

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
 英家銘（清華大學）  
 創刊日：1998 年 10 月 5 日  
 網址：<https://www.hpsociety.tw/>  
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

## 第二十五卷第二期目錄 (2022 年 6 月)

- 《九章算術·劉徽注》中的「張衡筭」及其對圓周率的估計  
.....英家銘
- 好書推薦：《神秘優雅的數學家日常》  
.....林倉億

## 《九章算術·劉徽注》中的「張衡筭」及其對圓周率的估計

英家銘

國立清華大學通識教育中心/歷史研究所

對數學史有興趣的讀者，大概都知道第一世紀前後編成《九章算術》是東亞數學的代表經典，而劉徽在第三世紀為其所寫下的注解，更是東亞數學的傑作。劉徽注為《九章算術》各個問題的術文提供說明，解釋它們為什麼正確（或錯誤），其中常常為人稱道的部分之一，是劉徽用「牟合方蓋」說明《九章算術》中從球體積求直徑的公式在理論上是錯誤的，亦即已知直徑的球體積公式是錯誤的。這個部分的討論在很多關於早期東亞數學史或《九章算術》的專書及文章都會提及，筆者在此不再重複，有興趣的讀者，可以參考（楊清源、蔡承男、胡秉右、楊峻魁，2021）。不過，在劉徽討論「牟合方蓋」與球體積公式的時候，其實包含了一大段他對前人張衡的評論，十分有趣，但因為那段內容跟牟合方蓋的討論沒有直接關係，一般在講述《九章算術》時皆省略不提。不過，筆者認為其實這一大段話不但有趣，還有其歷史上的意義，在此筆者要跟大家分享那段評論，以及其中關於圓周率的估計。

比劉徽的年代再早約一個半世紀的張衡（公元 78 – 139 年），是後漢帝國著名的天文學家、數學家和文學家。在文學上張衡是漢賦大家，著有《西京賦》、《東京賦》、《歸田賦》等名作；在天文學方面，他在公元 115 年與 126 年兩度任太史令，掌天文曆法，在宇宙模型上主張「渾天說」，製作過渾天儀，著有《靈憲》與《渾天儀注》；在數學上，《後漢書》記載他著有《筭罔論》，現已失傳。劉徽在他討論球體積公式時，提到「張衡筭」，這有可能就是《筭罔論》，也可能泛指張衡的算學。

劉徽的討論起於一個比例，就是《九章算術》認為一個球佔它外切正方體體積的  $\frac{9}{16}$ 。

即使將圓周率視為  $3, \frac{9}{16}$  的比值在理論上仍是錯誤的。從現代球體積公式來看，若球半徑為  $r$ ，直徑為  $d$ ，則球體積

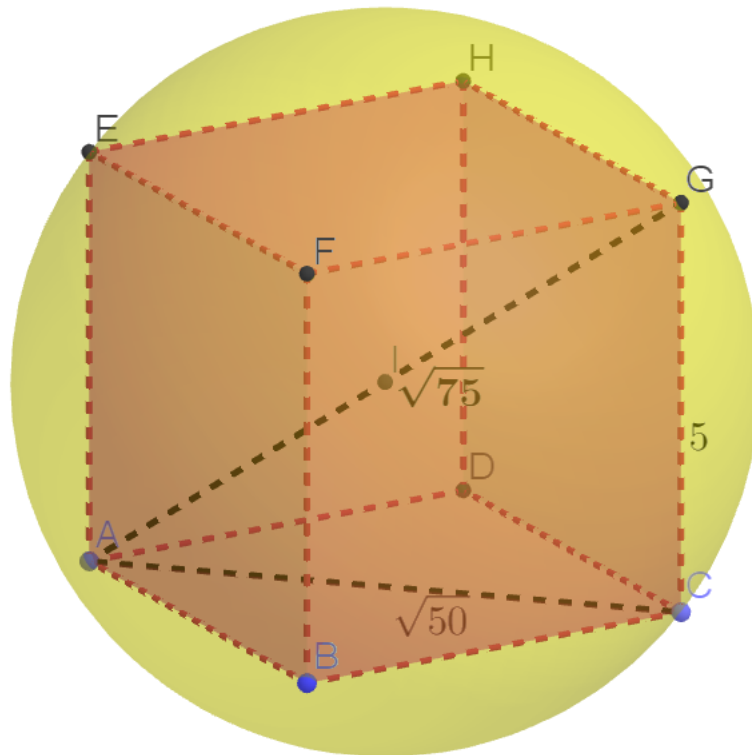
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}d^3。$$

因為  $d^3$  就是球外切正方體的體積，所以理論上若將圓周率視為 3，前面的常數應該是  $\frac{1}{2}$  而非  $\frac{9}{16}$ 。不過， $\frac{9}{16}$  是個不太差的近似值，因為  $\frac{\pi}{6} \doteq 0.5236$ ，而  $\frac{9}{16} = 0.5625$ ，略為高估。

以  $\frac{9}{16}$  這個比例為契機，劉徽開始討論球與其內接及外切正方體的關係。首先，劉徽討論的是球直徑與內接正方體邊長：

假令丸中立方五尺，五尺為句，句自乘冪二十五尺。倍之得五十尺，以為弦冪，謂平面方五尺之弦也。以此弦為股，亦以五尺為句，並句股冪得七十五尺，是為大弦冪。開方除之，則大弦可知也。大弦則中立方之長邪，邪即丸徑。故中立方自乘之冪於丸徑自乘之冪，三分之一也。

如圖一。假設球  $I$  的內接正方體  $ABCDEFGH$  的邊長為 5，其平方為 25。根據畢氏定理，底面對角線  $AC$  平方（弦冪）為  $5^2 + 5^2 = 50$ ，所以  $AG$  的平方（大弦冪）就是  $50 + 5^2 = 75$ ，由此可求得正方體對角線  $AG$ （長邪）的長度，而這個就是球的直徑（丸徑）。也就是說，球直徑  $d$  與其內接正方體邊長  $a$  之間的關係是  $\frac{a^2}{d^2} = \frac{1}{3}$ 。

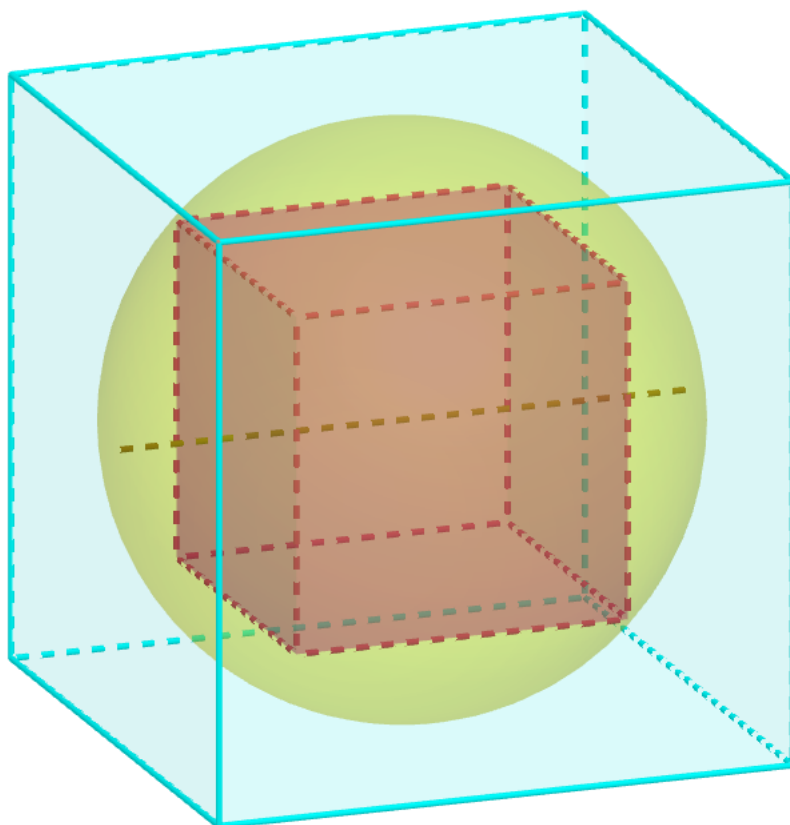


圖一：劉徽注中球直徑與內接正方體邊長討論示意圖

這段球直徑與其內接正方體邊長關係的討論，只需要用到畢氏定理和對稱直覺，在數學上沒有疑義也不難理解。接下來，劉徽就連結到球的外切正方體：

令大弦還乘其幂，即九外立方之積也。大弦幂開之不盡，令其幂七十五再自乘之，為面，命得外立方積，四十二萬一千八百七十五尺之面。又令中立方五尺自乘，又以方乘之，得積一百二十五尺，一百二十五尺自乘，為面，命得積，一萬五千六百二十五尺之面。皆以六百二十五約之，外立方積，六百七十五尺之面，中立方積，二十五尺之面也。

如圖二。由於球的外切正方體邊長即球直徑，所以外切正方體體積為球直徑  $d$  的三次方，也就是  $d \times d^2$ （大弦還乘其幂）。由前一段的數值計算結果得  $d^3 = \sqrt{75} \times (\sqrt{75})^2 = \sqrt{421875}$ （四十二萬一千八百七十五尺之面）。這裡順便要補充的是，在古文中平方根是用某數「之面」來說明，所以  $\sqrt{75}$  就是「七十五之面」。至於球的內接正方體體積，以前一段的數值來計算， $a^3 = 5^3 = 125 = \sqrt{15625}$ （一萬五千六百二十五尺之面）。所以，球的外切與內接正方體體積的比例為  $\sqrt{421875}:\sqrt{15625}$ ，以 625（的平方根）約分，可得  $\sqrt{675}:\sqrt{25}$ 。



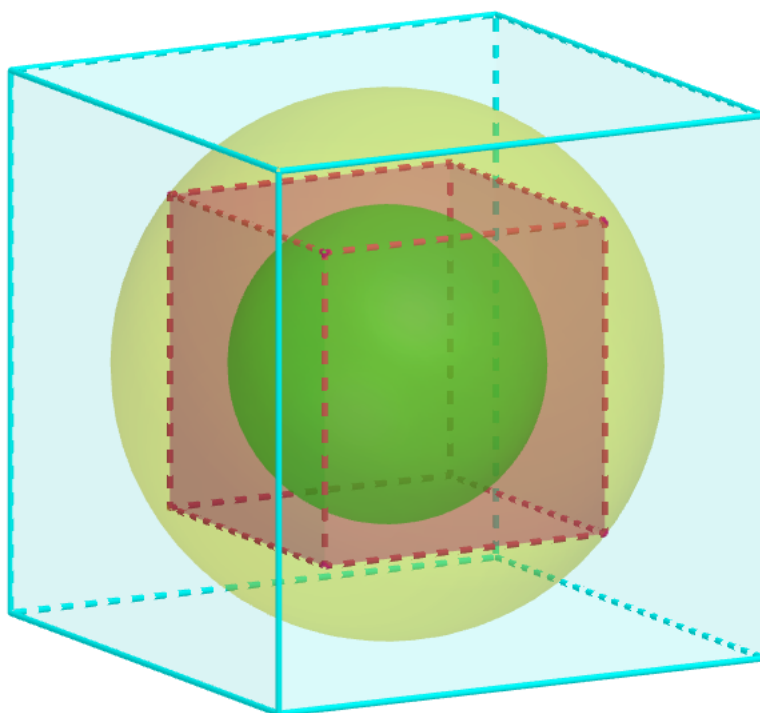
圖二：球與其內接及外切正方體示意圖

到這裡為止的討論，無法確定是劉徽本人或引用張衡的著作。無論如何，在數學上來說，前面的計算與推論都無誤，而且具有一般性。但接下來的論述，劉徽就具體指明是張

衡的想法：

張衡筭又謂立方為質，立圓為渾。衡言質之與中外之渾：六百七十五尺之面，開方除之，不足一，謂外渾積二十六也；內渾，二十五之面，謂積五尺也。今徽令質言中渾，渾又言質，則二質相與之率猶衡二渾相與之率也。衡蓋亦先二質之率推以言渾之率也。

劉徽說「張衡筭」稱立方體為「質」，且稱球為「渾」，接著張衡就開始用前一段的數值討論「質之與中外之渾」，也就是正方體的內切與外接球。等等，前一段的討論是球的內接與外切正方體，怎麼變成拿來討論正方體的內切與外接球了呢？劉徽在後面提出了一個命題，即「二質相與之率猶衡二渾相與之率也」，所以張衡用兩正方體的比例代替兩球的比例。劉徽對於這個命題的解釋十分簡略，只說「今徽令質言中渾，渾又言質」，讓現代學者不容易重建劉徽的論述。筆者的解讀和法國數學史家林力娜（Karine Chemla）類似，可用下面的想法說明。



圖三：「二質相與之率猶衡二渾相與之率也」示意圖

如圖三，我們稱綠色的球為「中渾」，稱中渾的外切棕色正方體為「中質」，稱中質的外接黃色球為「外渾」，而外渾的外切藍色正方體為「外質」。直覺上可以看出，外渾佔外質的比例等於中渾佔中質的比例，即

外渾：外質 = 中渾：中質，

所以

外渾：中渾 = 外質：中質。

即得「二質相與之率猶衡二渾相與之率也」。

有了這個「引理」，回頭看張衡的論述就可以理解，一個正方體的外接與內切球體積之比，會等於前面一個球的外切與內接正方體體積之比  $\sqrt{675}:\sqrt{25}$ 。但 675 開方後不是整數，加 1 得 676 開方後可得 26，所以張衡用 26 作為  $\sqrt{675}$  的近似值，得到一個正方體的外接與內切球體積之比約為 26:5。上面求近似值的過程，似乎沒有太大問題，但根據劉徽的說法，接下來張衡就有另一段比較跳躍的論述。

劉徽的敘述與評論是這樣的：

衡又言：「質，六十四之面；渾，二十五之面。」質復言渾，謂居質八分之五也。又云：「方，八之面；圓，五之面。」圓渾相推，知其復以圓因為方率，渾為圓率也，失之遠矣！衡說之自然欲協其陰陽奇耦之說而不顧疏密矣。雖有文辭，斯亂道破義，病也。

這裡張衡似乎又回去討論一個球佔它外切正方體體積的比例，這裡他說質比渾是  $\sqrt{64}:\sqrt{25} = 8:5$ ，所以球佔它外切正方體體積比例為  $\frac{5}{8} = 0.625$ ，其實已經比《九章算術》

原文的  $\frac{9}{16}$  高估更多。張衡又說正方形與其內切圓的面積比是  $\sqrt{8}:\sqrt{5}$ ，劉徽認為這個估計跟《九章算術》原文的考慮球體積過程中的想法類似，錯誤很大！張衡的宇宙論跟「陰陽」學說有許多的連結，而劉徽在這裡也批評張衡很自然地希望把數學跟陰陽奇偶的說法串起來，但不顧實際計算的數值精確與否，張衡雖然能寫出優美的文辭，但內容讓道理混亂又破壞意義，是完全錯誤的。劉徽在這裡說了很重的話，可見劉徽十分重視論證的邏輯正確性。

接下來，劉徽在簡要使用數值計算說明張衡的估計錯誤之後，他提到另一段論述：

假令方二尺，方四面，並得八尺也，謂之方周。其中令圓徑與方等，亦二尺也。圓半徑以乘圓周之半，即圓冪也。半方以乘方周之半，即方冪也。然則方周知，方冪之率也；圓周知，圓冪之率也。

這段話的意思大致如後。考慮一個邊長是 2 尺的正方形與其內切圓。正方形周長 8 尺稱為「方周」，而內切圓直徑等於正方形邊長，也是 2 尺。圓的半周乘半徑是圓面積（這是《九

章算術》第一章就提過的公式)，而「方周」的一半乘以「半方」，即邊長的兩倍乘以邊長的一半，也是正方形面積。正方形面積是半周乘半方，而內切圓面積是半周乘半徑，但「半方」與「半徑」相等，所以正方形與其內切圓面積比就等於周長比。

上面的敘述在數學上是正確的，同樣地我們不確定這是劉徽自己的話還是引用張衡，但後續張衡的名字又出現：

按：如衡術，方周率八之面，圓周率五之面也。今方周六十四尺之面，圓周四十四尺之面也。又令徑二尺自乘，得徑四尺之面，是為圓周率十之面，而徑率一之面也。衡亦以周三徑一之率為非，是故更著此法，然增周太多，過其實矣。

劉徽說，按照張衡的做法，方周比圓周是  $\sqrt{8}:\sqrt{5}$ 。為了配合前一段方周長 8，也就是  $\sqrt{64}$ ，那麼圓周就要放大為  $\sqrt{40}$ 。這個時候的圓直徑就是  $2 = \sqrt{4}$ ，所以圓周與直徑的比例就是  $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{4}} = \sqrt{10}$ ，也就是「十之面」。劉徽認為這個圓周率的估計很不準確，「增周太多」。

第一世紀編成的《九章算術》，圓周率一律使用 3，到第二世紀的張衡，以  $\sqrt{10}$ ，也就是大約 3.16 的數值，作為圓周率的近似值，比起第三世紀劉徽逼近的 3.14 要多，劉徽的確有資格批評張衡將周長高估。然而，從《九章算術》到張衡再到劉徽，讓我們看到一段超越兩個世紀的圓周率逼近過程，在數學史上也有其意義。劉徽是東亞歷史上的偉大數學家，對於圓面積與圓周率的論證也有獨到之處。一般的科普文章，大概只會提到劉徽的關於圓面積與球體積的討論，很少觸及張衡，最多說他用  $\sqrt{10}$  作為圓周率的近似值，但他得到這個近似值的過程，其中牽涉到球體積公式的估計，而且劉徽注的內容也讓我們看到許多張衡或劉徽本人的巧思。論證的過程，即使在數學上不完全正確，但背後的思考仍然有值得我們學習之處。筆者自己的數學史教學，不見得有空間帶學生走過這段有趣的討論，所以現在寫出來放在《HPM 通訊》，希望讓更多對數學史有興趣的師生參考。

致謝：本文中的附圖均為新北市林口國中李政憲老師繪製，特此感謝。

#### 參考資料

Chemla, Karine and Guo Shuchun (2004), *Les Neuf Chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.

Cullen, Christopher (1996), *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge: Cambridge University Press.

郭書春 (2009)，《九章算術譯注》（上海：上海古籍出版社）。

楊清源、蔡承男、胡秉右、楊峻魁 (2021)，〈牟合方蓋與球體積公式〉，《HPM 通訊》24 卷 2 期，頁 7-15。



1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpmsociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)

基隆市：許文璋 (銘傳國中)

台北市：楊淑芬 (松山高中) 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍 (成功高中)

蘇俊鴻 (北一女中) 陳啟文 (中山女高) 蘇惠玉 (西松高中) 蕭文俊 (中崙高中)

郭慶章 (建國中學) 李秀卿 (景美女中) 王錫熙 (三民國中) 謝佩珍、葉和文 (百齡高中)

彭良禎 (師大附中) 郭守德 (大安高工) 張瑄芳 (永春高中) 張美玲 (景興國中)

文宏元 (金歐女中) 林裕意 (開平中學) 林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國 (健康國小)

李素幸 (雙園國中) 程麗娟 (民生國中) 林美杏 (中正國中) 朱廣忠 (建成國中) 吳宛柔 (東湖

國中) 王裕仁 (木柵高工) 蘇之凡 (內湖高工)

新北市：顏志成 (新莊高中) 陳鳳珠 (中正國中) 黃清揚 (福和國中) 董芳成 (海山高中) 孫梅茵

(海山高工) 周宗奎 (清水中學) 莊嘉玲 (林口高中) 王鼎勳、吳建任 (樹林中學) 陳玉芬

(明德高中) 羅春暉 (二重國小) 賴素貞 (瑞芳高工) 楊淑玲 (義學國中) 林建宏 (丹鳳國

中) 莊耀仁 (溪崑國中)、廖傑成 (錦和高中)

宜蘭縣：陳敏皓 (蘭陽女中) 吳秉鴻 (國華國中) 林肯輝 (羅東國中) 林宜靜 (羅東高中)

桃園市：許雪珍、葉吉海 (陽明高中) 王文珮 (青溪國中) 陳威南 (平鎮中學)

洪宜亭、郭志輝 (內壢高中) 鐘啟哲 (武漢國中) 徐梅芳 (新坡國中) 程和欽 (大園國際高

中)、鍾秀瓏 (龍岡國中) 陳春廷 (楊光國民中小學) 王瑜君 (桃園國中)

新竹市：李俊坤 (新竹高中)、洪正川 (新竹高商)

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷 (竹北高中)

苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)

台中市：阮錫琦 (西苑高中)、林芳羽 (大里高中)、洪秀敏 (豐原高中)、李傑霖、賴信志、陳姿研 (台中女中)、莊佳維 (成功國中)、李建勳 (萬和國中)

彰化市：林典蔚 (彰化高中)

南投縣：洪誌陽 (普台高中)

嘉義市：謝三寶 (嘉義高工) 郭夢瑤 (嘉義高中)

台南市：林倉億 (台南一中) 黃哲男、洪士薰、廖婉雅 (台南女中) 劉天祥、邱靜如 (台南二中) 張靖宜

(後甲國中) 李奕瑩 (建興國中)、李建宗 (北門高工) 林旻志 (歸仁國中)、劉雅茵 (台南科學

園區實驗中學)

高雄市：廖惠儀 (大仁國中) 歐士福 (前金國中) 林義強 (高雄女中)

屏東縣：陳冠良 (枋寮高中) 楊瓊茹 (屏東高中) 黃俊才 (中正國中)

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬 (馬公高中)

金門：楊玉星 (金城中學) 張復凱 (金門高中) 馬祖：王連發 (馬祖高中)

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

## 好書推薦：《神秘優雅的數學家日常》

林倉億

國立台南第一高級中學

書名：《神秘優雅的數學家日常》

作者：二宮敦人

譯者：王華懋

出版社：精誠資訊

出版日期：2021 年 9 月



「所謂數學家，是一群什麼樣的人？同樣是學者，數學家和昆蟲學家或民俗學家又不一樣了。他們所探索的，是純數字的世界。是對我來說甚至是難以想像的抽象世界。」

這是作者二宮敦人的好奇，也是這本書的起點，開啟了一系列的訪問之旅。二宮敦人和出版社的資深編輯袖山小姐不僅訪問了大學數學教授（當然的數學家），也訪問了數學愛好者—民間數學教室的講師、日本中學生、搞笑藝人／數學教師，沒錯，是搞笑藝人斜槓數學教師。《神秘優雅的數學家日常》就是這一系列訪問的成果，讓讀者一窺數學家、數學愛好者如何做數學？或者，如何用數學來做什麼？而這些人，又是如何看待數學的？

二宮和袖山訪談的數學教授有東京工業大學的教授黑川信重、加藤文元、東北大學千葉逸人、中部大學津田一郎、神戶大學瀧野昌、明治大學阿原一志，還有九州大學的數學家、數學史家高瀨正仁。這些數學家，每個人研究數學的習慣不盡相同，有的喜歡坐著電車慢慢思考數學，有的喜歡找人聊天討論數學，有的喜歡用電腦來研究數學。特別的是，黑川信重喜歡抄寫以前數學家的論文手稿感受算式背後的人品與人生，例如歐拉 (Leonhard Paul Euler, 1707-1783)的論文透露出陽光與自信，黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866)的論文則是陰沉和內向；加藤文元買了巴黎的古地圖，漫步伽羅瓦(Évariste Galois, 1811-1832)可能走過的街道。無論是何種方式，不管能不能解決問題，這些數學家都是享受做數學的各種滋味，同時過著人的生活，如同加藤文元說的：「做數學最重要的，就是和問題一起生活。」

筆者個人覺得整本書中最為精采的部分之一，就是呈現了訪談的數學家如何看待數學研究（數學家的數學）與考試數學（中小學數學）。先說數學研究的部分，黑川信重指出，現在人類有辦法解開的問題快被解光了，好的猜想越來越少，需要「讓數學變得更簡單的工程」，例如 20 世紀時也發生類似的情況，法國數學家格羅騰迪克(Alexander Grothendieck, 1928-2014)提出「概形 (scheme)」的代數幾何學新概念，讓許多數論的問題變得更簡單易懂，容易解決。高瀨正仁對近代數學研究的評論更是「辛辣」，直言「現



在的數學很無趣啊！」認為現代數學提出的問題，無法和黎曼、阿貝爾(Niels Henrik Abel, 1802-1829)、克羅內克(Leopold Kronecker, 1823-1891)、希爾伯特(David Hilbert, 1862-1943)、高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)等人的問題匹配，「想出無聊、細微末節，但是艱澀的問題，建構出龐雜的理論去解開，然後把如此形成的理論當成數學的發展。解開的問題本身很無聊，卻把它們當成數學發展的里程碑。」高瀨正仁用日本傳統的「龜鶴算」(即雞兔同籠問題)與今日代數的二元一次聯立方程式為例，<sup>1</sup>說明近代數學越來越抽象、越來越技術性，失去古典數學中數學家個人主觀與情感的成分，雖然獲得了更強大的解題力量，但卻失去了「感動」。高瀨正仁還以近代的日本數學家岡潔(1901-1978)與法國數學家嘉當(Henri Cartan, 1904-2008)的數學為例，雖然「岡-嘉當理論」(Oka-Cartan Theories)成為多複變數解析函數理論的基礎，但岡潔非常討厭嘉當把他的論文改寫成現代數學的形式，因為岡潔想說的主觀部分，例如「我為什麼寫這篇論文」，全被嘉當刪得一乾二淨。高瀨正仁用龜鶴算比喻岡潔的數學，而嘉當的數學則像是二元一次聯立方程式。高瀨正仁對現代數學的批判是十分基進的，想必不是現在數學界的主流意見。不過，若把高瀨正仁的觀念對照到中學數學教室裡，應當有暮鼓晨鐘之效，教室裡的學生是否在獲得了更強大的解題力量後，反而對數學或對學習失去了感動！

二宮敦人除了呈現數學家對近代數學的批評或批判，也呈現了數學家看待數學的不一樣觀點。例如 35 歲之前就有很耀眼學術成果的年輕數學家千葉逸人，雖然因解決了困難的「藏本猜想」而名聲響亮，但他認為最重要的價值並不是解決了這個猜想，而是為了解決這個猜想而建構出來的理論，會在其他的數學理論中派上用場。千葉逸人反對數學就是算式的說法，「算式就像是音樂家使用的音符。要傳達給別人時，有音符會很方便，但就算不會讀樂譜，還是一樣可以享受音樂。本質不在樂譜，而是演奏。」他以歐拉的「七橋問題」為例，說明「品味數學，不一定需要數字或算式。」至於阿原一志則不認為「數學家應該畫出一條界線，決定『這就是數學』。」阿原一志是日本數學界用電腦做數學的先驅之一，數學中的「Hyplane (擬似雙曲面)」就是由他所命名的。然而，阿原一志早期的研究成果常常得不到數學家的認同，認為他的論文是電腦論文，不是數學論文。數學論文是否能夠發表，依賴的不只有論文本身，還要看其他數學家是否感興趣，是否被認為有價值，「但關於數學的價值，沒有嚴謹的定義，…有時候也有可能因為是大老級數學教授說的話，就被認為有價值。」不被認同不代表就是沒有價值，阿原一志舉「伽羅瓦理論」為例，一開始也是不被認同的，但卻是今日抽象代數學中的根基。阿原一志除了做自己的數學研究之外，還幫忙日本服飾品牌「三宅一生」在 2010 年的巴黎秋冬時裝秀中呈現數學！別懷疑，真的是數學與時裝秀的結合！

透過上述的例子，可以看出數學家無論是在做數學、看待數學，甚至發表論文，都充滿了多元性與人性。教室黑板上或是教科書裡的數學定義、定理，雖然用一種與人、與時間無關的「客觀性」來呈現，但在真實世界裡，數學家／人的世界裡，數學是人的

<sup>1</sup> 高瀨正仁所舉的「龜鶴算」題目為「鶴與龜加起來共十隻，共有三十隻腳，那麼龜與鶴各有幾隻？」代數解法就是假設鶴與龜的數量，然後解聯立方程式。高瀨正仁提供的算術解法是，想像每隻龜都站起來，用兩隻腳站起來，這時只會有二十隻腳，比題目給的三十隻腳少了十隻，也就是說有五隻烏龜站起了！

活動，數學家的個性、習慣、價值觀，都是數學知識活動中的基本組成。

這些數學家／人也談到了中學數學的學習和數學研究的不同。高瀨正仁說：「在學校，我們學的是考試數學嘛。不管再怎麼學，都不覺得它表達了什麼情感。」數學教科書更是「異類」，二次函數、不等式、三角函數、排列組合，「每個單元都是突然冒出來的，完全不知道是來自於哪裡、又要往哪裡去。」千葉逸人也提到：

考試數學的話，需要短時間靈光一閃的能力和計算能力，但研究沒有時間限制。即使計算能力沒那麼好，也有足夠的時間去驗算，所以算到一半算錯了也沒關係。更重要的是看出正確的途徑、覺得這條路行得通的數學直覺。我認為這是一種美感……

至於總是能夠吸引眾人目光的數學競賽，黑川信重則認為「以某個意義來說，數學是用來慢慢思考、樂在其中的。丟出五個問題，限時三小時解開，或者比賽誰的分數高，這些都不是數學原本的目的。」

這些數學家／人對中學數學教育的批評，雖然是針對日本，但台灣也有類似的狀況。這些批評確實是點出了專業數學研究與中學數學學習、考試、競賽的不同，但不需要視為全盤否定，他們只是提出個人的觀點，切中中學教育裡某些偏差的現實。換個角度想，對中學數學老師或家長來說，應當注意的是學習數學，而非考試數學。就如同二宮敦人在訪問黑川信重時得到的，「原來數學是『為什麼？』的累積，而不是『解開了！』的累積。」

或許讀者會猜想，能當上數學教授，從小到大的數學學習過程，應該是充滿熱情、一帆風順、如魚得水吧？其實並不盡然！加藤文元一開始選擇的是物理系，因為「覺得讀數學系會變成乖僻的傢伙，對數學敬而遠之。」後來又覺得生物比較有趣，轉到生物系，但讀得不好，只好休學，在休學期間才發現自己對數學的興趣，為了從生物系轉到數學系，留級兩年。千葉逸人高中讀的是很普通公立高中，成績不突出，大學重考進工學院的物理工程系，那時「不知道有數學家這種職業」。直到大學選修數學系的課程後，才栽進數學世界。從小就立志成為數學家的阿原一志，2年的碩士求學期間，卻是讀得異常痛苦，覺得數學太難而討厭數學！直到博士班選擇用電腦做數學，人生才得到轉機。

數學成績不好，還是可以成為數學教授的！但如果不能成為數學教授呢？有沒有其他方式享受數學呢？這本書最特別之處，就是介紹了一群熱愛數學、非數學家的一般人。二宮敦人和袖山小姐訪問了日本一間非常火紅的數學教室—「大人的數學教室 和」，這間並非單純針對升學，主要是提供離開學校的人一個學習的場域。很多人出了社會才發現到數學的必要性，想要重新學習數學，「大人的數學教室 和」就可以針對個別需求提供適當的學習資源；也有些是為了求職考試、升學考試求助「大人的數學教室 和」；另外還有想要培養數學的感覺的人，也會到這間數學教室。「大人的數學教室 和」學員中最特別的一群，就是把研究數學當成興趣，對喜歡的數學領域想要有更深入的瞭解。

在這間數學教室裡，數學不只是求職、升學的工具，也是享受的對象，所以，學員從小學生到長者，各種年齡層都有。為了讓喜愛數學的人分享彼此研究數學、享受數學的方式或成果，「大人的數學教室 和」的創辦人兼教師堀口智之，還會定期舉辦「數學浪漫夜」的娛樂活動，這是一個專為數學迷而辦的活動，目的是讓「研究數學的人一展身手、博得喝采的地方」，就算是不懂數學的人，也可以玩得很盡興的活動。

二宮和袖山真的參與了某一次的「數學浪漫夜」，書中紀錄了這些參與者，如何用數學找樂子。筆者可以想像在大學數學系裡舉辦「數學浪漫夜」，但離開大學數學系，還能舉辦類似的活動，而且還是一場又一場地辦，真的超乎想像！根據書中的描述，數學愛好者，無論身分、職業是什麼，的確很享受「數學浪漫夜」！不只活動內容很特別，活動主持人也很另類。主持人高田老師，不僅是「日本搞笑數學協會」會長，還擔任過高中數學教師，是搞笑藝人斜槓數學教師！「藝人和教師、搞笑和數學，別人覺得我在做完全不同的事，但我自己卻不這麼覺得。兩邊對我來說都是本質，或者說生活方式。數學很美，搞笑很有趣，我只是順從自己這樣的感性，不斷地選擇如何行動，如此罷了。」

一個很會搞笑的數學老師，那不是很多學生夢寐以求的嗎？數學課堂上不時傳出學生的笑聲，想必許多數學老師也是心嚮往之吧！如果讀者這麼想：「高田老師一定是很成功的數學老師！」那就錯了！高田老師的教書生涯並不順利，雖然成功讓學生覺得好玩、開心，但高田老師不覺得自己是好老師，「或許就是因為太有趣了，變得像遊戲一樣，反而讓人不會認真去讀書了。」高田老師在訪談中，對自己教學的反思，其實是很值得有志於數學教學的人好好深思的。台灣這幾年盛行將桌遊引入學習之中，雖然出發點是好的，但拿捏不好，也是會陷入類似高田老師的困境之中。筆者身為高中數學教師，沒有搞笑的天賦，沒有斜槓藝人的本錢，但十分嚮往「大人的數學教室 和」的松中宏樹老師描繪的願景：

假設有一片數學花園，我就是在這裡——花園裡面。但是有一塊巨大的岩石擋住，讓另一邊的人看不到花。沒有人願意看一下這邊的世界，而且也根本看不見。所以我要移除那塊岩石，我不會強迫對面的人走到這裡來，但起碼希望他們能看到花園。

總結來說，《神秘優雅的數學家日常》是一本非常獨特的數學科普書，數學知識不是這本書的主角，數學家／人、數學愛好者才是主角，非常值得一讀！就算讀者不是數學愛好者或是數學工作者，也能夠從中得到閱讀的樂趣。但如果想藉由這本書扭轉數學不好的困境，或希望開始喜歡數學，那鐵定是大失所望！讓讀者喜歡數學，這不是作者二宮敦人的用意，二宮敦人想要做的，是打破許多人對數學家的刻板印象，也是他原本對數學家的刻板印象：

純白色的房間裡僅有最基本的家具；一名樣貌神經質的男子坐在安樂椅上搖晃著，獨自安靜地沉浸在思緒之中。他全神貫注，雜音無法侵入他的耳中。忽然間，他伸

手在空中描繪了某些圖形，站起來大喊：「我終於想通了！」接著猛然在紙上寫下算式。紙張上，一般人甚至無法理解、精緻而崇高的某種概念，於焉誕生……

透過這本書，二宮敦人成功地呈現了數學、數學家、數學愛好者的不同面貌給讀者，也打破了他個人對數學家的偏見。只是很可惜的，有一項偏見並未被澄清，甚至二宮敦人可能也沒有意識到自己心中的這項偏見，就是性別偏見！<sup>2</sup>二宮敦人一開始想像的數學家是名男子，整本書中訪問的數學家或數學愛好者，全都是傳統性別中的男性！書中出現的女性只有出版社的資深編輯袖山小姐、二宮敦人的太太、黑川信重的夫人與女兒，全都是不擅長數學的女性。今日有許多傑出的女數學家，各級學校中也有非常優秀的女性數學老師與女學生，甚至是多元性別的數學家與數學愛好者。《神秘優雅的數學家日常》未能跳出性別偏見，或許是無心之過，但仍是甚為可惜！

讀完此書，筆者期待台灣出版界能出一本屬於台灣的《神秘優雅的數學家日常》，看看台、日的數學家、數學愛好者有哪些相同與不同之處！倘若有台版的《神秘優雅的數學家日常》，書裡可別只有單一性別的數學家、數學愛好者！

---

<sup>2</sup> 筆者這裡的性別偏見指涉的性別是傳統的男女性別，就多元性別來說，這也是一種偏見。筆者此處要凸顯的是這本書只訪問傳統性別中的男性數學家與數學愛好者，忽略傳統性別中的女性數學家、數學愛好者。