HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：https://www.hpmsociety.tw/
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十四卷第三期目錄(2021 年 10 月)

從圭竇形談起：《測量全義》初探（上）

洪萬生
臺灣數學史教育學會

本文謹獻給郭書春教授，祝賀他八十華誕

一、前言

《測量全義》引起我的注意主要因為三個背景：其一，大約四十多年前，我從史家李儼的《中國算學史》讀到作者引自《測量全義》的阿基米德《圜書》。其二，**2006** 年，我曾與多位研究生在《**HPM** 通訊》上共同規劃出版一個「海龍公式」專輯 **(https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/904.pdf)**，其中，李建勳曾就羅雅谷的海龍公式深入探討，並將他的證明較之於梅文鼎的研究，而得到有趣的結論。[1]其三、我最近深入瞭解「圭竇形」的語源之機緣。[2]

阿基米德的《圜書》(***Measurement of a Circle / Circle Measurement***）引進與面積公式有關的三個命題，可惜，一直都沒有獲得中國數學史家應有的注意，儘管前述李儼著作全文照錄。不過，這或許可以多少解釋中算史家過度「執迷」於劉徽之割圓術「創見」，以致無從覺察此一逼近圓周率近似值之估算，必須以「精確的」圓面積公式為前提。試想如果以圓面積公式（或「圓田術」)「**徑自相乘，三之，四而一**」為依據，來追求圓周率之近似值，那麼，此一公式顯然無法運用，因為它已經假設了圓周率（近似值）為三。事實上，劉徽「割圓術」的全文是出現在「圓田術」四個公式中的第一個「**半周、半徑相乘得積步**」之下，由於這個公式並未出現圓周率 -- 不像我們今日所熟知的 πr^2（r 為圓之半徑），因此，當然可據以推算圓周率之近似值。

[1] 李建勳，〈海龍公式的流變：由徐光啟到梅穀成〉。

[2] 洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉，臺灣數學史教育學會年會暨東亞數學史研討會，1/30/2021，臺北：台灣師範大學數學系 M202。

此一史實 / 數學實作（**mathematical practice**）在《圜書》的映照之下，應該會「透顯」出它的深刻意義。不過，顯然並非如此。事實上，中算史家是在 **1980** 年代之後，才陸續「警覺到」劉徽注「圓田術」的真實（或「貼近」）讀法。丹麥漢學家華道安（**Donald Wagner**）的貢獻也應該記上一筆才是，他在 **1984** 年與我通信時，曾寄給我一篇論文，其中他就明確地指出上述劉徽注的真實面貌。[3]

回到《測量全義》上。最近，我為了撰寫〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉，特別追溯「圭竇形」的源頭出處，結果就在《測量全義》找到它的最早漢語「足跡」。不過，本書之編者羅雅谷（**Giacomo Rho / Jacques Rho, 1593-1638**）顯然只想「便宜行事地」交代一下，因此，後來在相關的漢譯語境中，「圭竇形」被「拋物線」所取代，一點也不令人意外。[4]本文「從圭竇形談起」，意在吸引讀者眼球，我們的主要目標當然是《測量全義》的文本分析（**textual analysis**），特別是羅雅谷在撰著此書時，如何「收編」他所謂的「九章筭」（或中國傳統算書概念、算法及公式）。這個中西算學「交流」的個案似乎還沒有贏得（數學）史家應有的關注，且讓我在此先起個頭，拋磚引玉，希望後來者可以貢獻更恰當的歷史理解。

因此，本文「初探」的範圍就限定在與傳統中算「不無互動」的《測量全義》第四～六卷，至於第一～三卷及第七～九卷主題是「平行的」，前者是平面三角學，後者則是球面三角學。根據數學史家的初步研究，[5]其中公式是針對十五世紀歐洲數學家玉山若干（**Johannes Regiomontanus/Johannes Muller, 1436-1476**）的相關成果所做的增補。[6]第十卷（也就是最後一卷）介紹測量儀器，由於它與前述平面三角及球面三角一樣，其內容主要傳自西方的數學與天文學，同時，也缺乏中西之「會通」企圖，所以，本文都不打算討論。

有關本文論述進路，我們還必須再做一個交代。由於清初曆算大師梅文鼎深受《測量全義》乃至編入它的《崇禎曆書》之影響（內容與形式兩方面），因此，當我們針對《測量全義》進行文本分析時，也將援引梅文鼎的相關論述，作為必要的參考點，從而藉以更清晰地映照清初中算未來之走向。

二、羅雅谷及其《測量全義》

羅雅谷的生平事蹟略見維基百科（正體、簡體中文版都出自英文版），僅知他 **1593**

---

[3] 有關這一段重要的插曲，可參考郭書春，〈尊重原始文獻 避免以訛傳訛〉。

[4] 這是因為在 1850 年代，解析幾何與（近代）物理學同時傳入中國，前者的「拋物線」與後者的「拋射體運動」終於連成一氣，而將「圭竇形」送進了歷史的灰燼。參考洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉。

[5] 這些球面三角的內容甚至啟發了清初梅文鼎的同一主題之研究。參考郭書春主編，《中國科學技術史：數學卷》，頁 620。

[6] 玉山若干（或約翰・穆勒）的三角學貢獻，可以參考毛爾，《毛起來說三角》或 Katz 的《數學史通論》，頁 312-315。

年出生於米蘭，父親是著名法學家。他在 1614 年加入耶穌會，數學方面的訓練似乎頗為到位。1617 年，他在羅馬被貝拉明（Cardinal Bellarmino）樞機主教授任神父職。之後，他與多個夥伴被派到東亞地區傳教。他先是在印度果阿邦學習神學，後來到澳門傳教。1624 年，他隨高一志（Alfonso Vagnoni）神父進入中國，居停山西，學習語言與在地知識。1631 年，被傳喚至北京曆局與徐光啟、耶穌會士湯若望、龍華民和鄧玉函共事，一起編修《崇禎曆書》，以便改革明朝中國曆法（大統曆）。1638 年，他逝世於北京，享年 45 歲。

羅雅谷在數學及天文學方面的素養，我們只能從一些相關著作的敘述來推測。天文史家金格瑞契（Owen Gingerich）有關哥白尼《天體運行論》（*De revolutionibus*）（版本）之研究，[7]為我們提供了些許蛛絲馬跡。事實上，根據他的研究，《天體運行論》的 1566 年的第二版及 1617 年的第三版，都在 1618 年被帶到中國，[8]儘管梵諦岡教廷早在 1616 年已經下令將該書「掃入」禁書目錄（Index）。而將 1566 年《天體運行論》第二版帶到中國的，正是羅雅谷。可見，羅雅谷對於當時歐洲的天文學研究現況，相當熟悉而且頗有「膽識」。這或許也可以解釋何以他最後會獲邀加入徐光啟的曆局團隊。

事實上，我們從本文討論的《測量全義》，也可發現他應該受過蠻嚴謹的數學訓練，譬如他在該書中，就始終強調「*法之所以然也*」，而其論證之主要依據或範本，則是利瑪竇（Matteo Ricci）、徐光啟合譯的《幾何原本》前六卷（後文簡稱利徐版），以及其中譯母本丁先生（Christopher Clavius）改編版，[9]足見他嫻熟這部經典的內容（content）與形式（form）。事實上，我們從本節下文將簡要介紹的《測量全義》內容，也可以略窺一二。至於測量之義，可徵之於耶穌會士鄧玉函（Johann Schreck）所撰之《測天約說》（也收入《崇禎曆書》）：[10]

> 測法與量法不異，但近小之物尋尺可度者，謂之量法。遠而山岳，又遠而天象，非尋尺可度，以儀象測知之，謂之測法。其量法如算家之叀術，其測法如算家之綴術也。[11]

在此，鄧玉函使用了中算家熟悉的名詞如「叀術」及「綴術」，[12]顯見耶穌會士深知會通中西文化「修辭」（rhetoric）之重要。

---

[7] 參考金格瑞契，《追蹤哥白尼》，頁 177 。

[8] 1617 年的三版是由金尼閣（Nicholaus Trigault, 1577-1628）帶入中國，參考同上。

[9] 在本文中，《幾何原本》前六卷所指的，是利、徐二人根據丁先生（Christopher Clavius）的改編本所中譯的版本。另外，羅雅谷也參考了未譯的後九卷，譬如《測量全義》卷六，頁四所引述。《幾何原本》（*The Elements*）目前被認為只有十三卷（譬如 Heath 版），此處提及卷十四、十五係由後人增補。丁先生改編的版本就有十五卷。

[10] 根據維基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Schreck，鄧玉函原本在阿特多夫大學 (University of Altdorf) 習醫，畢業後，他成為發明符號法則的法國數學家韋達 (François Viète) 之助手。韋達於 1603 年去世後，鄧玉函轉往義大利巴都亞大學 (University of Padua) 投入伽利略的門下，但繼續研習醫學。

[11] 鄧玉函，《測天約說》卷上，頁一，徐光啟編纂、潘鼐匯編，《崇禎曆書》（後文簡稱《崇禎曆書》），頁 1139。

[12] 這兩個名詞俱見秦九韶《數書九章》序，此處應該都指測量方法，儘管秦九韶將前者視為「外算」，後者視為「內算」。秦九韶，《數書九章》序，頁一，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（一），頁 439。

根據《測量全義》〈敘目〉，本書（十卷中的）「**前九卷屬法原，後一卷屬法器**」。所謂「**法原**」，是指：

> **法之所以然也。凡事不明于所以然，則已然者茫茫不知所來，其當然者，昧昧不知所往。**[13]

至於其法原精髓，當然就表現在前九卷。我們先引述全書目錄：「**第一卷測直線三角形，第二卷測線上，第三卷測線下，第四卷測面上，第五卷測面下，第六卷測體，第七卷測曲線三角形，第八卷測球上大圈，第九卷測星，第十卷儀器圖說**」。其次，再讓我們一起考察羅雅谷如何「遵循」《幾何原本》之體例。事實上，第一卷之首開宗明義就是「**界說二十三則**」，譬如，

> **第一界：正弧，全圈四分之一。或大焉或小焉。**
> **第二界：餘弧，正弧之剩分。**
> **第三界：通弦者，通弧之相當線，分圈為兩分。**
> **第四界：圈內線極大過心者，為圈徑。**

等等。[14]

不過，羅雅谷並未提供類如《幾何原本》利徐版的「求作」與「公論」，[15]而是直接呈現（卷一）十七題的內容。茲以其第九題為例：

> **第九題　三角形。邊與邊之比例，若各對角之正弦。**[16]

按：這是目前我們稱之為正弦定律的一個命題。仿《幾何原本》體例，羅雅谷在提供「**論曰**」（證明）之前，先依據插圖進行「**解曰**」（解題）：針對這個給定三角形，羅雅谷區分成三種情況，「**一言直角形**」，「**二言三邊等**」（亦即等邊三角形），「**三言三邊形不等**」。在此，我們僅以第三種情況的「任意三角形」為例，來考察他的「解曰」。參考圖一，「**以巳以小邊，引長于丁，為乙丁，與巳丙等。丙為心，巳為界，作巳庚弧。又乙為心，丁為界，作丁戊弧。末作丁辛、甲巳兩垂線至乙丙底。**」緊接著，就是他的「論曰」：

---

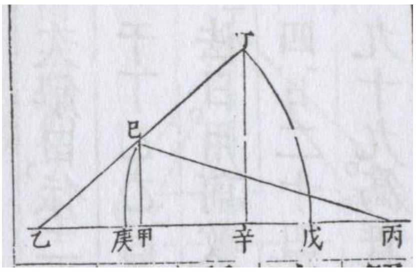
13 羅雅谷，《測量全義》「敘目」頁一，《崇禎曆書》頁 1295。

14 「圈」等同「圓」或「圓周」，羅雅谷將這兩個名詞混用，不知何故？又，正弧是指一個象限內的一段弧，「過弧」則大於一個象限之圓弧。圈徑＝圓的直徑。

15 Clavius 的《幾何原本》之「求作」（「求作者，不得言不可作」）與「公論」（「公論者，不可疑」）不同於 Heath 版 (Heath, 1956)，儘管它們（依序）類似後者之設準（postulate）與公理（common notion）。更值得注意的，是 Clavius 將與平行有關的第五設準，轉變成為他的改編本之第十一論。將攸關非歐幾何學濫觴的第五設準改成「公論」，是值得注意的一個「認知」特色，但似乎尚未贏得史家的注意。

16 《測量全義》第一卷第一題「比例等」（比例相等）之說，羅雅谷原註稱：「比例等後省曰若」，亦即：$a:b = c:d$，這兩個比（例）相等，後文就簡稱為「$a:b$ 若 $c:d$」。

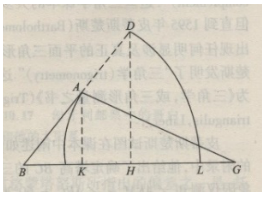
丁辛乙、甲巳乙兩直角形之丁辛、甲巳平行。同用乙角，即各邊俱相似六卷四，[17]則乙丁與乙辛，若乙巳與乙甲。又先設乙丁、巳丙等，是丙巳邊與丁辛，若巳乙與甲巳也。夫丁辛為乙角之正弦，甲巳為丙角之正弦，更之，則丙巳邊與巳乙邊，若乙角正弦之丁辛，與丙角正弦之甲巳也。



圖一：《測量全義》證明之正弦定律之插圖

這個證明及其插圖完全襲自玉山若干（或約翰・穆勒或雷格蒙塔努斯）的《論各種三角形》（***De Triangulis Omnimodis*, 1463/1533**）**--** 被史家 **Katz** 稱之為第一部「純」三角學的著作，也見證了史家 **Grattan-Guinness** 所刻畫的歐洲 **1540-1660** 年間是一個「三角學世紀」（**the age of trigonometry**）。[18]現在，且讓我們引述 **Katz** 的解說與評論：

由於他的正弦是給定半徑的圓中的直線，他對三角形 *ABG* 的正弦定理的證明就需要分別以 *B* 和 *G* 為圓心，以相等直線 *BD* 和 *GA* 為半徑畫出兩個圓。再從 *A* 和 *D* 分別作出 *BG* 的垂線，依次相交於 *K* 和 *H*，雷格蒙塔努斯然後指出，應用相等半徑的圓可知，*DH* 是∠*ABG* 的正弦，而 *AK* 是∠*AGB* 的正弦。因為 *BD*＝*GA*，∠*AGB* 的對邊為 *GA*，且∠*AGB* 的對邊為 *AB*，所以，由三角形 *ABK* 和 *DBH* 的相似性可得出要證明的結論。[19]



圖二：Katz 複製圖

圖二是 **Katz**《數學史通論》所複製的插圖，我們可以據以確認羅雅谷所參考的來源。其實，羅雅谷依據《論各種三角形》來改編，是其來有自的，因為雷格蒙塔努斯曾從希臘文翻譯托勒密（**Ptolemy**）的《天文學大成》（***The Almagest***），並且注意到天文學界需要有一本簡潔、有系統的著作，來論述平面、球面三角的邊角關係之法則。值得注意的，正如前述，他的體例完全模仿《幾何原本》的（定義 **--** 公理 **–** 命題）邏輯架

[17] 這個小字是原註，「六卷四」是指《幾何原本》第六卷命題四。
[18] 參考 Grattan-Guinness, *The Fontana History of Mathematical Sciences*, pp. 174-233.
[19] 引 Katz，《數學史通論》，頁 313。《論各種三角形》中的相應原始文本（primary source materials），可參見李文林，《數學珍寶》，頁 208-210。

構，同時，針對各個命題（或定理），還加上《幾何原本》所欠缺的「解釋性」（**explanatory**）實例。還有，史家 **Katz** 也提醒我們：「雷格蒙塔努斯的三角學是以弧的正弦為基礎，正弦的定義是二倍弧的半弦，但他也指出，可以把正弦視為依賴於相應的圓心角。」[20]

《論各種三角形》所以贏得羅雅谷的青睞，可能是他的「市佔率」。根據 **Katz** 的說明，十六世紀三十年代之後的一段時間內，出現了大約二十本論三角學的著作，其內容絕大部分都與該書雷同。另一方面，「以雷格蒙塔努斯的著作為典範的 **15** 世紀三角學〔仍〕為解決當時的天文學問題提供了必要的數學工具。」[21]

總之，羅雅谷根據、甚至模仿《論各種三角形》的內容與（體例）形式，來編寫他自己的《測量全義》，應該極有可能。不過，他在該書第四～六卷中，以其論述為主體，企圖「肆應」（**accommodate**）或「收編」（**assimilate**）中國傳統的「九章筭」，倒是值得我們深入探索。緊接著，我們就來處理這個主題。

三、羅雅谷收編「九章筭」

「九章筭」是指哪一本中國算書，目前我們還不得而知，不過，它可能泛指中國算學的概念（及其名詞）、方法或公式。我們從羅雅谷在《測量全義》所引述的相關內容，可以推測他應該是在西算的「理論架構」中，收編中國傳統算學。這個進路有別於徐光啟以降的明清算家，他們都如同徐光啟所期許的，「**先**（以中算）**會通**（西算），然後「**再**（努力）**超勝**」，[22]其「主體性」顯然在明清算家這一邊。

現在，我們先考察羅雅谷在《測量全義》的論述架構中，如何「借用」（**appropriate**）中算用詞及方法。由於《測量全義》卷一～卷三、卷七～卷十幾乎未引述中國傳統算書概念或方法，[23]因此，我們僅就卷四～卷六進行考察，而這當然也是本文的焦點所在。

在本節中，我將先討論《測量全義》卷四，再繼之以卷六，這是因為這兩卷的內容與形式頗有「平行」的風格。事實上，羅雅谷收編「九章筭」中的平面圖形、立體圖形的「容」積計算公式或方法時，[24]顯然相當受惠於《幾何原本》，尤其是利瑪竇、徐光啟未曾中譯的立體幾何內容（第十一～十三卷）。至於《測量全義》第五卷，我們將以其中《圜書》及「變形法」的一個案例為主題，依序分述於本文第四、五節。

---

[20] Katz，《數學史通論》，頁 312。
[21] 同上，頁 315。
[22] 徐光啟在他的〈曆書總目表〉中，指出：「臣等愚心，以為欲求超勝，必先會通」，《崇禎曆書》，頁 1558。
[23] 《測量全義》卷二，頁十二有「物莫能到，復不能作線與叁直」，《崇禎曆書》，頁 1324。卷三有矩尺測量法（《崇禎曆書》，頁 1335），類似《周髀算經》的「用矩之道」。
[24] 羅雅谷使用「容積」一詞既代表面積，也代表體積，由上下文可知其指涉。

《測量全義》卷四〈測面上〉主題是有關三角形、四邊形及多邊形面積之計算。不過，羅雅谷一開始就引進十三個界說，其中第十界之「畝法」與《九章算術》相同，亦即，一畝等於二百四十（方）步，所相異者，是羅雅谷補上「因次」（**dimension**）概念，而改稱為「方步」。[25]然而，他的「一方步」卻是等於「二十五方尺」，亦即，一步＝五尺，與明代算家程大位的《算法統宗》（**1592**）所載相同，[26]不像秦漢度量衡制度中的「一步＝六尺」，正如《九章算術》所示。

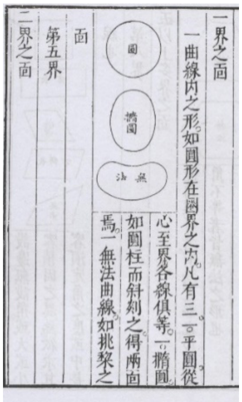
現在，有關界說（**definition**），我要特別引述本卷的第四、五界，因為我們在卷六「測體」將可以發現羅雅谷的「平行論述」進路：

第四界　一界之面

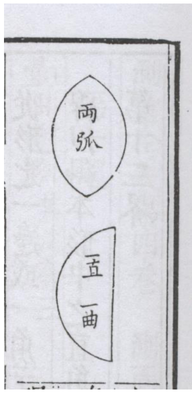
一曲線內之形，如圓形在圈界之內。凡有三：一平圓，從心至界，各線俱等。一撱圓，如圓柱而斜刻之，得兩面焉。一無法曲線，如桃梨之面。[27]

第五界　二界之面

如兩弧或無法之曲線，或一直線一曲線，而形成之有法與否，則視曲線。[28]



圖三：一界之面，《測量全義》掃描



圖四：二界之面，《測量全義》掃描

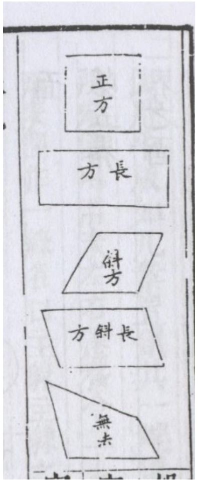
另一方面，由於第七、八界說涉及多邊形概念之（階層 **hierarchy**）分類，[29]我們也將引述如下，方便下文之解說：

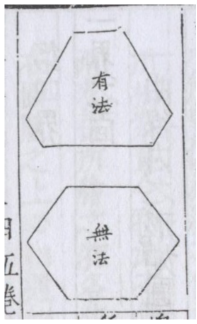
第七界　四界之面

方面有五。邊角俱等者，正方也。角等、邊不等者，長方也。邊等、角不等者，斜

[25] 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁四，《崇禎曆書》，頁 1354。中國算書如《九章算術》有時會強調面積計算（比如方田術）所得是「積步」。
[26] 程大位，《算法統宗》，卷三，頁二，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（二），頁 1264。
[27] 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁一、二，《崇禎曆書》，頁 1353。所謂「無法」，最早出處應該是《幾何原本》利徐版卷一的第三十三界：「已上方形四種謂之有法四邊形。四種之外，他方形，皆謂之無法四邊形。」以上四種，是指第二十九界「直角方形」（正方形）、第三十界的「直角形」（長方形）、第三十一界的「斜方形」（菱形），以及第三十二界的「長斜方形」（平行四邊形）。
[28] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁二～三，《崇禎曆書》，頁 1353。
[29] 這一作法呼應歐幾里得如何遵守亞里斯多德有關（數學）定義之規範，亦即概念的「原始屬類」與「區別屬性」之劃分，參考奔特等（Bunt *et. al.,*），《數學起源》，頁 176-179。

方也。各對角、對邊等者，長斜方也。邊角俱不等者，無法之方也。首兩種之外，皆屬無法，蓋有設邊，無設角，或大或小，容積因之異焉。欲求其容，須定角之度或中長線也。[30]





圖五：四界之面，《測量全義》掃描　　圖六：五以上多界之面，《測量全義》掃描[31]

第八界　五以上多界之面

邊角俱等者，有法之形也。或邊或角不等者，皆無法之形也。[32]

由於《九章算術》卷一〈方田章〉主題就是面積計算，[33]所以，我們以之對照〈測面上〉，是一個頗有啟發性的比較史學工作，這是因為《幾何原本》並未包括面積或體積計算。

《測量全義》卷四〈測面上〉除了前文提及的十三個界說之外，還包括三個命題，依序為第一題〈**量四邊形**〉、第二題〈**量三邊形**〉，以及第三題〈**量多邊形**〉。此一順序有違我們的直觀，因為，三邊形顯然比四邊形「簡單」，為何論述之順序剛好相反？[34]為此，羅雅谷在本卷「第九界」試圖提出他的理由：

量線用直線，以直線在萬線中為最短故。量面用平面、用正方，以平面在萬面中為最短，正方之理視萬物之理為最準故。[35]

於是，他將正方（形）、長方（形）的面積公式視為已知，所謂的「公量為方」（可公度量（**commensurable**）單位是正方形），並以正方田、長方田之面積計算為例。緊接著，

---

30 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁二～三，《崇禎曆書》，頁 1353-1354。相較於《幾何原本》利、徐版的卷一第二十九～三十二界說之敘述（參見前註 27），羅雅谷的對應界說顯然更為清晰可辨。

31 此一掃描圖之原圖似有謬誤，「有法」與「無法」應該互相顛倒才是。

32 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁三，《崇禎曆書》，頁 1354。

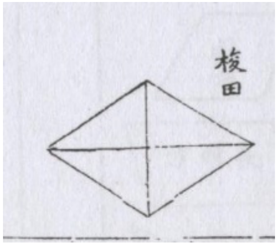
33 由於「計算」，當然也一併介紹分數的四則運算，以及約分術等方法。

34 譬如，梅文鼎在他的《平三角舉要》中，就在「有形」vs.「無形」的脈絡中，指出三角形的「優先性」:「凡可算者，為有法之形；不可算者，為無法之形。三角者有法之形也。不論長短斜正，皆可求其數，故曰有法。若無法之形，析之成三角則可量，故三角者量法之宗也。」頁 4-463。

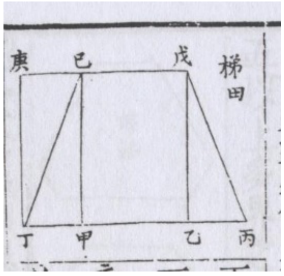
35 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁三～四，《崇禎曆書》，頁 1354。

他也說明「斜方」(亦即平行四邊形)面積計算。然後，再以「等邊斜方形」(菱形)將「梭田」收編進來，他說(參見圖七)：

> **若等邊斜方形，作兩對角線，分元形為四勾股形，兩對角線之交為直法。法以兩對角線相乘，二而一。**[36]



圖七：梭田，《測量全義》掃描



圖八：梯田，《測量全義》掃描

在四邊形的單元中，梭田既然有了「歸宿」，且看羅雅谷如何對待「梯田」(圖八)：

> **四邊形有上下不等而在平行線內者，名梯田。舊法：并兩廣，半之，以中長線乘之。**[37]

此處「中長線」是指「從形之一邊或一角至對邊作垂線」，亦即我們今日所謂的高。羅雅谷特別指出：「**半之者，損下廣以益上廣也，此舊法所自出也。**」至於「**斜田、箕田諸法俱同前。兩腰之等與不等，角之等與不等，俱以平行線為本。**」[38]顯然，無論是「梯田」、「斜田」或「箕田」，它們都以「平行線為本」，而讓面積公式之證明變得「有所本」，同時也有助於他的「反駁」舊法之謬。

茲以「四不等田」為例(參考圖九)。先引述羅雅谷的論述如下：

> **舊法：四不等田，東長四十二、西長五十六、南六十四、北五十八。并東西兩邊，半之；并南北兩邊，亦半之。兩半相乘得二九八九步，為其容。**[39]

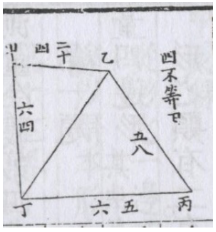
按：上引「容」是指面積，以下視文本脈絡不同，也可能指「體積」。針對這個面積計算，羅雅谷不以為然，「駁曰」：

> **若甲為直角。試作乙丁對角線，成甲乙丁勾股形。有勾股，以求弦，為七十六又一五三之九四。其積為一三四四。又以乙丙丁形之三邊，求其容，得一五三七，并兩**

---

[36] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁六～七，《崇禎曆書》，頁 1355-1356。
[37] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁七，《崇禎曆書》，頁 1356。
[38] 同上。
[39] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁八，《崇禎曆書》，頁 1356。按：「四不等田」最早現身於《五曹算經》。

形積，得二八七一，知法為未合也。[40]



圖九：四不等田，《測量全義》掃描

最後，他「論曰」以糾其謬，指出其關鍵在於是否為「有法形」：

> **兩廣或兩長在平行線內者，并而折半，損有餘，補不足，改為方形也。以中長線乘之，則得其容。若四不等，無法形也。損此益彼，一不能為方，一不能為中長線，何緣得合乎？**[41]

現在，我們緊接著進入本卷第二題「量三邊形」。本題主旨是海龍（**Heron**）公式：「**乙丙丁三邊形，有邊數，無角數，求實。其法并三邊數，半之為實，以每邊之數為法，各減之。三較連乘得數，以半總數乘之為實，平方開之，得實。**」[42]羅雅谷所提供的證明顯然有瑕疵，梅文鼎曾試圖改正，也未竟全功，最後，康熙主編的《數理精蘊》總算給出了嚴密的證明。[43]在中算史上，儘管南宋秦九韶也曾給出與海龍公式等價的「三斜田」面積公式，[44]但卻未曾說明如何導出他自己的公式，因此，我們不打算進一步討論。

本卷第三題主旨是：「量多邊形」，亦即是：計算五邊及更多邊形的面積。由於正多邊形面積的計算「必先分元形，皆為兩邊等三角形，故不論幾何邊俱同法」，因此，羅雅谷特別討論等邊三角形面積之計算（「舊法三角形」），說明舊法未考慮平方根近似值的「誤差」作用，以致於答案略有出入。請參考圖十、他的舉例及論證如下：

> **舊法三角形，每面十四。以六乘面，得八十四。以七而一，得十二，為實。半面七為法，乘之，得八四。積也。試用前法，分元形作兩勾股形，各形有弦有勾，以求股而求積。得八四又三十之二十八，幾為八五，非八四。**
>
> **論曰：所以然者，古法正六面七，謂丙乙十四，則丙甲十二，故七六相乘得四十二，為丙乙丁之實八十四矣。不知丙乙十四、乙甲七，各自之相減開方，乃十二有奇也，且七除又七乘，安用之？**[45]

---

[40] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁八～九，《崇禎曆書》，頁 1356-357。

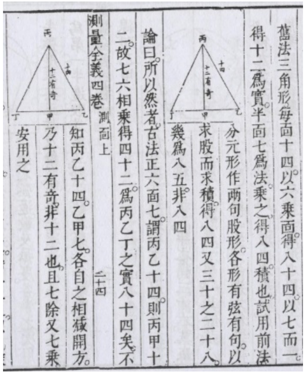
[41] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁九，《崇禎曆書》，頁 1357。

[42] 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁九，《崇禎曆書》，頁 1357。海龍公式之現代形式如下：令 a, b, c 為三角形的三邊，則其面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中$s=(a+b+c)/2$。

[43] 參考李建勳，〈海龍公式的流變：由徐光啟到梅瑴成〉，或該文所刊的《HPM 通訊》9(4) 海龍公式專輯。梅瑴成是梅文鼎的孫子，他時任康熙的算學大臣，是《數理精蘊》的主力編輯之一。

[44] 朱世傑所給的「三斜田」面積計算則不同，因為他多給了一個「中股長」的條件。參看朱世傑，《算學啟蒙》卷中，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》(一)，頁 1149。

[45] 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁二十四～十五，《崇禎曆書》，頁 1364。


舊法三角形每面十四以六乘面得八十四以七而一
得十二為實半面七為法乘之得八四積也試用前法
分元形作兩句股形各形有弦有句以
求股而求積得八四又三十之二十八
幾為八五非八四

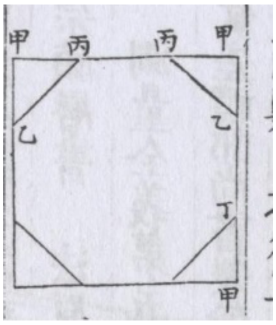
論曰所以然者古法正六面七謂丙乙十四則丙甲十
二故七六相乘得四十二為丙乙丁之實八十四矣不
測量全義四卷　測面上　二十四
知丙乙十四乙甲七各自之相減開方
乃十二有奇非十二也且七除又七乘
安用之

圖十：「正六面七」,《測量全義》掃描

同理，他也評論「舊法及古法六角形」。不過，他更有興趣討論的，應該是本卷最後的「古法八角田」。

此一「古法」出處何在，還有待探索。[46]不過，這個論述顯然延續了他在舊法三角形、六邊形等計算時，對於平方根近似值的「計較」。我們且先看他所引述的「古法」：

> **古法八角田。每面十四，以面五乘得七十，七而一得十，倍之得二十，求一面，得三十四。自之得一一五六為實，面數自之得一九六為法，減之，餘九六〇，八角形積也。**[47]



圖十一：方五斜七八角田,《測量全義》掃描

上引「每面十四」以「五乘、再七而一」，是指 $\frac{14}{\sqrt{2}} \approx \frac{14}{\frac{7}{5}}$，在正方形邊為五（所謂「方五」）的情況下，以七為其對角線之長（所謂「斜七」）。[48]緊接著，他提供「正法」，說明八角田每邊 **14** 的情況下，以其為弦的等腰直角三角形之兩腰並不等於 **10**，而是 $\sqrt{\mathbf{98}}$。至於古法答案「**所以然者**」，乃是因為：

> **古法方五斜七，不知方五斜七有奇，不發之根也。彼以甲乙等各勾各股俱為十，則**

---

[46] 朱世傑，《算學啟蒙》卷中有「方五斜七八角田」題如下：「今有方五斜七八角田一段，只云每面闊二十八步，問為田幾何？」郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》（四），頁 1149-1150。

[47] 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁八，《崇禎曆書》，頁 1364-1365。

[48] 口訣「方五斜七」最早現身於《孫子算經》，至於「方五斜七八角田」則出現於朱世傑《算學啟蒙》(1299)。另外，與此近似值息息相關的「不發之根」，則是指開方不盡的無理根如 $\sqrt{2}$。羅雅谷，《測量全義》卷四，頁十六，《崇禎曆書》，頁 1360。

乙丙邊與乙丙弦俱十四。不知各率皆是，而獨乙丙弦非十四也。故八角形之積實少，而誤以為多。[49]

《測量全義》有關「測面」部分我們就討論到此為止。在進入「測體」之前，我們有必要提及上文所引述的「**正六面七**」及「**方五斜七**」這兩個古法的可能出處。正如前述，羅雅谷曾有七年時間（**1624-1631**）在山西學習語言與「在地學問」，又由於利瑪竇、李之藻所編譯的《同文算指》（**1614**）直接襲自《算法統宗》的至少有 **22** 題之多，[50]因此，羅雅谷研讀《算法統宗》的可能性極大，從而進一步「收編已有」似乎也順理成章。譬如，在《算法統宗》的「**方圓定則九圖**」前三個依序就是「**周三徑一**」、「**方五斜七**」及「**正六面七**」，[51]至於作者程大位的相關說明，則完全被羅雅谷所引用。更有趣的，是羅雅谷有關「四不等田」的例子，也符合程大位所說的「**四不等田分兩段，一為勾股一為斜**」。[52]

現在，我們開始進入《測量全義》第六卷「測體」，亦即有關體積之計算。羅雅谷首先說明（立）體的意義，以及一些相關的概念之界說（或定義）：

體者面之積，或實如金木土石等，或空如盤池陶穹等，俱同理同法。其界為面，面居體之周。[53]

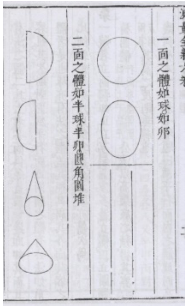
緊接著，羅雅谷補了一個自註：「**面截面生稜，如線遇線生角也。又稜為兩面之共界。**」再接著，針對「一面之體」、「二面之體」、「三面之體」、「四面之體」、「五面之體」、「六面之體」、「八面之體」、「十二面之體」，以及「二十面之體」等，他儘可能提供「界說」，逐一說明其圖形性質。

以「一面之體」、「二面之體」為例，他所給出的界說依序如下：

一面之體如球、如卵。
二面之體，如半球、半卵、圓角、圓堆。[54]

---

49 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁二十五～二十六，《崇禎曆書》，頁 1365。
50 陳敏皓，《《同文算指》內容分析》，頁 122-125。羅雅谷撰著《籌算》時，也曾參考《同文算指》，《崇禎曆書》，頁 1527。
51 程大位，《算法統宗》，郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》（二），頁 1265。
52 同上，頁 1264。
53 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁二，《崇禎曆書》，頁 1383。
54 同上。



圖十二：《測量全義》掃描

像「一面之體」或「二面之體」這樣的概念，他大概只能圖示，希望讀者可以直觀理解。顯然，這是羅雅谷「類推」卷四的第四、五界的結果。其實，在平面的案例中，他也很難說明白。

至於他的參考論述涉及《九章算術》卷五「商功章」之立體圖形，則有如下三類（「立面體」、「角體」與「斗體」）：

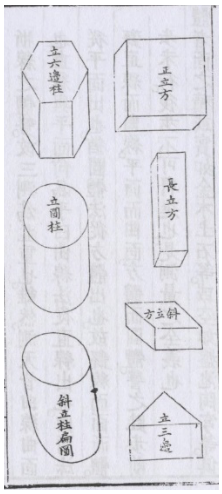
> **第一體名立面體。如正立方、斜立方、多邊立體、正立圓體、扁圓體。公法。以高乘底之積，得其容。其高之度，則垂線也。**
> **《幾何原本》十二卷七增題曰：兩平行面內之體或同高兩體，其比例為體與體，若底與底，但取同類相求，以正高為據，不論體勢直與不直。**[55]

參考圖十三。羅雅谷在此引述《幾何原本》第十二卷第七增題，其進路即清晰地呼應卷四中的「**以平行線為本**」。其實，他在解說立體圖形的性質時，也早已經使用了二、三維的「類比」手法，譬如正立方 **vs.** 正方、斜立方 **vs.** 斜方，等等。

現在，引述「角體」如下：

> **第二體名角體。底廣上銳，如堆跺峰亭之類，其法同也。《幾何（原本）》十二卷七題之系曰：同底等高之角體與平行面體（即同高體）之比例，若一比三。**[56]

55 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁四，《崇禎曆書》，頁 1384。
56 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁五，《崇禎曆書》，頁 1384。



圖十三：《幾何原本》卷十二立體，《測量全義》掃描

圖十四：《九章算術》「商功章」立體，《測量全義》掃描

參考圖十四，這些出自《九章算術》「商功章」如委粟、倚垣等概念，都是角體的例子。針對「角體」與「立面體」之關聯，羅雅谷也是運用《九章算術》「商功章」的概念工具如「立方」（立面）、「塹堵」、「陽馬」及「鼈臑」，提供他的「論曰」如下：

> **論曰：角體為立面體三之一者，何也？如正立方體，自上而下，對角平分之，為兩塹堵。每一塹堵得正立方二之一。又于塹堵之兩方面，自上而下，對角平分之，成大小兩分。大者為陽馬，得塹堵三之二。小者為鼈臑，得塹堵三分一。則一正立方，分之為塹堵，得二。陽馬則三，鼈臑則六。角體者，陽馬也，故得立面體三之一也。詳見九章算。**[57]

緊接著上述「論曰」及插圖（圖十四）之後，[58]羅雅谷顯然為了計算橢球體積（本卷最後有「量撱圓體之容」），而引進「截角體法」（截圓錐體法）及其五種圓錐截痕：三角形、平圓形、圭竇形（拋物線）、陶丘形（雙曲線），以及撱圓形（橢圓形）。由於我已經另文論述此一主題，此處就略而不贅。[59]

《測量全義》內容與「商功」有關的立體，還有下列第三種：

> **第三名斗體。古名方窖、圓窖等。其上下兩面不等而相似，蓋角體之截分也。引長其稜，即相遇而成全角之體。凡置斗體，大而居下。本角體之截分，角體欲自立，底必在下也，其置裁分亦然。**[60]

---

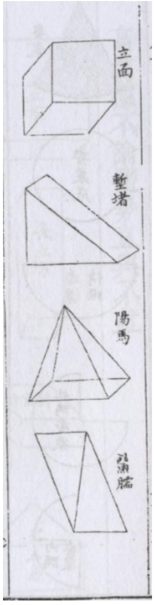
57 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁八，《崇禎曆書》，頁 1386。

58 這個插圖除了鼈臑之外，另外三個立體已經企圖呈現空間視覺效果，這可能是在中國問世的算書最早出現的例子。不過，這四個立體圖形並非從最上面的立面逐次切割而成，它們之間缺乏邏輯連結，顯示羅雅谷、編輯及刻工等人員插圖訓練之不足。

59 洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉。

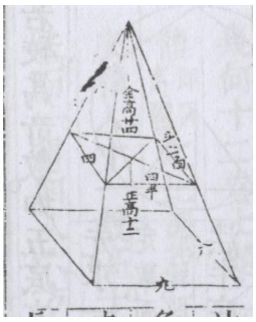
60 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁九，《崇禎曆書》，頁 1386。

所謂的「角體」，亦即今日所謂的「錐體」，至於「斗體」就是截頂的「角體」

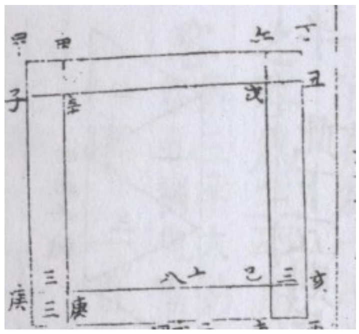


圖十五：《測量全義》掃描

（截頂錐體）。羅雅谷在計算「斗體」體積時，先是就已知本角體之高的情況，「**先求本角體之容，後求所闕截分之容，相減，餘為元體之容**」，[61]亦即，在錐體高已知時，將未截的錐體之體積，減去截掉的錐體之體積，剩下來的就是所求體積。（參考圖十六）這個公式（算法）或並未現身在《九章算術》「商功章」之中，不過，對於「斗體」圖形之形象認識，顯然不無助益。



圖十六：《測量全義》掃描



圖十七：「方亭」之截體分求

然而，

若不知全角體之高，則截體分求之法曰：如甲乙丙丁，斗體之大面也，邊各二十四。戊巳庚辛，小面也，邊各十八。用垂線截斗體。從戊巳邊向下至午未底，分元體為二。從辛庚邊向下至申酉底，從庚巳至戌亥，從辛戊至子丑，皆如之。分元體為九。一居中，成立面體。四邊四體為塹堵。四隅四體為陽馬。各以本法求其容，并為斗體之容。[62]

[61] 同上。
[62] 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁十，《崇禎曆書》，頁 1387。

上述這個「**截體分求之法**」(參考圖十七)，幾乎就是《九章算術》「方亭術」的部分內容之翻版。[63]羅雅谷究竟如何得知？或許他所參考的「九章筭」就包括此一內容吧。不過，有了底邊是正方形（方亭底面（大面）是正方形）的案例，羅雅谷相當得心應手地將此一公式推廣到下列情況：「**若斗面為多邊形而無法，或其稜不等，亦用此法**」。

《測量全義》卷六還有五種正多面體的體積計算、「量圜球之容」，以及「量撱圓體之容」等等。在此，我們只簡略引述其中的「量圜球之容」(球體積計算)，他指出：「**圓球之全理，見亞奇默德《圓球圓柱書》，併見《幾何（原本)》一十四卷。**」請參考他的第一題：「球上大平圜之積，為本球圜面積四之一」，亦即（半徑為$\boldsymbol{R}$的）球面上大圓（**great circle**）的面積等於球表面積（$\boldsymbol{4\pi R^2}$) 的四分之一。在中算的脈絡中，球表面積的計算涉及《九章算術》卷一「方田章」的「宛田」圖形概念，[64]而這當然是中算家（包括劉徽與祖沖之）無從處理的主題。

（未完待續）

記吳嘉麗教授二三事

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

驚聞吳嘉麗教授驟逝，非常意外與不捨。茲追憶與她交遊的二三事，聊表些許懷思，也用以誌記我們曾經共事的美好時光。

淡江大學科學史講座課程之創立，完全是該校化學系教授的全力支持，其中吳嘉麗扮演最關鍵的角色。當然，該校化學家（包括曾憲政教授）的開闊胸襟與博雅素養，也有助於凝聚開課共識，乃能在系務會議中通過，開設一門與通識有關的科學史課程。我記得最早在臺灣倡導科學史研究的郭正昭先生也曾給過一些建議，後來他移居美國之後，很多人大概已淡忘。

這類課程在科學史尚未在臺灣學界成為一個學門之前，顯得十分重要，因為它發揮了象徵性的意義，儘管科學史的專業學者還不知道何時才會現身。在這種處境中，嘉麗老師主持講座始終如一，固定開課，並且四處網羅國內（主要是業餘的）學者參與。這種作風也充分表現在她所投注的婦女運動，以時間換取空間，這是她非常寬容的處世之道。

這種寬容也襯托她那律己甚嚴的豁達，反正路已安排，向前走就是。她在西雅圖華大博論口試之後，立刻在當天搭機返臺任教。她的最後簡訊說：「所幸我大部分的任務都已交待，沒有太多牽掛，現在我盡量配合治療就好，感謝所有朋友們給我的鼓勵。」嘉麗老師，一路好走！

[63] 有關《九章算術》卷五「方亭術」，可參考郭書春，《九章算術譯注》，頁 177-178。
[64] 「宛田」被認為是一種「球冠形」(spherical cap)。參考郭書春，《九章算術譯注》，頁 63。

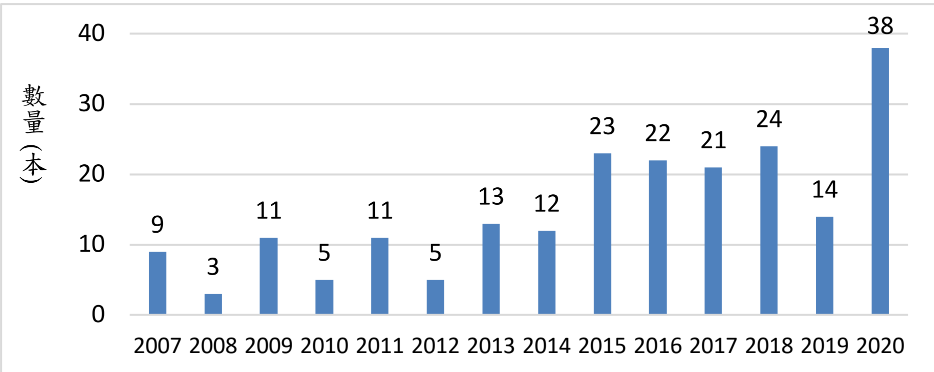
《建構優良數學普及書籍指標》之研究心得

楊清源
臺灣師範大學數學系碩士班研究生

一、前言

筆者高中階段時，由於想知道更多考試以外的數學知識，意外接觸洪萬生教授所推薦的數學普及書籍。[65]這個因緣促使筆者反思一向以來對於數學的印象，從而強化就讀師大數學系的意願，又有幸跟著洪萬生教授做數學普及書籍的研究。現在，順利完成碩士論文（**2021** 年 **7** 月通過論文口試），筆者期待教師及學生能藉由我的心得分享，透過數學普及書籍了解數學的多元面向。

鑒於 **108** 數學領綱的實施，普通高中必須開設「選修課程」，包括加深加廣、補強性及多元選修課程，讓學生自主選修。一旦教師開設選修課程時，事前必須閱讀許多相關資料，可以想見科普書 (包含數學普及書籍) 也會是其中的參考資料。再者，從圖書出版狀況看來，筆者藉由博客來網路書店調查 **2007** 年至 **2020** 年的數學普及書籍出版量，發現到逐年上升的趨勢，如下圖所示：



圖一

值得注意的是，近五年來，每年平均有 **20** 本書籍出版，其中 **2020** 年出版量達到最高峰，有 **38** 本書籍之多，顯示這類書籍出版蓬勃發展。不過，站在教師或學生（等使用者）的角度，這勢將反應出一個問題：「教師或學生想挑選書籍時，若單靠專家推薦文，或者具有公信力單位的推薦書單，礙於推薦書單無法即時更新，導致挑選到的書籍未能完全符應教師或學生的需求。那麼，該如何解決此問題呢?」

綜合上述原因，筆者打算想建構優良數學普及書籍指標，協助高中教師或學生隨自己的需求挑選優良的、能夠增進數學素養的數學普及書籍。進而擬定兩個研究問題：

[65] 過去至今該類書籍統稱為科學普及書籍，或稱科普書。但是，筆者察覺數學普及越漸重要，因此改名為數學普及書籍，係指書籍以數學相關內容為主題，企圖讓讀者感受到數學知識、技能、思想與方法等，並不考慮教科書、升學參考書、劇本、電影、漫畫、雜誌或詩集的形式。

1. 依據文獻及專家學者的意見，所建構的優良數學普及書籍指標為何?
2. 應用前述建構完畢的優良數學普及書籍指標，據以分析不同類型的數學普及書籍之結果為何?

接著，以下將依序介紹對應的方法，說明如何解決、結果如何和心得反思。

二、研究方法與結果

針對第一個研究問題，筆者以洪萬生、劉柏宏和林芳玫 (2009) 制定的優良數學普及作品標準為基礎，運用文獻探討法、德懷術及焦點團體討論法，建構優良數學普及書籍指標。其中，德懷術係指集結該領域專家，透過問卷蒐集意見的一種集體決策技術。這個研究方法得以順利完成，要感謝洪萬生教授提供臺灣數學史教育學會的資源，筆者藉著兩次數學科普專家會議的機會，請專家們協助填寫德懷術問卷，以增加指標建構之信效度，從而建構指標。

針對第二個研究問題，筆者採取內容分析法。先修正洪萬生(2018)對數學普及作品的分類，並進一步從 2021 年臺灣數學史教育學會的推薦書單中，根據數學小說類、趣味數學類、數學知識演化史類，以及數學教育議題反思類等四類，分別挑選各 2 本書籍作為分析對象，書目如下：

- 數學小說類：《數學女孩：隨機演算法》《逆轉騙數》
- 趣味數學類：《數學好有事》《喚醒大腦裡的數學家》
- 數學知識演化史類：《窺探天機：你所不知道的數學家》《數學起源：進入古代數學家的另類思考》
- 數學教育議題反思類：《幫孩子找到自信的成長型數學思維》《數學之前人人平等》

同時，挑選對應的專家書評、推薦文、作者序或編者序，將力求多元觀點，以補充書籍的內容，因此，挑選如下：

書籍	專家書評、推薦文與作者序
《數學女孩：隨機演算法》	洪萬生，〈數學女孩與隨機漫步＞[66]
《逆轉騙數》	李俊儀，〈魔數界中的獨孤九劍〉[67] 洪萬生，〈「解謎、玩魔數、做數學」一本令人著迷的數學小說〉[68] 陳宏賓，〈讀這本書有一種「緊要關頭腦袋不靈光就死定了！」的臨場感〉[69] 黃寒楨，〈激發孩子學習數學的隱沒力量〉[70]
《數學好有事》	洪萬生，〈專業推薦：數學好有事〉[71] 洪萬生，〈Case 說書人：數學好有事〉[72] 臺灣數學史教育學會，〈推薦文：數學好有事〉[73]
《喚醒大腦裡的數學家》	賴以威，〈推薦序─充滿熱情的數學傳播家〉[74]
《窺探天機：你所不知道的數學家》	洪萬生，〈《窺探天機：你所不知道的數學家》後記〉[75] 臺灣數學史教育學會，〈推薦文：窺探天機：你所不知道的數學家〉[76]
《數學起源：進入古代數學家的另類思考》	洪萬生，〈數學起源的根本魅力〉[77]
《幫孩子找到自信的成長型數學思維》	林福來，〈數學好好玩〉[78]
《數學之前人人平等》	賴以威，〈數學教育的平權之書〉[79]

挑選書評之目的除了補充書籍內容外，透過比對書籍經過指標所呈現的優勢是否與書評內容一致，還能間接檢視指標建構是否完備、是否能夠忠實呈現書籍的優勢。

至於為何要用分類的角度應用指標分析書籍呢？筆者從現有的數學普及書籍研究發現，**Asklaksen (2006)、Balas (1997)、Nuessel (2019)、Padula (2004, 2005, 2006)、Smith (2003)、Sriraman (2003, 2004)、Shloming (2012) 與英家銘 (2006)、洪萬生(2018、2020) 等文獻，都曾指出數學小說與 HPM 參考書籍具備不同的教育功能與其教學上的實踐成果。由此，便可猜測：「趣味數學類，以及數學教育議題反思類是否亦具備上述教育功能或其他特性?」**

66 全文請見結城浩，《數學女孩：隨機演算法》，頁 i-ii。
67 全文請見莊惟棟，《逆轉騙數》，頁 4-5。
68 全文請見莊惟棟，《逆轉騙數》，頁 6。
69 全文請見莊惟棟，《逆轉騙數》，頁 6-7。
70 全文請見莊惟棟，《逆轉騙數》，頁 9-10。
71 全文請見 Marianne Freiberger & Rachel Thomas，《數學好有事》，頁 5。
72 全文請參考網址：https://www.youtube.com/watch?v=PctrhG6V5J8。
73 全文請參考網址：https://reurl.cc/vqmj0a。
74 全文請參考網址：https://www.books.com.tw/products/0010867606。
75 全文請見洪萬生主編，《窺探天機—你所不知道的數學家》，頁 v-viii。
76 全文請參考網址：https://pse.is/3h6ejv。
77 全文請見 Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones& Jack D. Bedient，《數學起源：進入古代數學家的另類思考》，頁 1-3。
78 全文請見 Jo Boaler，《幫孩子找到自信的成長型數學思維：學好數學不必靠天賦，史丹佛大學實證研究、讓孩子潛力大爆發的關鍵方法》，頁 1-3。
79 全文請參考網址：https://www.books.com.tw/products/0010858347。

為此，筆者運用建構完畢的優良數學普及書籍指標分析書籍，綜合文獻、書籍、專家書評與指標結果，除了向讀者展示如何操作指標、發現各類書籍的特色之外，還獲得以下三個結果：

1. 數學普及書籍的內容往多元、跨類別發展。
2. 數學普及書籍的教育功能。
3. 優良數學普及書籍指標對高中教師、出版業者與有意撰寫數學普及書籍之作家相關建議。

以上可視為建構優良數學普及書籍指標與應用指標分析各類型書籍時所產生的結論，回應第二個研究問題。

三、研究心得

關於筆者為何挑選研究優良數學普及書籍指標作為題目，其實是源自於洪萬生老師的建議。在筆者大四修習數學社會史專題的課程上，洪老師曾建議筆者可以效仿蘇惠玉老師的研究〈**HPM** 實踐在台灣：以《**HPM** 通訊》為研究個案〉，將對象改為台灣數學博物館，以此書寫成碩士論文。[80]因此，起初筆者是以此為目標作整理，後來發現博物館內的「深度閱讀」有 **100** 多篇的書評，多數書籍附上洪萬生等人**(2009)** 的指標。然而，細究指標的內容時，發覺指標有修改的空間，亦即，在指標操作上可以修改的更加明確，以方便讀者使用。另一方面，筆者認為數學普及書籍對我自己選擇數學這條路的影響甚大，導致後來轉而研究如何建構更加完善的指標。

事實上，筆者原本設想是補足洪萬生等人 **(2009)** 指標中缺乏子維度的星等 **1** 至 **5** 之定義。如此之過程牽涉到評量規準，筆者認為對書籍評分與對學生的數學表現評分有相似結構，便請教研究評量的專家曹博盛教授如何擬定書籍評分規準；隨後，因為修習王婷瑩教授開設的數學教育研究法，也請教關於指標制定與論文撰寫的問題。也因為這門課的第二個功能是給婷瑩老師指導的學生報告論文進度，筆者很感謝婷瑩老師額外邀請謝佳叡教授來聆聽筆者的論文報告，讓筆者知道自己的不足和增加研究嚴謹性的方法。於是，才有後續筆者藉由洪老師推薦數學科普書的活動，請數學科普專家協助填寫德懷術問卷之過程。於此感謝曾經協助填寫問卷之專家，因為有您的寶貴意見才能促成指標更加完善。

除了請教上述教授、專家們，筆者在碩一及碩二時，藉著擔任數學史和小說與電影中的數學思維助教的機會，定期和洪老師討論進度。每當自己查閱資料產生疑惑，老師總能旁徵博引地解釋，有時從閒話家常的故事，啟發筆者從未想過的研究點子，令筆者受益匪淺。印象最深刻的是，在研究初期，筆者迷思在許多文獻之中，與老師討論後，似乎看見曙光，然而，筆者當時並沒有像老師一樣，站在較高的觀點看待研究論文，導致當時筆者

[80] 台灣數學博物館之建置，主要得自國科會科教處所贊助的三年期研究計畫－「數學文化工藝虛擬博物館」(2008/08-2010/07，歸屬大眾科學學門)，以及本系學術資源之支援。目的是基於分享數學知識/活動的價值與意義之願景。參考網址：http://mathmuseum.tw/old/。

並未了解老師真正的意思，直到半年過後，筆者再次提出相同的問題時，老師的解釋才讓筆者豁然開朗，讓原本混沌未明的狀態，漸漸開始明朗而聚焦。尤其，**2021** 年 **5** 月底臺灣疫情加劇，阻斷與老師當面討論的機會，轉而透過電子郵件討論，有時信件敘述無法忠實呈現筆者的原意，只能透過多次信件往返確認。由此，再次感謝洪老師的不厭其煩地解釋與指導。即便疫情打亂許多安排的事情，但也讓筆者有更多時間投注在論文上，並以 **1660** 年代牛頓為了躲避鼠疫離開劍橋三一學院的故事，期許自己閉關研究的成果，也能對學術界與教育界有所貢獻。

回到前面邀請數學科普專家的經過，筆者得以接觸臺灣數學史教育學會並在該會擔任助理，也要感謝洪老師的邀請，讓筆者在做數學普及書籍的研究中，具有實際參與數學普及之經驗，譬如，協助孔廟辦理六藝之數的展間演講、辦理數學普及書籍推薦活動等。同時，在學會中也認識許多學長姊，幫助筆者加速融入洪老師的數學史團隊，從中獲得許多學長姊的提拔。此外，洪老師也引薦筆者至清華大學擔任英家銘教授的研究助理，讓筆者在經濟上無後顧之憂。從而，在英家銘教授的提點下，認識清華大學歷史所科技組，獲得參加科學史研討會的機會，擴展筆者的科學史研究視野。

同時，也要感謝楊凱琳教授擔任共同指導，以及，英家銘教授不辭路途遙遠來到師大擔任口試委員，兩位教授都對筆者的研究提出非常具體且寶貴的建議，讓筆者看見自己的不足與可以改進的地方，特別在文獻探討及研究方法建議良多，筆者反思自己是太熱衷於文獻比較，往往模糊論文的焦點，而且文幅過長與散亂。經過一番天人交戰，決定捨去先前整理的長篇大論，更簡要、聚焦在論文的主軸。另外，也要感謝謝豐瑞教授在課堂上對筆者的論文提出問題與建議。筆者真的很幸運能遇到如此多的教授與專家提供協助，才有今天這篇論文的誕生。

四、結語

最後，還是免不了重申此篇論文的價值。首先，建構完畢的指標，可以提供給高中教師、出版業者與有意撰寫數學普及書籍之作家相關建議。次者，筆者應用指標來分析書籍，得以看見近年來數學普及書籍的書寫特色，同時，也觀察到從事這類書籍書寫的作者具備專業數學教育的背景，指出數學教師在數學普及中扮演的角色愈發重要，鑒於 **Howson & Kahane (1990)**、**Stewart (2006)**、**Lenger (2013)**、**Ghys (2014)**、洪萬生 **(2018)** 指出國際數學普及的背景與訴求，以及筆者對近幾年台灣數學普及活動的觀察，綜合出不管是國內、國外，或是，教育體制內或體制外，在在印證教師擔任數學普及的推手應當責無旁貸！筆者也自我期許能夠運用這份研究的結論與心得，回饋到高中教學現場，幫助自己、教師與學生挑選符合自己需求的數學普及書籍，分享筆者初次接觸數學普及書籍的喜悅。

參考資料

Brookhart, S. M. (2013). ***How to Create and Use Rubrics for Formative Assessment and Grading*****. Alexandria : ASCD.**

Ghys, Etienne. (2014) The internet and the popularization. Retrieved from http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/icmseoul.pdf (Jun. 20, 2020)

Howson, A.G. & Kahane, J.-P. (1990). *The Popularization of Mathematics*. New York : Cambridge university press.

Jia-Ming Ying(英家銘). (2004, May). *A Critical Review on Popular Math Publications in Taiwan*. In W. S. Horng, Y. C. Lin, T. C. Ning & T. Y. Tso (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference* (Taichung: National Taichung Teachers College, 2004).

Kelecsenyi, Klara. (2009). *Popularization of Mathematics as Intercultural Communication - an Exploratory Study*. PhD thesis, Concordia University. Retrieved from https://spectrum.library.concordia.ca/976628/1/NR63411.pdf.

Lenger, Philipp. (2013). Popuplarising mathematics. Retrieved from https://mathigon.org/downloads/popularising-mathematics.pdf (Oct. 6, 2019)

Padula, Janice. (2005). Mathematical fiction: Its place in secondary-school mathematics learning. *Australian Senior Mathematics Journal 61*(4): 6-13.

Padula, Janice. (2006). Mathematical fiction for senior students and undergraduates: Novels, plays, and film. *Australian Senior Mathematics Journal 20*(2): 36-44.

Stewart, Ian. (2006). Mathematics, the media, and the public. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*. (pp. 1631-1644). Berlin : European Mathematical Society.

洪萬生、劉柏宏和林芳玫 **(2009).** 百部數學普及作品的內容與形式之研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫。**(NSC 96-2511-S-003-021)**。

洪萬生 **(2018).** 〈台灣數學普及活動三十年〉，**Open Book** 閱讀誌 **https://www.openbook.org.tw/article/p-19517**。

網路資源

台灣數學博物館**(Math Taiwan Museum)**：**http://mathmuseum.tw/old**

臺灣數學史教育學會**(Taiwanese Society for the History and Pedagogy of Mathematics)**：**https://www.hpmsociety.tw/**

《**HPM** 通訊》：**https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**

《建構優良數學普及書籍指標》摘要

楊清源
臺灣師範大學數學系碩士班研究生

本研究目的有二：建構優良數學普及書籍指標，以及應用指標分析不同類型的數學普及書籍。針對第一個研究目的，本研究採取文獻探討法、德懷術與焦點團體討論，以洪萬生等人（**2009**）的優良數學普及作品標準為主要參考依據，藉由數學普及書籍與書評定義指標內，每個子維度 **1** 至 **5** 星等的定義及對應例子，初步建構優良數學普及書籍指標，形成第一回德懷術問卷。以 **14** 位專家學者為研究對象，進行兩回德懷術問卷調查，透過專家意見與統計結果，以及與焦點團體討論，判斷專家意見是否收斂、指標是否有越修越好的趨勢，確定優良數學普及書籍指標。針對第二個研究目的，本研究採取內容分析法，從 **2021** 年臺灣數學史教育學會推薦書單，依據數學普及書籍**(**包含數學小說類、趣味數學類、數學知識演化史類及數學教育議題反思類**)**，每類挑選 **2** 本，共挑 **8** 本數學普及書籍作為研究對象。再以優良數學普及書籍指標作為分析架構，分析不同類型的數學普及書籍之特色。

本研究主要結果如下：在優良數學普及書籍指標包含三個維度「**A.** 知識的實質內容」、「**B.** 形式或表達」、「**C.** 內容與形式如何平衡」的前提下，筆者再細分為 **15** 個子維度，分別為 **A-1** 認識論面向、**A-2** 方法論面向、**A-3** 歷史或演化面向、**A-4** 哲學面向、**A-5** 教育面向，以及 **A-6** 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結；**B-1** 創新手法、**B-2** 數學知識的洞察力、**B-3** 歷史事實的洞察力、**B-4** 異文化的啟蒙意義、**B-5** 忠實可靠的參考文獻、**B-6** 敘事的趣味性、可及性與一貫性，以及 **B-7** 中譯本的品質；**C-1** 青少年層次和 **C-2** 教師層次。其中，每個子維度皆有 **1** 至 **5** 星等的定義與其對應的例子。

關鍵字：優良數學普及書籍指標、德懷術、數學普及書籍。

論文通過時間：**2021** 年 **7** 月

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：https://www.hpmsociety.tw/
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：**許文璋**（銘傳國中）
台北市：**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍**（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）**陳啟文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）
郭慶章（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）
彭良禎（師大附中）**郭守德**（大安高工）**張瑄芳**（永春高中）**張美玲**（景興國中）
文宏元（金歐女中）**林裕意**（開平中學）**林壽福、吳如皓** (興雅國中) **傅聖國**（健康國小）
李素幸（雙園國中）**程麗娟**（民生國中）**林美杏**（中正國中）**朱賡忠**（建成國中）**吳宛柔**（東湖國中） **王裕仁**（木柵高工）**蘇之凡**（內湖高工）
新北市：**顏志成**（新莊高中） **陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**羅春暉** (二重國小) **賴素貞**（瑞芳高工）**楊淑玲**（義學國中）**林建宏** （丹鳳國中）**莊耀仁**（溪崑國中）、**廖傑成**（錦和高中）
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）**林宜靜**（羅東高中）
桃園市：**許雪珍、葉吉海**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中） **陳威南**（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） **鐘啟哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中） **程和欽** (大園國際高中)、**鍾秀瓏**（龍岡國中）**陳春廷**（楊光國民中小學）**王瑜君**（桃園國中）
新竹市：**李俊坤**（新竹高中）、**洪正川**（新竹高商）
新竹縣：**陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）、**林芳羽**（大里高中）、**洪秀敏**（豐原高中）、**李傑霖、賴信志、陳姿研**（台中女中）、**莊佳維**（成功國中）、**李建勳**（萬和國中）
彰化市：**林典蔚**（彰化高中）
南投縣：**洪誌陽**（普台高中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）**郭夢瑤**（嘉義高中）
台南市：**林倉億**（台南一中）**黃哲男、洪士薰、廖婉雅**（台南女中）**劉天祥、邱靜如**（台南二中）**張靖宜**（後甲國中）**李奕瑩**（建興國中）、**李建宗**（北門高工）**林旻志**（歸仁國中）、**劉雅茵**（台南科學園區實驗中學）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）**歐士福**（前金國中）**林義強**（高雄女中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）**楊瓊茹**（屏東高中）**黃俊才**（中正國中）
澎湖縣：**何嘉祥 林玉芬**（馬公高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**張復凱**（金門高中） 馬祖：**王連發**（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！