HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：https://www.hpmsociety.tw/
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

**第二十四卷第二期目錄(2021 年 6 月)**



# 算術不患多學 – 沈括的數學漫遊[1]

英家銘
國立清華大學通識教育中心

十一世紀是歐洲與東亞文明的中世紀，在十一世紀，基督教正式分裂為羅馬公教與希臘正教，現代意義的大學在歐洲誕生，宋帝國進入東亞世界在科技與藝術的黃金時代，高麗沿用五代至宋的科舉制度，且保留算學科，日本進入藤原氏貴族政治最盛期，包含天文與算學在內的技術官僚成為世襲家學，阿拉伯商人航行歐亞大陸各地，西至地中海，東至宋帝國，古希臘文獻逐漸從阿拉伯文被翻譯成拉丁文，歐洲學者將亞里斯多德 - 托勒密的宇宙論與基督教神學調和成相容的整體，使經院哲學出現。對歐亞大陸來說，這個時代就是各種文化互相衝擊的時代。在這個有趣的十一世紀，東亞出現一位如同「文藝復興人」(**Renaissance man**）那樣具有多樣才能的文人沈括（公元 **1031-1095** 年)，或許也不太奇怪。

沈括是宋帝國杭州錢塘縣人，出自官宦世家，由於其父沈周屢屢調任各地為官，沈括跟隨搬遷，增加了不少見識。沈括自小偏好自然數理、藝文醫卜之類的雜學，不太專注於晉身仕途的經學，至三十三歲始中進士，被任命揚州轉運使司理參軍，職務包括負責運河運輸貨物的調度工作。**1066** 年，沈括入京編校昭文館書籍。宋神宗任命王安石為相，進行改革，沈括也積極參加。先後任史館檢討，集賢院校理，提舉司天監，軍器監。**1075** 年，沈括以翰林侍讀學士的身分，出使遼國交涉劃界事宜。他在出使途中繪記了遼國山川險阻及風俗人情，上於朝廷。**1088** 年，沈括移居潤州，將他以前購置的園地加以經營，名為「夢溪園」，在此隱居，寫成《夢溪筆談》這部名著（劉柏宏，**2018**）。

《夢溪筆談》是沈括的學習與思考筆記，內容包羅萬象。《宋史·沈括傳》記載：

---

[1] 本文為作者於 2020 年 12 月 17 日在國立清華大學通識中心的演講整理而成，本演講屬於該單位所舉辦之「清華大學通識人物 – 沈括」系列演講之一。本演講在準備過程與演講當日收到清大通識中心的師長與演講聽眾諸多指導，特此感謝。

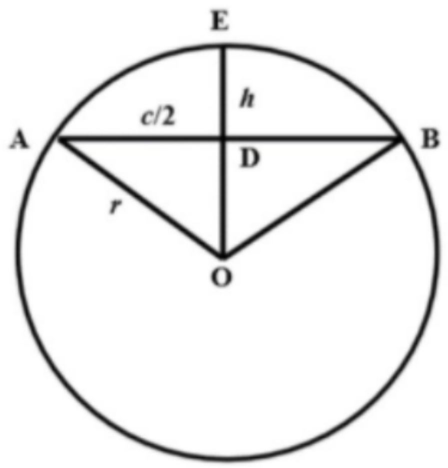
括博學善文，於天文、方志、律曆、音樂、醫藥、卜算，無所不通，皆有所論著。又紀平日與賓客言者為《筆談》，多載朝廷故實、耆舊出處，傳於世。

從這段記載，我們也可以看到沈括本人的博學多聞。《夢溪筆談》中的科學與技術知識，是科學史研究與普及著作常提到的內容，在臺灣受教育的朋友也必然在教科書中看過《夢溪筆談》的描述。然而，大家比較不清楚的是，沈括其實也有把他對數學的想法寫到《夢溪筆談》中。下面筆者就簡單地介紹這些內容。

《夢溪筆談》全書共 609 條筆記，與數學直接相關的僅有四條，即卷十一〈官政〉的「行軍運糧問題」，和卷十八〈技藝〉的「隙積術與會圓術」、「棋局都數」，以及「算術多門」。〈官政〉中「行軍運糧問題」的內容與唐代科舉考試算學科的教科書《算經十書》中許多問題類似，是解決行政相關的問題。沈括的仕途中，曾負責運輸貨物的調度工作，那個問題的本質也是如此，討論在戰爭行軍過程中，如何用最少的人力調度所需的糧草。

沈括主要還是把數學放在〈技藝〉這一卷。「棋局都數」這一條討論的是，圍棋總共可能有多少種終局。從現代數學的角度來說，圍棋棋盤縱橫各 19 條線，共 $19 \times 19 = 361$ 個交叉點，每個點在最終有可能下黑子、白子或留空位，所以總共的終局可能性就是 $3^{361}$ 種可能性。沈括的年代東亞還沒有指數律的表示方法，所以他做計算的時候必須慢慢計算，但從沈括的計算過程中，可以看到他隱約使用了指數律簡化他的計算步驟。

另外在「會圓術」的部分，沈括給出了一個扇形弧長的近似公式，如下圖一，弧長 $\widehat{AB} = \frac{2h^2}{d} + c$，其中 $c$ 為 $AB$ 弦長，$h$ 為半徑與 $AB$ 弦心距之差，$d$ 為直徑。這個近似公式在圓心角不太大的時候較為準確，但沈括並沒有告訴我們他如何得到這個近似公式。




圖一：《夢溪筆談》會圓術示意圖（劉柏宏，2018）。

讀到這裡，不知道讀者是否有與筆者有同樣的感覺，就是沈括討論的數學不太有趣。還好，在「隙積術」這部分，沈括給了我們很多可以思考的地方。

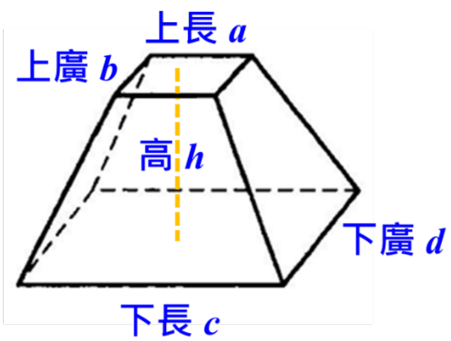
「隙積術」主要的內容如下：

> 算術求積尺之法，如芻萌、芻童、方池、冥谷、塹堵、鱉臑、圓錐、陽馬之類，物形備矣，獨未有隙積一術。古法：凡算方積之物，有立方，謂六冪皆方者。其法再自乘則得之。有塹堵，謂如土牆者，兩邊殺，兩頭齊。其法併上下廣，折半以為之廣，以直高乘之。又以直高為股，以上廣減下廣，餘者半之為勾。勾股求弦，以為斜高。有芻童，謂如覆斗者，四面皆殺。其法倍上長加入下長，以上廣乘之；倍下長加入上長，以下廣乘之；併二位，以高乘之，六而一。隙積者，謂積之有隙者，如累棊、層壇及酒家積罌之類，雖似覆斗，四面皆殺，緣有刻缺及虛隙之處，用芻童法求之，常失於數少。余思而得之，用芻童法為上位，下位別列：下廣以上廣減之，餘者以高乘之，六而一，併入上行。…（中略）芻童求見實方之積，隙積求見合角不盡，益出羨積也。

這段話的一開始提到，古代計算體積，有「芻萌、芻童、方池、冥谷、塹堵、鱉臑、圓錐、陽馬」這些體積公式，其實已經很完備，但獨缺「隙積」這個方法，就是沈括想要補充的內容。前面提到的體積公式，在一世紀編成的《九章算術》都有提及，且三世紀數學家劉徽有為這些公式給出證明，其中關於錐體體積的極限相關論述，是古代中國算學最經典的數學論證之一。沈括在這裡特別提到「芻童」的體積公式：「有芻童，謂如覆斗者，四面皆殺。其法倍上長加入下長，以上廣乘之；倍下長加入上長，以下廣乘之；併二位，以高乘之，六而一」。「芻童」的形狀如同下圖二的截頂長方錐，其體積公式為

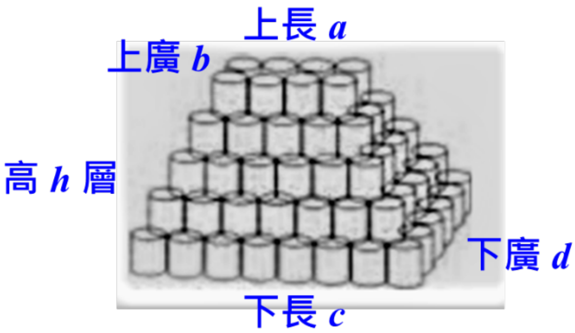
$$V=\frac{h}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d]。$$

而關於劉徽如何證明這個體積公式，讀者可參考郭書春（1998）。




圖二：芻童示意圖（郭書春，2008）。

沈括接著說到：「隙積者，謂積之有隙者，如累棊、層壇及酒家積罌之類，雖似覆斗，四面皆殺，緣有刻缺及虛隙之處，用芻童法求之，常失於數少。」沈括是說，所謂「隙積」，就是有空隙的堆積。比如當我們把很多棋子、石塊、酒罈堆疊起來的時候，看起來很像倒過來的斗，由下而上四面都會縮小，但其中有很多凹陷或空隙（如下圖三），如果用芻童的公式來求數量，通常會少算。




圖三：隙積示意圖（羅見今，2017）

乍看之下，沈括的話很難理解。芻童的體積公式是計算實體體積用的，跟計算堆疊酒罈的個數本來就是不同的問題，而且，如果你用實體體積的公式去計算有空隙的堆疊，竟然會少算而不是多算？

從數學的角度來看，用芻童公式來算積罌數量，就是把體積公式轉換為數量的公式，這時問題就從體積計算轉換成「高階等差級數」。等差級數的問題在許多古文明都有討論，中學數學牽涉到的等差數列與級數問題，在一世紀的《九章算術》與五世紀的《張丘建算經》已經完全解決。而這裡沈括考慮的積罌數量，本質上是一種「高階等差級數」問題。如果酒罈的最上層有 $\boldsymbol{a \times b}$ 個酒罈，每往下一層長和寬會多一個酒罈，總共堆疊 $\boldsymbol{n}$ 層，那麼這個總數就是

$$\boldsymbol{ab + (a+1)(b+1) + \cdots + (a+n-1)(b+n-1)}。$$

這是一個「高階等差級數」，它的每項之間的差會形成等差級數。舉個簡單的例子來看，如果一個數列的前幾項有下面的形式

$$\boldsymbol{2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, 6 \times 7, \cdots}$$

那麼它們每項之間的差

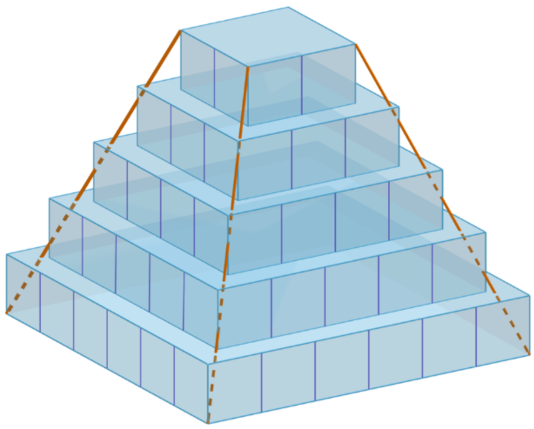
$$\boldsymbol{6, 8, 10, 12, \ \cdots}$$

就形成了等差級數。

積罌的計算是一種高階等差級數的問題，而使用體積公式來考慮積罌，就必須要把一個酒罈轉換成一個單位的體積，也就是 $\boldsymbol{1 \times 1 \times 1}$ 的正方體。這樣轉換之後，為什麼用芻童公式去計算會少算呢？沈括在這段最後告訴我們他的答案：「芻童求見實方之積，隙積求見合角不盡，益出羨積也。」

原來，沈括的想法是這樣的。如下圖四，當你把一個一個的酒罈都轉換為$\boldsymbol{1 \times 1 \times 1}$的正方體後，這個堆疊出來的形狀就如同圖中藍色部分的物體，它的上底面與下底面可

以視為芻童的上底面與下底面，而茶色的線條就是芻童的四個側面稜。從圖四可以看到，在較上層的部分，芻童會比堆疊物多出一些體積，而較下層的部分，堆疊物會超出芻童的側面，這就是沈括所說的「合角不盡，益出羨積」。上層芻童多算，下層堆疊多算，但下層明顯比上層的個數（或體積）要多，整體加總是堆疊物較多，所以沈括才會得到結論是用芻童公式計算堆疊數量會少算。



圖四：芻童與隙積術示意圖。

沈括說會少算，那正確的數量為何呢？沈括的公式是「用芻童法為上位，下位別列：下廣以上廣減之，餘者以高乘之，六而一，併入上行」。如果堆疊物最上層是 $\boldsymbol{a \times b}$ 個，最下層是 $\boldsymbol{c \times d}$ 個，總共疊了 $\boldsymbol{n}$ 層，那麼沈括的隙積術公式就是

$$\boldsymbol{V} = \text{芻童體積} + \frac{\boldsymbol{n}}{6}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}}{6}[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\boldsymbol{d}]+\frac{\boldsymbol{n}}{6}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})。$$

這其實是正確的數量公式，但沈括沒有告訴我們他如何得到。如果我們用現代的數學符號來看，我們嘗試化簡

$$\boldsymbol{ab}+(\boldsymbol{a}+1)(\boldsymbol{b}+1)+\cdots+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{n}-1)$$

與

$$\frac{\boldsymbol{n}}{6}[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\boldsymbol{d}]+\frac{\boldsymbol{n}}{6}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})$$

這兩個代數式。我們會發現，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{ab}+(\boldsymbol{a}+1)(\boldsymbol{b}+1)+\cdots+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{n}-1)\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{i})=\sum_{i=0}^{n-1}[\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{i}^2]\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{ab}+\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{i}^2\\
&=\boldsymbol{abn}+\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{\boldsymbol{n}}{6}(\boldsymbol{n}-1)(2\boldsymbol{n}-1)。
\end{aligned}$$

且

$$\frac{n}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d]+\frac{n}{6}(d-b)$$

$$=\frac{n}{6}[(3a+n-1)b+(3a+2n-2)(b+n-1)+n-1]$$

$$=\frac{n}{6}(3ab+bn-b+3ab+3an-3a+2nb+2n^2-2n-2b-2n+2+n-1)$$

$$=\frac{n}{6}(6ab+3an+3bn-3a-3b+2n^2-3n+1)$$

$$=abn+\frac{n(n-1)}{2}(a+b)+\frac{n}{6}(n-1)(2n-1)。$$

也就是說，兩式是相等的，沈括給出的公式真的能正確地計算隙積這類的高階等差級數。

從數學史的角度來看，沈括的確是東亞歷史上最早考慮高階等差級數的學者。這一類「堆垛求積」的問題，後來被稱為「垛積術」，十三世紀南宋楊輝與元帝國朱世傑的著作讓「垛積術」成為東亞算學的重要分支，至十九世紀清帝國李善蘭與朝鮮李尚爀等學者都還有研究。

沈括在「算術多門」這一條中提到的他對算學的想法，他認為「算術不患多學，見簡即用，見繁即變，不膠一法，乃為通術也。」沈括在算學上的「研究」，就像他在許多其他領域中寫的筆記一樣，都可以看成一種「漫遊」。方法可以學習很多，但要視狀況改變用法，而且要練習在不同脈絡中轉換的能力，這樣比較有可能解決更多問題。沈括將堆疊物的問題轉換成體積的思考，是一種靈活的轉換，我們在學習數學的時候，常常也需要學習如何將真實世界的問題轉換成數學世界的方法，在數學世界進行思考與計算之後，再回到真實世界去回答原本的問題。沈括的數學漫遊，也給了我們一種轉換的例子，供數學教師與學習者參考。

## 參考資料


胡道靜（1988），《夢溪筆談導讀》，成都：巴蜀書社。

郭書春（1998），《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。

劉柏宏（2018），〈蘇頌與沈括的科技心、人文情〉，《通識在線》77 期。

羅見今（2017），〈沈括 《夢溪筆談》 中計數成就探析〉，《數學傳播》41 卷 2 期, pp. 70-79。

# 牟合方蓋與球體積公式

楊清源* 蔡承男* 胡秉右** 楊峻魁**

* 臺灣師範大學數學系碩士班研究生
** 臺灣師範大學數學系

## 一、前言

在「《九章筭術》譯注」一書中，有著許多關於陽馬體積的思路可延伸至球體積計算的相關問題。[2]故在本文中，我們將先回顧《九章算術》是怎麼提出此問題以及劉徽註解的思路，再補充祖暅原理、牟合方蓋。最後，我們「重現」祖暅在開立圓術中所呈現的證明進路。為了方便讀者閱讀及理解，筆者嘗試運用現代數學符號與詞彙分別說明劉徽和祖沖之父子的思路。此外，於本文末附上使用微積分證明球體積公式作為補充。

## 二、問立圓徑與劉徽注解

在《九章算術》卷四少廣章中，有一個題目如下：

> **有積一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百尺。問為立圓徑幾何？**
> **答曰：一萬四千三百尺。**
> **開立圓術曰：置積尺數，以十六乘之，九而一，所得，開立方除之，即立圓徑。**

上述題目以白話文說明即：給定體積為 1644866437500 (立方) 尺之球，其直徑為何？計算結果以現代符號表示如下：$r=\sqrt[3]{1644866437500\times 16\div 9}$，其中 $r$ 為球之半徑。也就是說，當時的人對於球體積公式的認知為 $\frac{9}{16}r^3$，三國時代魏國數學家劉徽為此做注：

> **立圓，即丸也。為術者蓋依周三徑一之率。令圓冪居方冪四分之三。圓囷居立方亦四分之三。更令圓囷為方率十二，為丸率九，丸居圓囷又四分之三也。置四分自乘得十六，三分自乘得九，故丸居立方十六分之九也。故以十六乘積，九而一，得立方之積。丸徑與立方等，改開立方而除，得徑也。然此意非也。**

劉徽的意思是：這種計算方法是錯誤的，前人認為若我們把圓周率視為 **3**，在立方體中內切一圓柱體，則立方體體積比上圓柱體體積，等於正方形與其內切圓的體積，即 **4:3** (圓周率)；此外，前人認為圓柱體內切一球，其圓柱體與球的體積比仍為 **4:3**，則立方體體積比上球體積之體積比為 **16:9**，故有上述球體積公式的 $\frac{9}{16}r^3$ 出現；可是這當中將圓柱體與球體積比視為 **4:3** 是錯誤的，因為此圖形截面為兩同心圓，並非如前者正方形與內切圓的

---

[2] 本文敘述引自洪萬生(2018/10/9)於國立臺灣師範大學數學系數學史課程中討論「劉徽，算經十書及唐代數學」之課程投影片內容。

關係，故不能以 **4:3** 計算之。

於此同時，劉徽也給出了他對於球體積公式的計算想法：「何以驗之？取立方棊八枚，皆令立方一寸，夜之為立方二寸。規之為圓囷，徑二寸，高二寸。又復橫因之，則其形有似牟合方蓋矣。八棊皆似陽馬，圓然也。按：合蓋者，方率也，丸居其中，即圓率也。」

由上文中提到，劉徽認為：牟合方蓋可利用兩圓柱體相交得之，若是利用牟合方蓋內切一球，則任意橫截面皆為一正方形內切一圓，則可得牟合方蓋與其內切球之體積比，等於正方形面積比上其內切圓面積。但可惜的是，這時候尚未有牟合方蓋之體積計算方式，劉徽也自認無法求得牟合方蓋之體積，故就此打住，留給後人證明之。

## 三、祖暅原理

前文提到，我們可以利用橫截面面積比例，計算出球體積公式，這種想法《九章算術》的作者以及劉徽於《九章算術》卷五：「商功」的注解，略可窺見，而在南北朝時，亦由數學家祖沖之的兒子祖暅再次提出，故又稱為祖暅原理。雖然並未明顯看出《九章算術》作者及劉徽是否以祖暅原理推得方堡壔、圓堡壔、方亭、圓亭、方錐、圓錐、塹堵、陽馬之體積，不過中算家將幾何體視為由面疊積而成、按方與圓之間的面積比值，先求出每個截面為正方形的體積，再透過比例間接求出截面為圓形的體積，是確有其脈絡（李繼閔，**1992**）。[3]基於此，可知原作者與劉徽的證明是有所本。同時，所求兩兩之間的體積是隱約有著祖暅原理的影子。

時間推演至南北朝，祖沖之與祖暅父子倆按著劉徽留下的證明進路，明確提出：「緣冪勢既同，則積不容異」解決牟合方蓋的體積，也解決球的體積公式。其中，這番話也就被世人稱為祖暅原理，或稱等積等冪原理，白話的說就是兩個立體物體，兩者的截面積處處相等，而且高度相同，則兩者體積相同。

我們可以利用生活隨處可見的硬幣來簡易說明此原理。如下圖，我們先把數枚硬幣排成圓柱得下圖一，再將圓柱任意疊高得下圖二，將每一個一元硬幣視為一個截面，很顯然每一個截面積都一樣，因為都是同樣之硬幣堆疊，再來圖一高度亦與圖二高度相同，由於都是同一堆硬幣疊出來的，所以體積理所當然也會一樣。

圖一：若干個硬幣排成圓柱體

圖二：若干個硬幣任意疊高

---

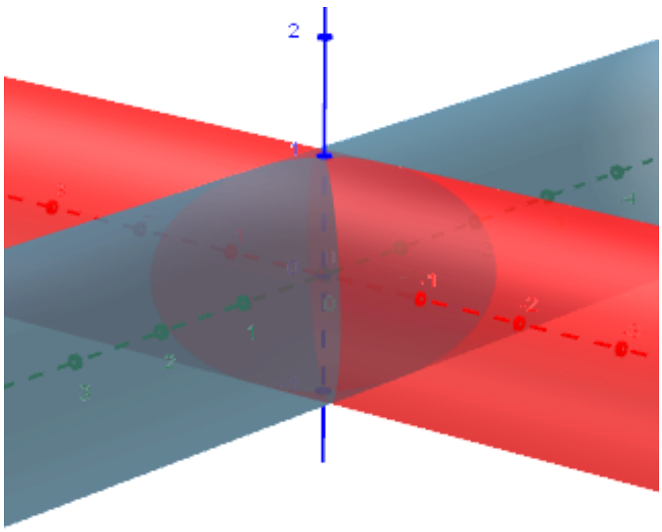
3 李繼閔（1992）。《九章算術》及其劉徽注研究。台北：九章。

或者，亦可以微積分方法證明之。我們假設第一個幾何體在高度 $h$ 處的截面積為 $f(x)$，第二個幾何體在高度 $h$ 處的截面積為 $g(x)$，兩者體積分別是 $\int f(x)dh$ 以及 $\int g(x)dh$，我們知道兩個幾何體的高度一樣，所以積分範圍一樣。再來兩者的截面積相同，所以 $f(x) = g(x)$，因此積分當然相等，所以體積也就一樣。

也就是說，若我們能確定兩個立體的任意高度截面積皆相同，則此兩立體體積相同，同理可以推廣：**兩立體任意高度截面積成比例，則此兩立體體積比例，亦與其截面積比例相同。**[4]

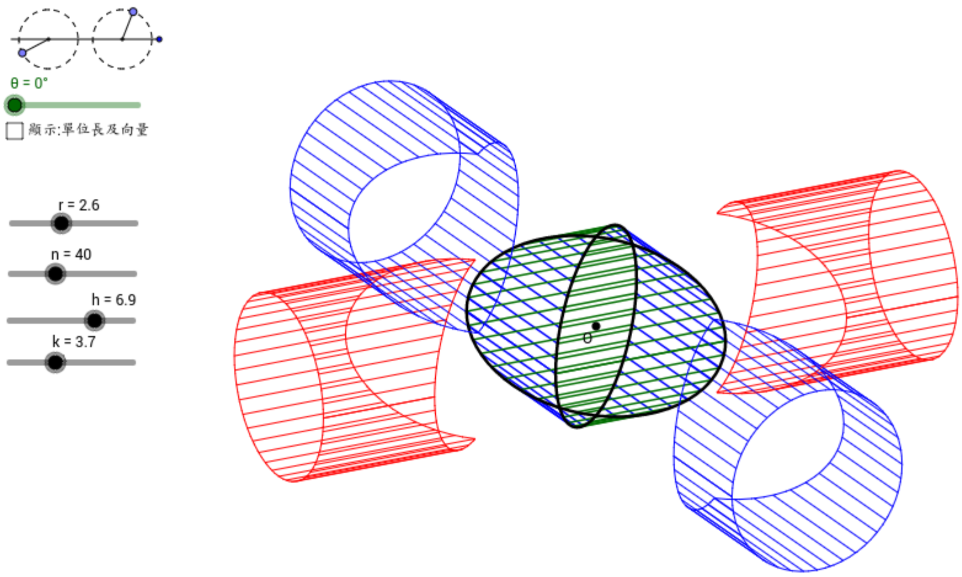
## 四、牟合方蓋

在前文中，我們提到了牟合方蓋這個立體圖形，牟合方蓋是一種幾何立體，由兩個等半徑圓柱躺在平面上垂直相交的公共部分，因為像是兩個方形的蓋子合在一起，所以被稱作「牟合方蓋」，下圖三即為牟合方蓋側視圖，圖四為其透視圖。圖四中間的黑色部分即為牟合方蓋。




圖三：牟合方蓋側視圖

[4] 關於此定理，在 17 世紀的歐洲，卡瓦列里雖然沒有嚴格證明，卻也發現了此定理，在他的《用新方法促進的連續不可分量的幾何學》中，與不可分量原理並用，史稱卡瓦列里定理。當時的卡瓦列里認為平面都是由無窮多個線段組成，而任何立體則由無窮多個平面組成，並宣稱:「我們可以利用這些不可分量來計算長度、面積和體積。」不過與祖暅相比，其時空背景卻是先解決「兩個平面圖形夾在同一對平行線之間，並且被任何與這兩條平行線保持等距的直線截得的線段都相同，則這兩個圖形面積相等」的命題，爾後才類比到體積上。在歷史的脈絡上，毫無疑問地影響著牛頓與萊布尼茲對於微積分的啟發。參考〈微積分的宗教密史〉。《科學人》，149(7)。取自 2018/ 12/ 26 http://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?Unit=featurearticles&id=2466。




圖四：牟合方蓋透視圖

## 五、《九章算術》註解開立圓術祖暅注原文

介紹至此，已可以進入我們本次的主題：「利用牟合方蓋發現及證明球體積公式」，在《九章算術》註解中，唐代李淳風等人留下了祖沖之、祖暅之父子創立之牟合方蓋之計算公式（郭書春，2017），[5]原文如下：

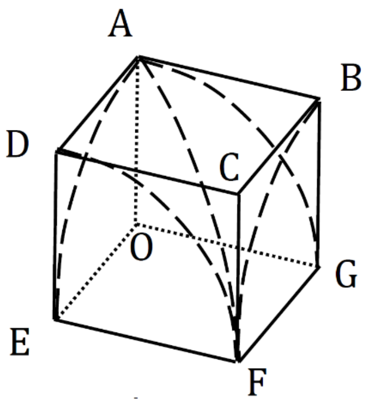
> **臣淳風等謹按：祖暅之謂劉徽、張衡二人皆以圓囷為方率，丸為圓率，乃設新法。祖暅之開立圓術曰：以乘積開立方除之，即立圓徑。其意何也？取立方棋一枚，令立樞於左後之下隅，從規去其右上之廉。又合而橫規之，去其前上之廉。於是立方之棋分而為四，規內棋一，謂之內棋；規外棋三，謂之外棋。[說明一]更合四棋，復橫斷之。以勾股言之，令余高為勾，內棋斷上方為股，本方之數，其弦也。勾股之法，以勾冪減弦冪，則余為股冪。若領余高自乘，減本方之冪，余即內棋橫斷上方之冪也。本方之冪，即外四棋之斷上冪。然則余高自乘，即外三棋之斷上冪矣。不問高卑，勢皆然也。然固有所歸同而途殊者爾。而乃控遠以演類，借況以析微。[說明二]按陽馬方高數參等者，倒而立之，橫截去上，則高自乘與斷上冪數，亦等焉。夫疊棋成立積，緣冪勢既同，則積不容異。由此觀之，規之外三棋旁蹙為一，即一陽馬也。三分立方，則陽馬居一，內棋居二可知矣。合八小方成一大方，合八內棋成一合蓋。內棋居小方三分之二，則合蓋居立方亦三分之二，較然驗矣。[說明三]**

為便於說明上文內容，筆者將分為【說明一】、【說明二】、【說明三】三部份說明如下。

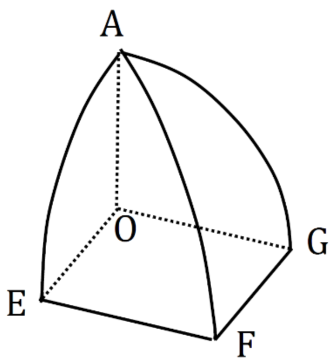
【說明一】
此段文字中提到，取一立方體，根據圖五的切割方式分割成四塊立體圖形，如圖六及圖七 。

---
[5] 郭書春（2017）。九章算術譯注。 載於韓寓群、徐傳武（主編），中國古代科技名著譯注叢書。上海：新華出版。

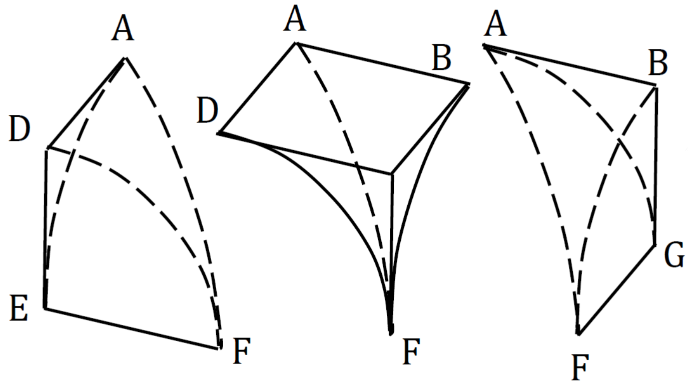
其中圖六稱為內棋，其餘三者稱為外棋，而內棋的形狀則恰好為牟合方蓋八分之一部份。



圖五：立方體的分割方式



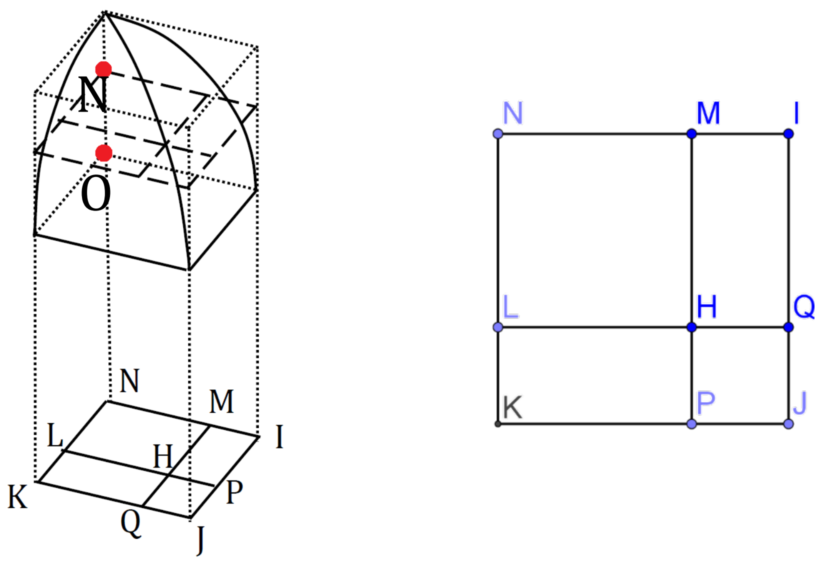
圖六：內棋



圖七：外棋

【說明二】

如圖八左，將內棋與三外棋拼合起來，在高度 $h$ ($\overline{ON}$)處橫切一刀，則根據勾股定理，可以算出圖八中 **LKJIMH** 之六邊形之面積（如圖八右）恰好為橫切面之高度平方 $h^2$，任意高度皆是如此。



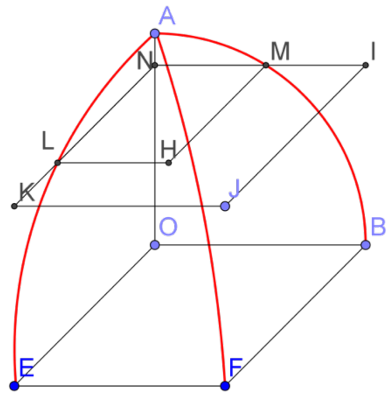
圖八：橫切面示意圖

證明：

如下圖九，給定橫切之高度 $h$，則 $\overline{ON}^2 = h^2$...... (1)式

由於牟合方蓋是兩個全等圓柱交出來的圖形，因此，注意到整個的截面與內棋的截面都是正方形。我們以大正方形 **NKJI** 與小正方形 **NLHM** 稱之。於是，大正方形扣掉小正方形的面積，便是三個外棋的截面積之和。

亦即橫切面 **LKJIMH** 的面積為 $\overline{NI}^2 - \overline{NM}^2$...... (2)式




圖九：內棋與立方體橫切之示意圖

我們要證明 (2)式= $h^2$，從而證明 (1)式 = (2)式

在上圖中，我們有 $\overline{OM} = \overline{NI}$ (都是圓柱的半徑 $r$)，則 $\overline{OM}^2 = \overline{NI}^2$

考慮直角三角形ONM，由畢氏定理，我們有 $\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{NM}^2$

由代換我們知：$\overline{ON}^2 = \overline{NI}^2 - \overline{NM}^2$...... (3)式

注意到，$\overline{NI}^2$等於大正方形面積

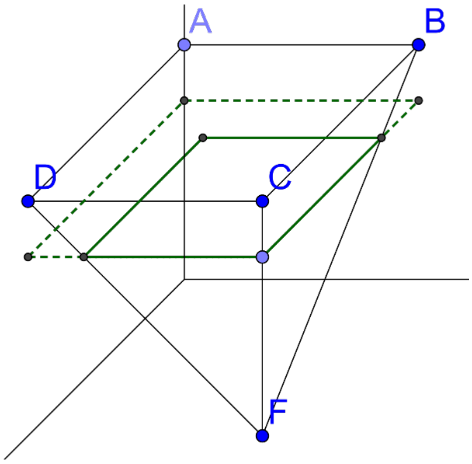
$\overline{NM}^2$等於小正方形面積

也就是說，由(3)式，$\overline{ON}^2 = (2)$式

因此 (1)式 = (2)式，得證。

【說明三】

將一個高度與前文所述之立棋邊長相同之陽馬倒立（如下圖十），以相同的切割方式，在高度 $h$ 處橫切一刀，則其切面之面積為恰好為橫切面之高度平方 $h^2$（註：橫切面與底面 **ABCD** 恰為相似形，故橫切面之正方形邊長亦為 $h$）。




圖十：倒立陽馬[6]

也就是說，我們前文所提三個外棋合在一起的橫切面 **LKJIMH**（圖九）的面積 $\boldsymbol{h^2}$ 與倒立之陽馬橫切面積相同。

根據祖暅原理，外棋的截面積與倒立陽馬的截面積處處相等，則外棋的體積與倒立陽馬之體積相等，即 $\boldsymbol{\frac{1}{3}r^3}$（其中 $\boldsymbol{r}$ 為立方體之邊長），那麼，內棋（ $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$ 個牟合方蓋）的體積即為 $\boldsymbol{r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3}$。牟合方蓋體積公式為 $\boldsymbol{8\times\frac{2}{3}r^3=\frac{16}{3}r^3}$

我們已證明出牟合方蓋之體積計算公式，根據牟合方蓋定義，牟合方蓋的橫切面即為一圓形外接正方形，如前文所述，**牟合方蓋與其內切球之體積比，等於正方形面積比上其內切圓面積**。由此可知：

$\boldsymbol{\frac{16}{3}r^3}$：球體積 $\boldsymbol{=4}$ ：$\boldsymbol{\pi}$，則球體積公式$=\boldsymbol{\frac{16}{3}r^3\times\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi r^3}$。

## 六、結語

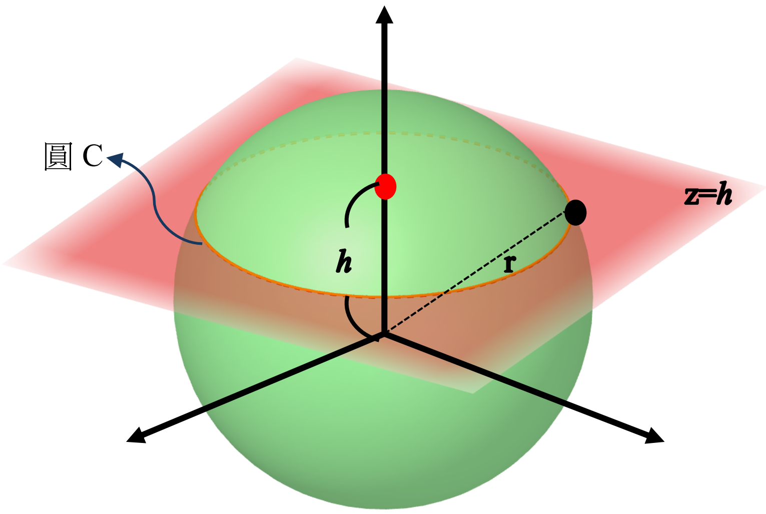
前人種樹，後人乘涼。數學的發展歷程已幾千餘年，現實生活中無處不見數學的存在，它是美的展現，也是最精確的工具，我們在過往數學家的努力之下，已有了方便而快速的數學公式得以使用，但我們卻鮮少停下腳步，回過頭來細細品味這些定理、公式背後所蘊含的數學意義與本質，好比廣為人知的球體積公式在計算使用上方便快速，但若從頭解釋起其來源，可不是簡單的事情。

已有許多數學界的前輩完成不同的證明，在資訊獲取便利的時代，我們連上網路，或在陽光灑落的午後信步走入圖書館，便得以穿梭時空，閱讀不同時期的文本；坐在電腦前鍵入方程式，便可讓所探究的問題視覺化，讓對於數學的探索行為如魚得水；我們有幸生於這個年代，擁有古往今來的文獻、資料，得以翻閱、整合，在與文本的交流下，一窺數學的美妙。

[6] 陽馬為底面為長方形，兩個三角面與底面垂直之四角錐。

## 附錄：利用微積分證明球體積公式

對於球體積公式的發展，劉徽、祖氏父子以及唐代李淳風等人功不可沒，上述證明的巧思令人為之驚嘆，於此同時，我們也利用微積分的方式，寫下了球體積公式的積分證明，以利前後對照。

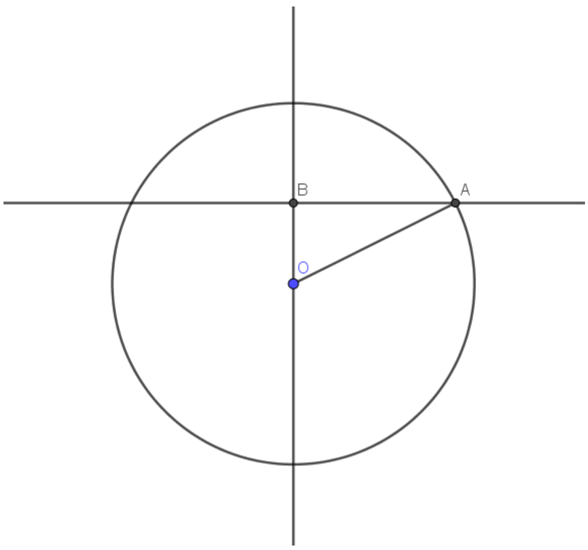



圖十一　半徑為 $r$ 的球於平面 $z=h$ 相交

證明：

考慮半徑為 $r>0$ 的球，將球心置於原點並取 $h$，滿足 $r>h>-r$

讓平面 $z=h$ 和球相交，則兩圖形相交於一圓 C




圖十二　在 yz 平面上的截面圖形

圓 C 的半徑為 $\overline{AB}$，又 $\overline{OA}$ 即球的半徑 $r$、$\overline{OB}$ 即 $h$

由畢氏定理，我們有 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=r^2-h^2$

則 圓 C 的面積為 $\pi\times\overline{AB}^2=\pi(r^2-h^2)$

而當 $h=r$ 或 $-r$，$z=h$ 和球相切為一點，可以說截面積為 0

因此我們得到一個截面積函數 $\boldsymbol{A(z)=\pi(r^2-z^2)}$ **for** $\boldsymbol{r\geq z\geq -r}$

則球體積即為：

$$\int_{-r}^{r} A(z)dz$$

$$\int_{-r}^{r} A(z)dz = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-z^2)\,dz = 2\int_{0}^{r} \pi(r^2-z^2)\,dz$$

$$=2\big(F(r)-F(0)\big)\left(\text{where } F(z)=\pi(r^2z-\frac{1}{3}z^3)\right)$$

$$=2\pi(r^2r-\frac{1}{3}r^3)$$

$$=2\pi(r^3-\frac{1}{3}r^3)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

**(Q.E.D)**

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：**https://www.hpmsociety.tw/
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

**《HPM 通訊》聯絡員**

日本：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：**許文璋**（銘傳國中）
台北市：**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍**（成功高中）**蘇俊鴻**（北一女中）**陳啟文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）**郭慶章**（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）**彭良禎**（師大附中）**郭守德**（大安高工）**張瑄芳**（永春高中）**張美玲**（景興國中）**文宏元**（金歐女中）**林裕意**（開平中學）**林壽福、吳如皓** (興雅國中) **傅聖國**（健康國小）**李素幸**（雙園國中）**程麗娟**（民生國中）**林美杏**（中正國中）**朱賡忠**（建成國中）**吳宛柔**（東湖國中）**王裕仁**（木柵高工）**蘇之凡**（內湖高工）
新北市：**顏志成**（新莊高中）**陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**羅春暉** (二重國小) **賴素貞**（瑞芳高工）**楊淑玲**（義學國中）**林建宏**（丹鳳國中）**莊耀仁**（溪崑國中）、**廖傑成**（錦和高中）
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）**林宜靜**（羅東高中）
桃園市：**許雪珍、葉吉海**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中）**陳威南**（平鎮中學）**洪宜亭、郭志輝**（內壢高中）**鐘啟哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中）**程和欽** (大園國際高中)、**鍾秀瓏**（龍岡國中）**陳春廷**（楊光國民中小學）**王瑜君**（桃園國中）
新竹市：**李俊坤**（新竹高中）、**洪正川**（新竹高商）
新竹縣：**陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）、**林芳羽**（大里高中）、**洪秀敏**（豐原高中）、**李傑霖、賴信志、陳姿研**（台中女中）、**莊佳維**（成功國中）、**李建勳**（萬和國中）
彰化市：**林典蔚**（彰化高中）
南投縣：**洪誌陽**（普台高中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）**郭夢瑤**（嘉義高中）
台南市：**林倉億**（台南一中）**黃哲男、洪士薰、廖婉雅**（台南女中）**劉天祥、邱靜如**（台南二中）**張靖宜**（後甲國中）**李奕瑩**（建興國中）、**李建宗**（北門高工）**林旻志**（歸仁國中）、**劉雅茵**（台南科學園區實驗中學）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）**歐士福**（前金國中）**林義強**（高雄女中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）**楊瓊茹**（屏東高中）**黃俊才**（中正國中）
澎湖縣：**何嘉祥 林玉芬**（馬公高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**張復凱**（金門高中）　**馬祖：王連發**（馬祖高中）

**附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！**