建」在他的著作中以「張邱建」行之。

答曰：二丈二尺五寸。

術曰：置城下廣，以上廣減之。又置城高，以減築高。餘相乘，以城高而一，所得加城上廣，即得。

參看圖三城牆剖面圖（等腰梯形）。給定城上廣 AD、城下廣 BC 及城高 DH，在已築高 FH 已知的條件下，求已築上廣 MN。

$$MN = MG + \frac{EC \times DF}{DH} = \text{上廣} + \frac{(\text{下廣}-\text{上廣}) \times (\text{城高}-\text{築高})}{\text{城高}}。$$



圖三

針對本題及卷中題 **8**，李淳風團隊都未曾給出註釋，顯見他認為在題 **9** 術曰的脈絡中提供說明，已經足以凸顯相似句股形原理的不可或缺了。

最後備註。「城牆」這種「立體」的正規名稱是底部為等腰梯形的柱體，這種圖形也見諸於堤、溝、塹、渠等，《九章算術》卷五「商功章」所提供的體積公式如下：「**并上、下廣而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即積尺。**」至於此一公式何以成立，則劉徽注給出了清晰簡易的解說：「**按此術并上、下廣而半之者，以盈補虛，得中平之廣，以高若深乘之，得一頭之立冪。又以袤乘之者，得立實之積。**」

由此可見，張丘建針對傳統中算的城牆體積問題，也提出其引伸題問，以相似勾股形為其底蘊。無論是題 **7-8**，或題 **9-10**，或者是題 **7-8**、**10** 等組合，都是對初學者來說，極有意義的題組。我們研讀古算典籍，可以略窺作者的匠心獨具，第五世紀的張丘建為我們提供了極佳見證。

參考文獻

紀志剛 **(1999).**《孫子算經》、《張邱建算經》、《夏侯陽算經》導讀，武漢：湖北教育出版社。

郭書春、劉鈍點校 **(2001).**《算經十書》，臺北：九章出版社。

附記：陳玉芬幫忙繪圖，廖傑成協助資料收集，謹此申謝。

運用 HPM 於中學數學閱讀文本之發展

—以七年級彈性課程為例

陳玉芬
國立中央大學學習與教學研究所博士候選人

《十二年國民基本教育的課程綱要總綱（總綱）》開宗明義即說明其教育願景為「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」，並以「核心素養」做為課程發展之主軸。而《數學領域課程綱要（數學領綱）》亦呼應 《總綱》的理念與願景，從**數學是一種語言、一種實用的規律科學、也是一種人文素養**出發，意圖讓學校的數學課程設計能和這些特質密切搭配，以提供每位學生有感的學習機會。在該理念中亦期許數學史能落實於課程中的應用與實踐，這樣的期許與重視我們可以從《數學領綱》的文字變化窺知一二，在《數學領綱（105 年）》的基本理念之一：「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」，其中內容描述：「**…數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異，…**」，相較於《數學領綱（107 年修正版）》 ：「**…數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效，…**」（前後省略文部分表示未做任何修正）。由上述二段文字可以看出，對於數學史融入數學學習的目的與意義描述，不僅字數增加且更加具體，顯見 HPM[7]在數學的教學或學習上確實已很有存在感了。

然要落實這些理念，教科書是最直接且有效的方式之一，我國自民國 91 年開始，國中教科書全面開放，各家廠商深耕至今已有 20 年之久，不論是知識內容、排版設計、週邊教材資源皆已完備。因此，國內教科書對於扮演傳達知識、技能學習的功能，是無庸致疑的，然而在實踐核心素養的課程內容上，不論是教材安排或課綱說文，其內容往往受限於教科書的諸多編輯規範而無法有具體實踐。筆者即以目前市占率最高的三家出版商（以甲、乙、丙稱之）之七年級教科書內容做比較，結果如表 1 所述。

表 1 甲、乙、丙版七年級數學教科書之數學史內容分佈統計表

	甲版教科書*	乙版教科書	丙版教科書
七上教科書	5	5	5
七上習作	0	0	1
七下教科書	6	0	5
七下習作	1	1	0
合計（次）	12	6	11

*該版於每一冊末另有跨頁之數學史內容

[7] HPM（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics），簡單地說，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。讀者可參閱「台灣數學史教學會」HPM 發刊詞，https://hpmsociety.tw/hpmnewsletters/。

從表 **1** 可發現教科書中對於數學史融入教學的次數，甲、丙二版相對較為豐富，另外甲版在每一冊末還附有跨頁的數學史專文，顯示重視數學史的誠意十足。筆者再依據三版對於數學史融入教科書呈現方式做分析，約略可分為「提供概念媒介」、「拓展知識深廣」、「認識數學大師」、「賞析古今習題」等四類，如表 **2**。

表 **2** 甲、乙、丙版七年級數學教科書之數學史融入教學策略分類表

融入教學策略	甲版教科書	乙版教科書	丙版教科書
提供概念媒介	**質數篩檢法**	**質數篩檢法**	**質數篩檢法**
拓展知識深廣	＋、－符號的由來、代數、平面坐標、不等符號、幾何學起源	0 的故事	平面坐標、不等符號、算籌、萊因德紙草書、梅森質數、潘洛斯三角形、畢達哥拉斯的音樂
認識數學大師	劉徽、埃托斯特尼、笛卡兒、巴斯卡、歐幾里得	埃托斯特尼、哥德巴赫、丟番圖	丟番圖
賞析古今習題	算法統宗（習作）	算法統宗（習作）	伊斯蘭遺產、九章算術粟米互換（教科書）

其中，在「提供概念媒介」類，希臘數學家埃拉托斯特尼的質數篩檢法是共同出現在質數單元作為尋找質數的引導策略，「拓展知識深廣」則明顯說明諸多的數學知識概念可以藉助於數學史的洞察而獲得，至於各版本在「認識數學大師」類別中，其數學家出現的頻率，或許是基於各版本對於數學知識的取捨準則，故比例雖有所懸殊亦無不妥之處，不過難得一見的是在「賞析古今習題」類別中，三家版本不論是教科書或習作都有引進數學史（算法統宗、九章算術）的例題做演練。唯上述相關內容大都以「小櫥窗」、「補給站」、「萬花筒」等方式呈現，即使甲版的數學史跨頁專文亦僅能安排於冊末，這些似乎都隱涵著數學史角色傾向於學生自主學習，或許一般數學能力的培養仍是所有大考的主要指標。

慶幸的是，隨著 **108** 課綱施行，國中階段最明顯的不同就是增加學科彈性課程的設計，以數學學科為例，從原本重結構的學科知識也企圖解構重組，轉變為建模探究的應用知識，亦期成為可以作為表達論述的溝通工具。基於此，在表 **1** 及表 **2** 的教科書分析之後，本文即嘗試以數學史作為提升數學學習的智性工具之一，企圖在彈性課程的完整時間中能「**正式地**」扮演知識溝通或傳達的媒介，藉由認識數學的文化面向，讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，以彰顯數學知識的人文價值（數學領綱，**107**）。限于篇幅本文謹依表 **2** 之前【**提供概念媒介**】與【**拓展知識深廣**】二類，設計二則相對應之數學史閱讀文本內容，與同好者參考並指正。

【提供概念媒介】主題：綁蝴蝶結的地球腰帶

文本內容簡述：

地球周長大約 **40000** 公里，若有條 **40000** 公里長的緞帶，理論上是正好可以為地球圍個腰帶，若再加長 **10** 公尺，應該可以打個漂亮的蝴蝶結了，如圖 **1**。現在，我們若將蝴蝶結打開，再將此緞帶的二頭連接起來，你覺得所圍的緞帶環形與地球腰圍之間的縫隙是多少？是否會薄如紙片？畢竟地球有 **40000** 公里長，再加 **10** 公尺也應該只是稍為寬鬆些吧？！但真是如此？

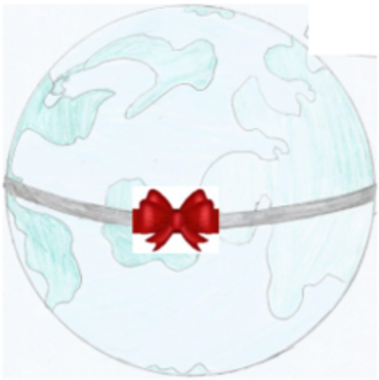


圖 1

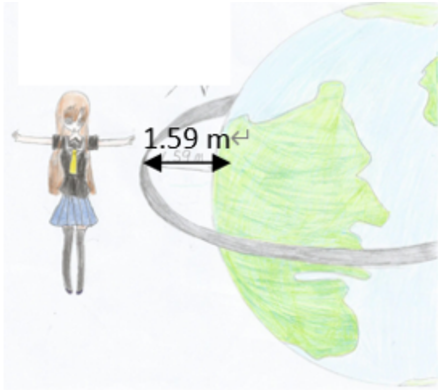


圖 2

面對七年級學生，可以直接先從地球約有 **40000** 公里長開始進入討論。假設地球圓周長 D =**40000** 公里，那麼半徑 $r = \frac{D}{2\pi}$ 公里。又已知所增加的蝴蝶結長度是 **10** 公尺，那麼緞帶環形與地球腰圍之間所產生的縫隙 G 就是緞帶長增加 **10** 公尺後的地球半徑長減去原來的地球半徑長，寫成數學式子如下：

$$G = \frac{D+10}{2\pi} - \frac{D}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59 \text{ 公尺}$$

這產生的縫隙 G 不僅沒有薄如紙片，甚至比我們伸開雙臂的長度還長，如圖 **2**。更不可思議的是，觀察上述的計算過程，這縫隙竟然與地球的周長完全無關。或者說它不僅與地球的周長無關，也代表所有增加的空隙（G）都與圓形半徑大小無關，不管它是棒球還是地球！

文本設計目的

七年級學生是正要從算術演算階段跨入代數思維的階段，毫無疑問地，這樣的一個算式是代數問題，在算術裡面我們一次解決一個問題，而在代數裡我們卻可以提供一個一般性法則。如果我們給予的是一個棒球或籃球，或許他們可以猜測出接近的答案，但一個地球顯然無從著手了，所以只能憑直覺應該是薄如紙片吧，而當答案是一個手臂般

長度時自是驚訝不已，然而這樣超乎想像的結果正是讓他們崇拜代數魅力的契機。

此外，本文本設計也可以針對八或九年級的學生學習，那就是緊接著探討地球周長是如何測量而來？地球的周長就是繞地球一圈的距離。現代的知識已讓我們知道在赤道附近測量，周長約為 $\mathbf{40,075.017}$ 公里。然而，這數字可以如何測得？

古希臘時期埃及「亞歷山大圖書館」館長埃拉托索尼（**Eratosthenes**）（約公元前 **276–194** 年），就已知道亞歷山卓城正南方的賽伊尼（**Syene**）城，有一口井，每年夏至時，太陽光會直射井底，如圖 **3**。所以，他想到了一個測量地球周長的辦法，就是在同一個時間，在亞歷山卓城的 **A** 處垂直立一竿子（$\boldsymbol{d}$），竿子影長（$\boldsymbol{l}$），賽伊尼（**Syene**）城即 **S** 處，如圖 **4**。然後他測得垂直竿子與陽光（因為太陽離地球甚遠，故通過 **A** 點的陽光都與 **OS** 平行）所夾的角度 $\boldsymbol{\theta = 7.2}°$，而此夾角亦為$\widehat{\boldsymbol{AS}}$ 在球心 **O** 所張的角度。

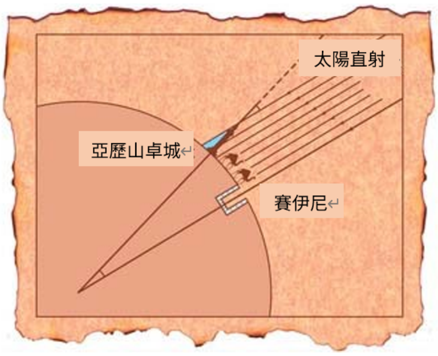


圖 3

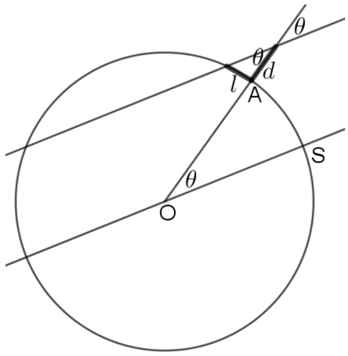


圖 4

透過測量，埃拉托索尼得到從亞歷山卓城 $\boldsymbol{A}$ 處到賽伊尼（**Syene**）城**S**處的距離等於 **5000**希臘里。於是，地球周長可以計算公式如下：

$$\mathbf{5000}\ \text{希臘里} \times \frac{\mathbf{360}}{\mathbf{7.2}} = \mathbf{250,000}\ \text{希臘里。}$$

希臘里有多長？有一說 **1**希臘里等於 $\mathbf{157.5}$ 米（埃及長度單位，相當於 $\mathbf{0.1575}$ 公里），則得到地球周長約$\mathbf{250,000 \times 0.1575 = 39375}$ 公里。

這測量的數字與我們現在科學所測量的數據誤差已經不到 **2**%。更何況，以現今科學儀器測量賽伊尼實際位置並不是在亞力山卓的正南方，二地還有約 **2** 經度的誤差。所以，時間退回到**2300**多年前，沒有測地衛星，沒有現代精密儀器，僅利用對平行線內錯角或同位角相等概念，以及圓心角對周角度數比等於對應弧與圓周長的比，這樣的基礎幾何知識，就為人類做出如此巨大的貢獻。面對這樣一位對世界有著深刻而全面理解的學者，真是不得不讓人肅然起敬了。

課後學習活動

明朝官員的腰帶是束而不繫的，也就是只用細繩繫於腋下衣肋之際，沒有束腰作用，是純粹的裝飾用具，主要是顯示佩戴者的身份地位，如圖 5。因為腰帶上的裝飾品是按照明代的衣冠制度來確定，不會因為某人的腰粗腰細就隨意改變大小和數量，如圖 6 示例。所以，當吾人把這些東西都拼湊在一起，用皮革或其他材料做成腰帶時，就明顯要比腰更大，這也難怪官員需要「撩袍端帶」以顯氣度了。 根據史書記載，像這樣一條腰帶，配上完整飾品之後，長度會在一米八到兩米之間。而現代一般中年男性的標準腰圍（按醫生囑咐）最多不要大於90公分，所以，明朝官員腰帶若以180公分且為中年男性，其腰圍以90公分來做個換算，那麼利用上述簡單的腰圍空隙概念，請回答下列問題：

圖 5

圖 6

(1) 明朝官員的腰帶與他腰部表面的空隙為多少？
(2) 此空隙大約是我們幾個手掌張開的距離？

【拓展知識深廣】主題：我又不是要你畫圓為方

文本內容簡述

在希臘，若對某人說：「**我又不是要你『化圓為方』！**」意思就是：**又不是要你做一件你（永遠）做不到的事！**但他們為何會用「化圓為方」引伸為非能力所及之事呢？那是因為古希臘可說是幾何的發源地，對於幾何的喜好已幾近到可以完美想像的境界，就好比我們即使畫了一個完美的圓，希臘數學家還會說最完美的圓在心中！除非你能證明自己所畫的圓就是完美的。他們認為所謂的真理，只有透過一層一層的演繹推論，一步一步的合理堆疊，才能使人信服。所以，他們不僅無法接受使用有刻度的直尺畫出線段長，更對尺規作圖做了一些限制。比方說：

古希臘時期的尺規限制

- 通過兩個已知點，作一直線。
- 已知圓心和半徑，作一個圓。
- 若兩已知直線相交，確定其交

不幸地，「化圓為方」在幾何作圖中，就是一個無法利用尺規作圖完成的一個命題。所謂的「化圓為方」就是指利用直尺和圓規在有限制的條件下，求作一個正方形，使其面積等於一個給定圓的面積，如圖 7。這樣的作圖條件使得原本看似簡單的幾何作圖，產生了一些無法操作的結果，但也因為這些限制導致了一些著名的數學作圖難題，而「化圓為方」便是其中之一。[8]

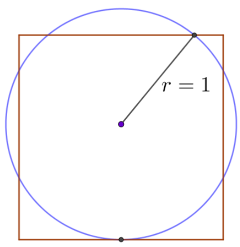


圖 7

現在假設給定的單位圓半徑為 1，且已知圓面積公式＝圓周率(π)×半徑×半徑，即得圓面積＝$\pi \times 1 \times 1 = \pi$。所以要畫出等面積的正方形，就相當於要找到正方形邊長，使得正方形邊長×邊長的面積等於 π，亦即此邊長為 $\sqrt{\pi}$。換句話說，就是要利用尺規作圖畫出 $\sqrt{\pi}$ 的線段，但這個尺規作圖在西元 1882 年時，數學家林德曼證明了該問題僅用尺規作圖是無法完成的，問題在於無法使用尺規作出 $\sqrt{\pi}$ 的長度。

不過，儘管數學家無法依照尺規作圖限制作出$\sqrt{\pi}$ 的線段，歐洲文藝復興時代的大師達文西仍舊能用他那藝術創作的才華，繞個彎「完成」化圓為方這項不可能的任務。他

[8] 古希臘數學中，化圓為方和三等分角、倍立方被並列為尺規作圖三大難題。可參考 Bunt, Lucas N. H., Jones, Phillip S., & Bedient, Jack D. (2019)。數學起源：進入古代數學家的另類思考（黃美倫等譯）。台北：五南（原著出版於 1988）。

的作法是使用一個圓柱體，令該圓底面半徑為r，柱體高度為圓底面半徑的一半（即$\frac{r}{2}$，然後將側面在平面上滾動一周，得出一個矩形長（a）為 $2\pi r$，寬（b）為$\frac{r}{2}$（即圓柱體的高），如圖 8。所以平面上滾動出來的矩形面積$S = 2\pi r \times \frac{r}{2} = \pi r^2$，也可以說「化圓為矩」了。

圖 8

接著將長方形面積化為相等面積的正方形，就如大家所知道的，只要以長方形的長與寬的和為直徑做一半圓，此處直徑$\overline{AC} = 2\pi r + \frac{r}{2} = a + b$，再以 $\overline{BE}$ 為正方形一邊長（$\overline{BE} = \sqrt{ab}$），做一正方形，如圖 9，即可利用比例中項概念證得長方形面積等於正方形面積，亦即，$\overline{BE}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC} = a \times b = \pi r^2$，因為$\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{BE} : \overline{BC}$，也就「化矩為方」了，這樣是不是簡單多了？

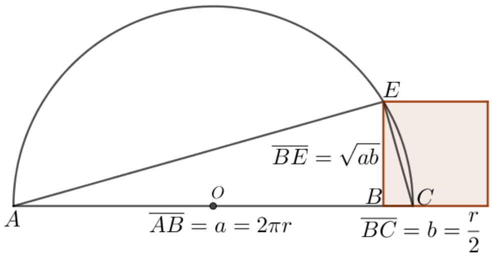


圖 9

當然，在希臘數學家的眼中，這種方法只是取巧，一來不精確（萬一不小心手抖了一下怎麼辦？），這似乎犯了希臘人的天條，讓幾何不完美。二來用現代語來說就是太犯規，因為用了直尺、圓規以外的工具。這又犯了希臘人崇尚嚴謹推論的美德。 但一旦跳脫這尺規「桎梏」，在方圓之間，以藝術創作價值看待時，似乎更顯數學魅力了。

文本設計目的

數學家一直是認真看待「化圓為方」這樣的數學問題，使得這樣的內容本就可深可淺，但在拓展數學知識的同時，仍是希望數學也能更靠近大家一點。所以下次，當你希

望你的朋友可以幫你完成某件有點困難、但又不是完全不可能的任務時，不妨改對他說：我又不是叫你「化圓為方」！

課後學習活動

1. 下圖 10 是在德國一家名為李奧納多達文西飯店的 logo 設計，看得出來飯店老闆對達文西的「化圓為方」是極為鍾愛的，但可惜的是進到飯店內的各樓層房間前的走廊地毯上的圖案，如圖 11，不知讀者可觀察到了有何異樣？

圖 10


圖 11

2. 我們都看過蚊香片，如圖 12，也看過更細的艾草蚊香片，如圖 13，如果將環形蚊香想像成更細的針線條一圈一圈盡可能緊密地圍成一個半徑為 1 的圓圈，如圖 14，然後再朝圓心處剪開，再將每段針線條拉直，由內至外一條一條地由上至下排列整齊，是不是就可得到如圖 15 的直角三角形？那麼圖 15 的直角三角形面積與圖 14 的圓面積有何關係？


圖 12


圖 13

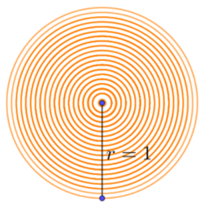


圖 14


圖 15

結語

本文內容僅提供一個在中學的彈性課程中實踐數學史文本的可行性，至於內容深淺

或是針對不同層次的學生該如何應用，相信以數學教師的專業評估自是能有更為深入淺出且匠心獨巨的適切安排，筆者謹以上述二則文本，呈現數學家們面對數學問題的思維與解決方式，或是讓數學再靠近我們的生活。誠如 Lockhart（2013）所說，數學上的技巧，就如同其他藝術裡的技巧，應該是配合背景而為的。偉大的問題、問題的歷史、創意的過程—這些才是完整的背景，而數學史正可以提供這樣背景的功能。

參考文獻

南一教師網（2023，9 月）。國中數學電子書（七上、七下）。https://trans.nani.com.tw/NaniTeacher/

國家教育研究院（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域。臺北市：作者。

國家教育研究院（2022）。十二年國民基本教育課程綱要總綱。新北市：作者。 取 自 https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52

康軒雲（2023，9 月）。國中數學電子書（七上、七下）。https://945cloud.knsh.com.tw/index.asp

維基百科（2023，9 月）。作圖公法。https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B0%BA%E8%A7%84%E4%BD%9C%E5%9B%BE

翰林行動大師（2023，9 月）。國中數學電子書（七上、七下）。https://edisc3.hle.com.tw/edisc_v3/index.html?t=1683302263

蘇惠玉（2003）。〈三大作圖題〉，《HPM 通訊》，6(6)， 3-10。

Bunt, Lucas N. H., Jones, Phillip S., & Bedient, Jack D. (2019) 。數學起源：進入古代數學家的另類思考（黃美倫等譯）。台北：五南（原著出版於 1988）。取自 https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52

Lockhart, P. (2013). 一個數學家的嘆息（高翠霜譯）。臺北市：經濟新潮社出版（原著出版於 2009）。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：https://www.hpmsociety.tw/**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）
孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）
陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！