

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）  
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）  
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
英家銘（清華大學）  
創刊日：1998年10月5日  
網址：<https://www.hpmsociety.tw/>  
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

## 第二十五卷第三期目錄 (2022年9月)

- 大數的命名與實際用途  
.....洪萬生
- 「雞兔同籠」數學史學習工作單編製  
探討 .....蘇意雯
- 推薦《不用數字的數學》  
.....洪萬生

## 大數的命名與實際用途

洪萬生

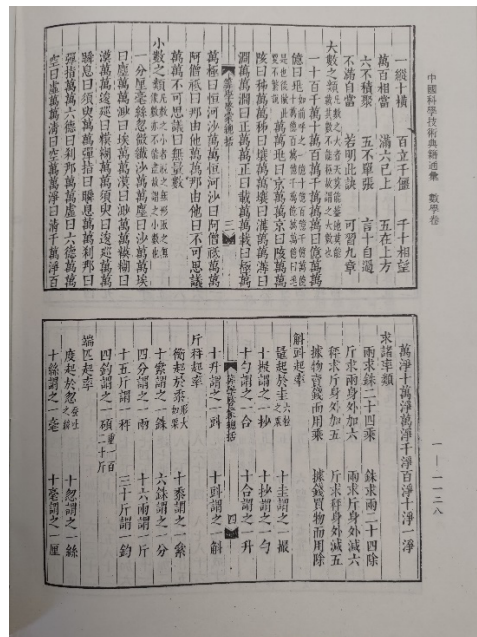
臺灣數學史教育學會

我們的日常經驗中，有機會接觸大數的概念，多半來自佛經的描述。試以《金剛般若波羅蜜經》為例，我們隨意翻閱即可發現下述句子：

若有善男子、善女人，初日分以恆河沙等身布施，中日分復以恆河沙等身布施，後日分亦以恆河沙等身布施，如是無量百千萬億劫以身布施。

其中，「恆河沙」一詞亦見於中國元朝朱世傑的《算學啟蒙》（1299）（參考圖一）。在佛經、算書的「雙向夾攻」下，像「恆河沙」這樣的大數概念，應該是吾人用語之「日常」才是。不過，好像寥寥幾個「小數」用詞，譬如須臾（ $10^{-15}$ ）、瞬息（ $10^{-16}$ ）、彈指（ $10^{-17}$ ）、剎那（ $10^{-18}$ ）比較常見。這是否也表示古代中國人與印度佛教徒一樣重視時間？我們還無法提供有趣的說明。

然而，事實並非如此。就記數單位來說，「恆河沙」代表  $10^{52}$ ，也就是 1 的後面跟著 52 個 0。我們且尋找它在《算學啟蒙》「大數之類」中的位置：



圖一：《算學啟蒙》「總括」大數與小數

一、十、百、千、萬 ( $10^4$ )、十萬、百萬、千萬、萬萬曰億 ( $10^8$ )、萬萬億曰兆 ( $10^{12}$ )、萬萬兆曰京、萬萬京曰垓、萬萬垓曰秭、萬萬秭曰穰、萬萬穰曰溝、萬萬溝曰澗、萬萬澗曰正、萬萬正曰載、萬萬載曰極、萬萬極曰恆河沙 ( $10^{50}$ )、萬萬恆河沙曰阿僧祇、萬萬阿僧祇曰那由他、萬萬那由他曰不可思議、萬萬不可思議曰無量數 ( $10^{68}$ )。

針對這些數詞，朱世傑提供了一個備註：「凡數之大者，天莫能蓋，地莫能載，其數不能極，故謂之大數也。」在此，朱世傑顯然「詞窮」，因為「其數不能極」的「極」與「萬萬載曰極」的「極」意義當然不同。不過，中算家的大數興趣好像只是到此為止，因為朱世傑在他的這部（後來深刻影響韓算、和算）的算學經典中，並未使用到這些數詞，亦即在他的題問中，這些大數名詞從未出現。

然則這些數詞又是從何得來？中國南北朝時代的《孫子算經》記載了度量衡單位，其最大者為「載」。我們先引述該算經的「大數之法」：

凡大數之法，萬萬曰億、萬萬億曰兆、萬萬兆曰京、萬萬京曰垓、萬萬垓曰秭、萬萬秭曰穰、萬萬穰曰溝、萬萬溝曰澗、萬萬澗曰正、萬萬正曰載。

可見，朱世傑引述《孫子算經》的可能性無法排除。

另一方面，該算經作者孫子（不知是誰？）的確在「量」制單位說明時，引用這些大數如下：

量之所起，起於粟。六粟為一圭，十圭為一抄，十抄為一撮，十撮為一勺，十勺為一合，十合為一升，十升為一斗，十斗為一斛。斛得六千萬粟。所以得知者，六粟

為一圭，十圭六十粟為一抄，十抄六百粟為一撮，十撮六千粟為一勺，十勺六萬粟為一合，十合六十萬粟為一升，十升六百萬粟為一斗，十斗六千萬粟為一斛。十斛六億粟，百斛六兆粟，千斛六京粟，萬斛六垓粟，十萬斛六秭粟，百萬斛六壤粟，千萬斛六溝粟，萬萬斛為一億斛，六澗粟，十億斛六正粟，百億斛六載粟。

因此，在說明「量制」的起源時，孫子顯然應用了大數數詞，這種「應用」關乎度量衡制的「正當性」（或文化傳統的「神聖性」），看來應該觸及無用之為用的「大數」之核心意義吧。至於孫子的進一步「修辭」（rhetoric），不妨參看《孫子算經》卷上涉及沒那麼大的「大數」之計算題，請參考其最後一題：

以五十三萬一千四百四十一乘七十萬八千五百八十八，得三千七百六十五億七千二百七十一萬五千三百八。三十五萬四千二百九十四人分之，人得一百六萬二千八百八十二。

儘管如此，中國古代數學家對於絕對大數的著迷，畢竟遠遠不如希臘或印度數學家。數學家曼弗德（David Mumford）指出：中國、印度和希臘這三個古代數學文明的早期發展都離不開天文學，然而，卻只有印度人會針對時間，問出「類似『一時』（yuga，也譯成『宇迦』）有多長，並繼續質問類似的『一大時』（mahayuga，『摩訶宇迦』）或一劫（kalpa）有多長的問題。」另一方面，希臘的阿基米德也著迷於所謂的「牛群問題」，目前數學家藉助於計算機，已經解決此一問題，但其答案多達 140,000 位數，而且是佩爾方程式（Pell equation）的解。這種方程的求解是古代印度數學家的強項，我們另文再介紹。

阿基米德的牛群問題載於他的《數沙者》（*The Sand Reckoner*），該書是否傳到印度？我們還不得而知。不過，在阿基米德之後三百年，印度《方廣大莊嚴經》紀錄了釋迦牟尼出家前（本名喬達摩）的一則插曲，充分說明古代印度人對於大數（以及小數）是如何的狂熱。

根據卡普蘭（Robert Kaplan）的《從零開始》之轉述，喬達摩王子曾和其他年輕人一起爭取迎娶耶輸陀羅公主的機會，他在摔角、箭術、賽跑、泳技和書藝上都輕騎過關，最後一項是競技者必須為拘胝（即一千萬， $10^7$ ）以上的數量詞命名，各數量詞之間必須相差一百倍。於是，「喬達摩回答：阿由多、尼由多、更割羅、頻婆羅、阿芻婆、毘婆訶、鬱僧迦、婆呼羅、那迦婆羅、底致婆羅、卑波婆他般帝椰（ $10^{29}$ ），接著令人頭昏眼花的僧合怛覽婆（ $10^{37}$ ），以及會讓舌頭打結的毘僧以若跋致（ $10^{47}$ ），最後甚至到怛羅絡叉（ $10^{7+46} = 10^{53}$ ）。」但這也不是最後一個數量詞，卡普蘭繼續說：「跟阿基米德一樣，這只不過是喬達摩的第一層數量詞而已。他的第二層數量詞可以達到  $10^{7+2 \times 46} = 10^{99}$ ，最後他甚至屬到第九層，也就是  $10^{7+9 \times 46} = 10^{421}$ 。」

喬達摩最後當然贏得美人歸。誠然，「努力計算不合理的大數，不僅能拓展想像力，也是贏得尊敬的途徑」。無獨有偶，聽說李安導演在台灣拍攝《少年 P 的奇幻漂

流》電影時，有一位年輕人只靠著背誦圓周率的許多位數，就獲得工讀的機會。無論如何，喬達摩成佛之後，果然開示弟子說：「至此數已，一旦眾生皆不能知。唯除如來及最後身菩薩方能解爾」。不過，這種「記數素養」要是有了印度數碼 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，以及如同上述十進位制的記數方法（含指數形式），那麼，想要表達再怎麼超大的數，當然都不再是問題了。這就是為什麼印度人發明這套十進位制數碼，會成為數學史上最重要的事件之一了。

在本文中，我們還有一些問題未解。首先，孫子如何將「大數之法」與「量制」結合？其次，這些大數及小數的數詞最早隨著佛經傳入中國的中譯原貌，究竟如何演變成《孫子算經》與《算學啟蒙》的名稱？第三，有關小數的數詞並未在《孫子算經》出現，但是，朱世傑卻將它收入《算學啟蒙》的「小數之類」，且加註說：「凡數之小者，視之無形，取之無像，數亦不能盡，故謂之小數也。」他的動機何在？所有這些問題，都值得進一步的研究。

# 「雞兔同籠」數學史學習工作單編製探討

蘇意雯

臺北市立大學數學系

九年一貫數學領域課綱中曾強調「教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化」(教育部，2008)，現今的十二年國教數學課綱也提到「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異」，並強調在教科用書的編寫中可以適當編入數學史、民族數學以及數學家的介紹，「以引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並了解不同性別者的成就與貢獻。」(教育部，2018)。由上所述，可見數學史在中、小學階段的數學教學上是值得關注的面向。

臺灣現行國小數學課本裡的雞兔同籠問題，相信大家都不陌生，小學生通常能用列表的方式加以解答，教學者可以結合小學生已有的知識基礎和生活經驗，對此類數學題進行多角度的解法探討(李樹清，2009)，在一題多解中培養數學思維的廣闊性(王建，2010)。也就是說，可以利用類似雞兔同籠的問題說明嘗試錯誤、有規律嘗試錯誤、邏輯推理、代數解法之間的關聯及重要性(李源順，2020)。「雞兔同籠」對六年級的學生而言是最難達到精熟的概念，因此針對此主題，可以利用奠基活動提升學生解題表現(陳欣民，2020)，也可以發展問題解譯多媒體教材，進行實驗研究教學(鄭郁婷，2010)。雞兔同籠問題首先出現於中國數學書《孫子算經》，之後這個問題流傳到日本，演變成鶴龜算問題。由於鄰近臺灣的地利之便，日本旅遊往往受到國人青睞，日本的影劇和動漫對於青年學子更不陌生。因此研究者探討相關數學史文獻進行整理，並與日本數學連結，搜尋日本數學典籍，編製成數學史學習工作單，讓學生嘗試以古算家思維用算術方式思考，體會數學解題和文化交流的樂趣(蘇意雯，2022a)。

雞兔同籠題目早在西元第五世紀的中國數學書《孫子算經》中就已經出現。在《孫子算經》卷下的第三十一題是雉兔問題：「今有雉、兔同籠，上有三十五頭，下有九十四足。問雉、兔各幾何？」這題的答案是雉有二十三頭，兔有一十二頭。《孫子算經》隨後提供了解法，也就是「上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多，再命之，上三除下四，上五除下七。下有一除上三，下有二除上五，即得。」這裡的意思是說，頭有 35 個，腳有 94 隻，先把腳除以 2，得到 47。再把 47 減去 35，得到 12，也就是兔子有 12 頭，從而得出雞有 23 頭。

為什麼可以這樣求解呢？主要的想法是先將腳數除以 2，這樣每隻雞都僅有一隻腳，每隻兔子也只有兩隻腳。如此一來，雞的腳數和頭數一樣，每隻兔子的腳數比頭數多 1。如果都是雞的話，應該有 35 隻腳，可是現在有 47 隻腳，每將一隻雞換成一隻兔子，腳數就會增加 1。47 減去 35 得到 12，也就是說有 12 隻雞被換成兔子。既然兔子有 12 頭，那麼雞就是 35 減去 12，也就是 23 頭。之後《孫子算經》又布置了算法口訣：「上置頭，下置足。半其足，以頭除足，以足除頭，即得。」。

事實上，在《孫子算經》卷下的第二十七題就已經出現類似的題目，不過大概是因為題目安排了非尋常物種，所以才未廣為流傳。這個題目是：「今有獸六首四足，禽四首二足。上有七十六首，下有四十六足。問禽、獸各幾何？」這題的答案是「八獸，七禽。」，《孫子算經》在答案之後一樣提供了算法的口訣：「倍足以減首，餘半之即獸。以四乘獸，減足，餘半之即禽。」。也就是說，將足數乘以 2 倍減去頭數，就是 46 乘以 2 得到 92 之後，減去 76，所得 16 除以 2 得到 8 就是獸的數量，將獸的數量 8 乘以 4 得到 32，全部的足數 46 減去獸的足數 32 得到 14，再將所得 14 除以 2，就得到禽的數量 7。

明代數學家程大位於 1592 年完成的數學書《算法統宗》中，承續吳敬於 1450 年成書的《九章算法比類大全》，也出現過類似的題目：「今有狐狸一頭九尾；鵬鳥一尾九頭。只云前有七十二頭，後有八十八尾。問二禽獸各若干。」，另外程大位也同樣布置了三足團魚六眼龜的問題，我們將在其後介紹。

中國的數學傳到日本之後，日本的數學家經過融會貫通，逐漸發展出屬於日本獨特風貌的數學。因為日本人自稱大和民族，所以日本本土數學也被稱為「和算」。就像我們常聽到的吉祥話「龜年鶴壽」一般，龜和鶴在日本都是長壽的象徵，因此，日本數學家就將中國的雞兔同籠問題發展成鶴龜問題。1815 年和算家坂部廣胖的《算法點竄指南錄》中，就有一題「某處有鶴龜百頭，只云足數和為二百七十二，問鶴、龜各幾何？」的鶴龜問題。這題的答案是鶴數 64，龜數 36。坂部廣胖的作法是先將 100 當作是龜的頭數，此時足數應該為 400。但是事實上足數為 272，少了 128，所以鶴數為 64，自然也就得出龜數為 36。

有趣的是，在鶴龜算出現之前，日本也出現過《孫子算經》中雞兔問題的變形，也就是從兩種動物變成三種。例如 1784 年和算家村井中漸的《算法童子問》一書中就以雞、狗和章魚為主角，這時的場景是雞和狗在庭院，而章魚是躺在切菜板上。題目是這樣描述的「雞、狗、章魚之事。窺廚下，見庭院裡有雞和狗，菜墩上有章魚。庖人曰：三種合有二十四個，足數有百二足。問雞、狗、章魚各幾何？但，雞有二足，狗有四足，章魚有八足。」這個問題作者只給了「狗 3 隻，雞 13 隻，章魚 8 條」、「狗 12 隻，雞 7 隻，章魚 5 條」、「狗 15 隻，雞 5 隻，章魚 4 條」、「狗 18 隻，雞 3 隻，章魚 3 條」、「狗 21 隻，雞 1 隻，章魚 2 條」五個不同的解答，村井中漸也做出解釋「上面足數百貳，合廿四個。若雞兔算中增一種，必外加探討。於是答數不限定于一種，而有若干。」(平山諦，1956/2005)。

之後和算家村井中漸又安排了類似《算法統宗》中跳脫常理的六眼龜和三足蛙的問題：「從高欄上見庭前池，有六眼龜，又有三足蛙。不知其數。足數合為九十三，眼數合為百二。問龜與蛙數各幾何？」。這題的答案是龜數 12，蛙數 15。《算法童子問》書上的解法，很適合讓學生閱讀討論，回想求學經驗，是否學過如此的解法。

從制式的雞兔同籠問題衍伸出數學書上的多種變化題，這正是數學的趣味之處。在熟悉代數算法的現在，讓學生思考古代數學家如何利用算術思維解決問題，這些都是可以給予學生進一步探究的素材(蘇意雯，2022b)，研究者將這些史料，循序漸進布置成數學史學習工作單(如附錄一)，讓學生閱讀欣賞，並進行解題。

關於此份數學史學習工作單第一次的施作，學生對於古文中的「除」是「減」的意思，以及「百二」指的是 102 造成混淆，需要研究者提示，因此在第二次施作時，研究者就直接加註於文本上，經由教學後的問卷調查，發現學生對於「體會到數學解題的樂趣」、「體會算術解題的趣味」、「體會代數解題的便利」、「回顧之前所學過的數學方法」、「了解中日的數學交流」、「了解數學的文化面向」上都有正向的回應(蘇意雯，2022a)。

本研究為「雞兔同籠」數學史學習工作單編製探討，有關數學史素材的搜尋，可以先經由普及讀物著手，對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓素材更為精緻豐富(蘇意雯，2021)。在本研究中，除了中算書原典的搜尋，研究者也藉由平山諦(1956/2005)在《東西數學物語》一書中對於日本鶴龜算的介紹，接續尋找和算書中的相關素材。有關和算典籍，「和算之館」(<http://www.wasan.jp/>)是相當豐富且方便搜尋的網站。

本次實作從臺灣數學教科書中的題材出發，尋找相關之數學史文獻，與日本數學交織串連，編製成數學史學習工作單。研究者反思，編製過程中需要關注的是相關數學史素材資料的搜尋分析，以及所設計之數學史學習工作單是否能符合學生需求，恰當展現數學內容，而能具有文化趣味及教育意含。經由中、日雞兔同籠問題的相關史料，我們正可以得見數學的多樣風情。

## 致謝

本文之得以完成，主要來自教育部教學實踐研究計畫（計畫編號：PMS1100257）之部分研究成果，在此感謝教育部之補助。

## 參考文獻

王建（2010），〈在一題多解中培養數學思維的廣闊性〉，《數學學習與研究》，2010(4)，頁 30-30。

李源順（2020），〈有數學感的教與學：以雞兔同籠為例〉，檢自 <https://reurl.cc/Kj0beg>。

李樹清（2009），〈雞兔同籠問題的解法探討〉，《教育實踐與研究》，2009(3A)，頁 50-51。

陳欣民（2020），〈奠基進教室提升小六學生解題表現之研究：雞兔同籠〉，《臺灣數學教師》，41(2)，頁 44-58。

教育部（2008），《國民中小學九年一貫課程綱要》。臺北市：教育部。

- 教育部 (2018), 《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》。臺北市：教育部。
- 鄭郁婷 (2010), 《問題解譯多媒體教學策略協助國小六年級學生學習「雞兔同籠問題」之效益研究》, 國立台中教育大學數位內容科技學系碩士論文。未出版, 臺中市。
- 蘇意雯 (2021), 〈中小學數學史教案開發與實作研究〉, 《臺灣數學教育期刊》, 8 (1), 頁 27-53。
- 蘇意雯 (2022a), 〈數學史素材文獻分析與教學實作研究：以「雞兔同籠」問題為例〉, 載於 2022 年《台灣數學教育學會年會暨第十四屆國際科技與數學教育學術研討會論文集》, 頁 144。臺中市：國立臺中教育大學。
- 蘇意雯 (2022b), 〈從雞兔同籠到鶴龜算, 認識古代數學趣題〉。《國語日報》教育 13 版。
- 平山諦 (2005), 《東西數學物語》(東西数学物語), 代欽譯。上海市：上海教育出版社

#### (附件一) 雞兔同籠學習工作單

雞兔同籠問題, 相信大家都不陌生, 事實上這種題目早在西元第五世紀的中國數學書《孫子算經》中就出現了。在《孫子算經》卷下的第三十一題是雉兔問題: 「今有雉、兔同籠, 上有三十五頭, 下有九十四足。問雉、兔各幾何?」這題的答案是雉有二十三頭, 兔有一十二頭。《孫子算經》隨後提供了解法, 也就是「上置三十五頭, 下置九十四足。半其足, 得四十七。以少減多, 再命之, 上三除下四, 上五除下七。下有一除上三, 下有二除上五, 即得。」

問題一：請解釋雉兔同籠的解法意涵。(除是減的意思)

事實上, 在《孫子算經》卷下的第二十七題就已經出現類似的題目, 不過大概是因為題目安排了非尋常物種, 所以才未廣為流傳。這個題目是: 「今有獸六首四足, 禽四首二足。上有七十六首, 下有四十六足。問禽、獸各幾何?」這題的答案是「八獸, 七禽。」, 《孫子算經》在答案之後一樣提供了算法的口訣: 「倍足以減首, 餘半之即獸。以四乘獸, 減足, 餘半之即禽。」。

問題二：請以算術方式求出答案, 並解釋你的算法。

明代數學家程大位的《算法統宗》中, 也出現過類似的題目: 「今有狐狸一頭九尾; 鵬鳥一尾九頭。只云前有七十二頭, 後有八十八尾。問二禽獸各若干。」

問題三：請以算術方式求出答案, 並解釋你的算法。



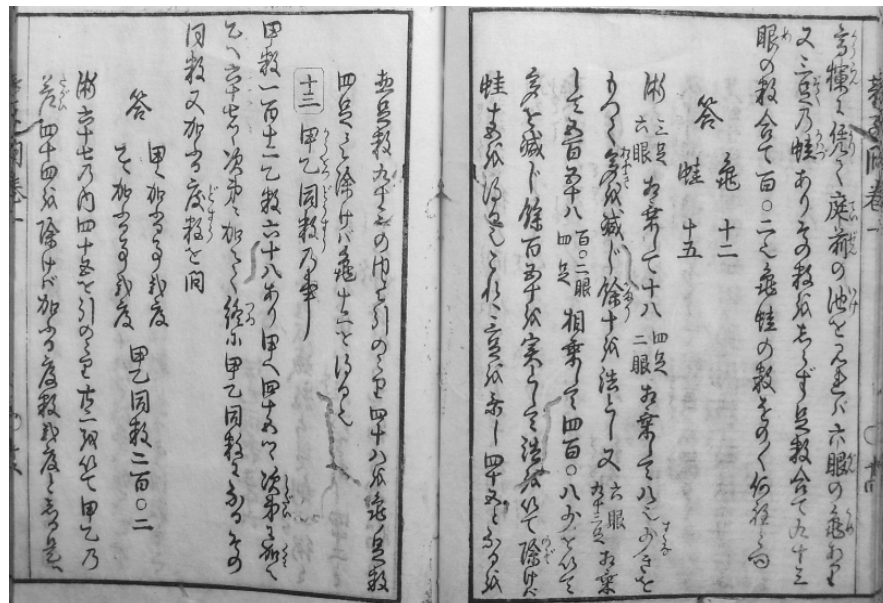
中國的數學傳到日本之後，日本的數學家經過融會貫通，逐漸發展出屬於日本獨特風貌的數學。就像我們常聽到的吉祥話「龜年鶴壽」一般，龜和鶴在日本也都是長壽的象徵，因此，日本數學家就將中國的雞兔同籠問題發展成鶴龜問題。1815 年和算家坂部廣胖的《算法點竄指南錄》中，就有一題「某處有鶴龜百頭，只云足數和為二百七十二，問鶴、龜各幾何？」的鶴龜問題。這題的答案是鶴數 64，龜數 36。坂部廣胖的作法是先將 100 當作是龜的頭數，此時足數應該為 400。但是事實上足數為 272，少了 128，所以鶴數為 64，自然也就得出龜數為 36。

有趣的是，在鶴龜算出現之前，日本也出現過《孫子算經》中雉兔問題的變形，也就是從兩種動物變成三種。例如 1784 年和算家村井中漸的《算法童子問》一書中就以雞、狗和章魚為主角，這時的場景是雞和狗在庭院，而章魚是躺在切菜板上。題目是這樣描述的「雞、狗、章魚之事。窺廚下，見庭院裡有雞和狗，菜墩上有章魚。庖人曰：三種合有二十四個，足數有百二足。問雞、狗、章魚各幾何？但，雞有二足，狗有四足，章魚有八足。」

問題四：請求解此題。(百二是 102)

這個問題的解答不只一種，村井中漸也做出解釋「上面足數百貳，合廿四個。若雞兔算中增一種，必外加探討。於是答數不限定于一種，而有若干。」。之後村井中漸又安排了跳脫常理的六眼龜和三足蛙的問題：「從高欄上見庭前池，有六眼龜，又有三足蛙。不知其數。足數合為九十三，眼數合為百二。問龜與蛙數各幾何？」。這題的答案是龜數 12，蛙數 15。

問題五：請以算術方式求出答案，並解釋你的算法。



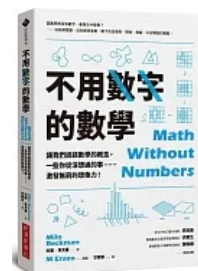
<http://www.wasan.jp/dojimon/dojimon1.pdf>

問題六：請以代數方式求出答案，並閱讀上面文本的解答，想想看作者為何如此求解，試著回想求學經驗，是否學過如此的解法。

## 推薦《不用數字的數學》

洪萬生

臺灣數學史教育學會理事長



本書作者開宗明義就說：「我們相信數學有趣、真實又有用（而且就是依這個順序）。」這個宣示是本書數學家三大信仰的第一則，但已指出本書之旨趣！請注意喔：作者將「有趣」面向擺在首要位置，顯然意在強調即使「不用數字」，數學還是（可以說得）非常、非常有趣！

事實上，由於數學教育改革的主張都十分重視數學的「有用」面向，以便提升學生學習數學的積極動機。不過，這些有用的知識再怎麼融入「生活情境」，數學知識的獨特抽象性，還是很容易讓學習者卻步，而找不到繼續學習的動力。這或許可以說明何以在 108 課綱的教學脈絡中，數學遊戲（魔術）與摺紙會如此受到歡迎。這是因為這些「類遊藝」所涉及的數學知識活動，可以讓教育現場教師分享這些數學的「有趣」面向。

這一類活動所以有趣，還在於它會自然地展現數學知識所蘊含的驚奇（wonder），常常出人意表。作者貝克曼在本書中，以「無字證明」（proof without words）的方式，證明  $\infty \cdot \infty = \infty$ ，按最簡約易解的圖說一體，給了我們最大的驚奇。此外，他「改寫」數學大師康托爾（Georg Cantor）的「對角線證法」，僅僅使用文字（當然沒有數字！），就證明了「一條線（即使是有限長的線）上的點數一定比無窮更多。」這個定理也「啟示」我們：無窮概念可以區分等級，亦即有「無窮」（譬如 1, 2, 3 不停地數下去的「第一階」無窮），也有比無窮「更多」的事物（譬如直線等「連續體」（continuum））存在。在這兩個例子中，論證毋須數字，過程簡約易解，然而，所推論得到的真理（truth）-- 在數學中，我們通稱為定理（theorem）-- 卻極為深刻，讓吾人感受極大的驚奇。

儘管作者強調「不用數字」，但如果讀者還記得若干中學幾何知識，那麼，他所提供的「關於圓的二三事」，就同樣地為我們展現不少「意在言外」的驚喜。試看其中第四則：「一片披薩的下半部只有這片的四分之一」。亦即，在半徑取半之後的下半部（小扇形），只有全部（大扇形）的四分之一。還有，第六則：「任意三點一定可畫出一個圓（直線也可視為半徑無限大的圓）。」面對這一則，先不管你是否還記得「外接圓」的概念，請儘管配合本書「拓樸學」內容深入想像，對於直線與圓之（敘事）連結，一定會有更深刻的感受才是。

這種有關直線與圓的思考，譬如看到它們「形狀」上的差異，通常與我們的直覺相符，也因此，中學（歐氏）幾何學就是「深化」這種吾人日常經驗的一門教育科目，以

幫助我們可以更順利地適應我們的外在世界。不過，如果我們暫時「放縱」一下想像力，想像「直線也可視為半徑無限大的圓」這一句話究竟有沒有道理？還有，也請思考：當我們在討論形狀的「分類」時，本書作者竟然宣稱「在拓樸學中，正方形確實是圓形」，儘管依然他承認「在藝術或建築、日常生活，甚至幾何學中，正方形當然不可能是圓形。如果有一輛自行車的輪子是正方形，這輛自行車一定騎不遠。」

如果上一段這個怪異的「分類」讓你不安，那麼，就請你「暫時忘掉」你所學過的所有中學幾何，「回歸初心」-- 找回吾人最原初的「好奇心」，試想如果讓幼童參考現成的正方形與圓形，分別畫出正方形及圓形，你可以輕易認出哪個是哪個嗎？除非他或她事先經過訓練！對幼童來說，拓樸學的形狀意義比起歐氏幾何的形狀更加「根本」而容易掌握，這是認知心理學家皮亞傑（Jean Piaget）的傑出發現，值得我們面對「形狀」（shape）時，參考借鏡。事實上，作者在這個脈絡中，指出「項鍊用某種方式拿著就是正方形，換一種方式又變成圓形」等等，就是相當有創意的敘事比喻。

我希望上述的「驚奇」所引出來的「好奇」（intellectual curiosity），可以是閱讀本書或其他數學普及書籍「一直以來」的心態。這是因為閱讀有趣的題材而引發的學習動力，始終是數學普及閱讀所著力的心智活動之連結。譬如說吧，作者在介紹數學的抽象性時，強調「我們對世界的理解（在最基本、抽象、初步層級）是建構在對象與對象之間的關係上。」事實上，「數學世界也是一樣，我們所做的一切都可透過這個基本關係來瞭解。」譬如，作者在本書拓樸學單元中所指出的形狀「相同關係」，以及分析學單元中所指出的「更大關係」等等，都是對數學的抽象結構所做的起碼說明，言簡意賅，有助於一般讀者對抽象數學的基本認識。

抽象數學結構如何建立？當然有賴於形式證明（formal proof）。數學理論一旦建立起來，再透過數學建模（mathematical modeling），就可以與我們的外在世界連結，而發揮其不可思議（或者不合理）的效用（unreasonable effects）。這是物理學家威格納（Eugene Wigner）為數學知識本質（nature）所做的重要釐清，也為數學的「真實性」（truthfulness）之論述，增添了不少柴火。儘管此說不無過度簡化數學知識演化過程之嫌，然而，卻是數學「有用」的最佳見證。

當然，數學作為工具面向的「有用」之前提，乃是數學家的三大信仰之第二則：「我們相信『數學證明』這個過程。我們相信證明得來的知識既重要又有力量。」至於第三則信仰則出自基本教義派數學家，他們相信：「植物、愛、音樂以及萬事萬物，理論上都能用數學來解釋。」作者顯然試圖在本書「基礎對話錄」中，提出他如何與這三則信仰對話，真心大白話，哲學立場無從掩蓋，而且也略顯生嫩。

不過，誰在乎呢？請參看他如何區別「拋物線」與「懸鍊線」：左手拋鑰匙類的小物品，再用右手接住，這個路徑是拋物線。把一條細繩掛在牆壁上兩點之間，則其曲線為懸鍊線。「電話線、沒有墜子的項鍊，以及絲絨圍欄帶等，無論什麼材質，都會形成

相同的形狀（順便一提，這個形狀的方程式含有無理數  $e$ 。 $e$  源自對於複利的研究，但複利與細繩懸掛的方程式完全沒有關係。）」

其實，只要看到他如此描述，我就認定他擁有相當高明的數學敘事能力，因此，我要大力推薦本書！有鑑於拓樸學、量子力學以及相對論極有可能成為本世紀下半葉的公民基礎素養，我尤其希望有語文閱讀自信的讀者，一定要特別注意這一類數學普及書籍的問世，因為這攸關公民科學素養的必要選項。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 [suhy1022@gmail.com](mailto:suhy1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhy1022@gmail.com](mailto:suhy1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpsociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

#### 《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研

（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科

學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！