HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十四卷第一期目錄 2021 年 3 月

數學經驗的敘事美學：以歐拉算式 $e^{i\pi}+1=0$ 為例~(三)

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

(續前一期)

四、數學小說家的美學敘事

除了數學普及作家之外，數學小說家也對歐拉公式及算式，引發了相當動人的「遐思」。在本節中，我們將介紹三位作家對於歐拉算式所發揮的敘事想像。這三位作家依序是小川洋子、結城浩以及朵拉・穆西亞拉克。由於他們的創作文類是數學小說（**mathematical fiction**），所以，我們將特別注意歐拉公式與他們的各自敘事之關聯。這種「合情入理」的安排，讓數學小說這種新文類得以彰顯獨特的價值與意義，不僅文學鑑賞如此，從數學教育觀點來看，也是如此。[1]

1. 小川洋子：《博士熱愛的算式》

前引大栗博司（本文第三節第 **8** 小節引述）曾提及「**小川洋子的《博士熱愛的算式》中，化解未亡人與看護者心中殘留的遺憾的，就是這項被寫在博士的筆記紙上的公式。**」在小川的這本小說中，此處所謂「未亡人」，是指博士的寡嫂，至於第一人稱的看護者（亦即管家，在日本稱為家政婦），則是被寡嫂聘請來看護記憶只有八十分鐘的博士。

博士寫下歐拉算式的紙條之插曲，是由於寡嫂嫉妒博士將管家及其兒子根號視為家人，而辭退管家之後，根號回來探視博士，讓寡嫂有了向管家直接興師問罪的機會。結果，在當面對質時，博士以紙條寫下這個算式交給寡嫂後，她的敵意頓時消解，原來這個算式是博士與寡嫂之間不倫戀的秘密愛情證詞。於是，管家再度接受聘約，回來照顧博士終老。

[1] 有關小說敘事情節與數學知識活動的連結（之必要），可參考洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》。

管家（學歷只有高職肄業）因為受過博士的數學啟蒙，對這個算式充滿了好奇心，遂決定到市立圖書館查閱，一探究竟。最後，她在一本有關費馬最後定理的數學普及書籍中，終於看到一模一樣的歐拉算式，而作者的敘事是從自然對數的底 e 開始的：

對於 e 的部份，根據歐拉的計算：
e=2.718281828459045235326028…
永無止境持續下去，…… 但計算式比數字簡單多了。

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\ldots$$

雖然簡單，卻更加深了 e 的謎團。

這個所謂的自然對數，一點都不自然。如果不用符號表示，即使用再巨大的紙也無法寫完，用這種無法看到盡頭的數字為底，簡直太不自然了。…… 歐拉用了這個極不自然的概念，編織出一個公式。他從這些看似毫無關係的數字中，發現了彼此之間自然的關聯。

e 的 π 和 i 之積的次方再加上 1，就變成了 0。（頁 162-163）

於是，管家重新看著博士紙條上書寫的歐拉算式，抒發了極富詩意的敘事：

永無止境地循環下去的數字，和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡，在某一點落地。雖然沒有圓的出現，但來自宇宙的 π 飄然地來到 e 的身旁， 和害羞的 i 握著手。他們的身體緊緊地靠在一起，屏住呼吸，但有人加了 1 以後，世界就毫無預警地發生了巨大的變化，一切都歸於 0。歐拉公式就像是暗夜中閃現的一道流星；也像是刻在漆黑的洞窟裡的一行詩句。（頁 162-163）

正如我曾經指出，小川洋子的上述敘事深受保羅・霍夫曼影響。[2]在本文第三節第 6 小節中，我們從《數字愛人》所引述的片段文字，就足以證明兩者有極高的相似度。事實上，小川洋子的日文原版所納入的參考文獻，就包括霍夫曼的《數字愛人》之日文譯版。另一方面，小川洋子所塑造的博士原型，可能就有數字愛人保羅・艾迪胥的身影。

2. 結城浩：《數學少女》與《數學女孩：費馬最後定理》

《數學少女》是結城浩的第一本數學小說，他對歐拉的謳歌與禮讚可以說完全沒有保留。本書主題是分析數（**partition of natural number**），但是，為了說明這個主題的研究方法，作者也經常舉例說明「跨界連結」的重要性。此外，數學到底是什麼？作者藉由該小說中的數學才女米爾迦說：

如康托爾所說「數學的本質是自由」，尤〔歐〕拉老師是自由的，他將無限大或無限

[2] 參考洪萬生，〈《博士熱愛的算式》：數字愛人的故事〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》，新北市：遠足文化出版社，**2017**。

小的概念靈活運用在自己的研究上，無論是圓周率的 π ，虛數單位的 i 或是自然對數的底 e，都是尤〔歐〕拉老師開始使用的（符號）文字，老師在當時無法橫渡的河上架了一座橋，就像在柯〔哥〕尼斯堡上架設新橋一樣。（頁 262）

儘管在本小說中，作者並未引用歐拉算式，但是，他注意到歐拉靈活運用無限大或無限小的概念（參見本文第五節），已經有了極強列的暗示。然後，在他的第二部數學小說《數學女孩：費馬最後定理》中，結城浩以該書第 **9** 章來介紹「最美麗的數學公式」。

在本章中，作者邀請年紀最小的由梨（國中生角色）介紹歐拉公式與歐拉算式：

$e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$

這就是歐拉公式。首先，我們要把 i 這個虛數單位給忘掉，然後緊盯著這個公式一探究竟。這個公式的左邊呈現指數函數的形式，而右邊則呈三角函數的形式。……

歐拉公式利用等號，將指數函數與三角函數這兩大類，人們以為沒有什麼共同性的函數給緊密地結合起來了。真是不可思議呢！（頁 266-267）

最後，由梨再用 π 來取代上述公式中的 θ，而得到歐拉算式 $e^{i\pi}+1=0$。或許「**只要仔細觀察指數函數 e^x 與三角函數 $cos\ \theta$ 和 $sin\ \theta$ 的泰勒展開式的話，就可以從中發現歐拉公式了。**」（頁 **282**）當然，作者利用本章其他篇幅，清晰地說明歐拉如何在指數函數與三角函數之間，搭起一座連結的橋。儘管我們無從知道結城浩是否研讀過歐拉的相關文本（如本文第五節所引），但是，他將 $x = i\theta$「大膽代入」 e^x 的泰勒（或冪級數）展開式，還是讓我們充分領會歐拉「基於全然信賴數學的力量」所做的「形式類比」（**analogy in form**）！

此外，雖然 $e^{i\pi}+1=0$ 是大家「公認」最美麗的數學公式，作者還是讓由梨說出她比較喜歡歐拉公式 $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$，因為「**在這麼單純的一行公式當中，竟然塞滿了許多美麗的東西。**」儘管她「**還不是十分瞭解。**」

3. 朵拉・穆西亞拉克：《蘇菲的日記》

在這本數學小說（英文名為 ***Sophie's Diary: A Mathematical Novel***）中，作者朵拉・穆西亞拉克（**Dora Musielak**）虛構了蘇菲・熱爾曼（**Sophie Germain, 1776-1831**）的日記，敘說蘇菲如何在法國大革命巴黎圍城的五年（**1789-1994**）間，如何憑藉著數學天賦與自修苦讀，而成為一代的數學家。

在日期為 **1790** 年 **5** 月 **10** 日的日記中，作者所安排的情節，是讓蘇菲分享她閱讀歐拉著作的深刻心得：

〔 $e^{i\pi}+1=0$ 〕**將五個獨特的基本數目，連結成一個極精緻的關係式：基本的整數 1**

和 0、主要的數學符號＋和＝，以及特別的數字 e、i 和 π。我並不知道這個關係式是什麼意思，我只能想像這個美麗的等式所隱藏的秘密。……

歐拉精緻的等式是 $e^{ix}=cosx+i\ sinx$ 的特殊例子，而他也註明這個公式，可以用我最喜歡的函數之實數正弦和餘弦，來表示成為複指數形式。他利用棣美弗定理，推論出這個特殊的關係式，說明對於何實數 x 和任何整數 n，正弦和餘弦會以下列形式連結：

$(cos\ \ x+i\ \ sin\ \ x)^n=cos\ \ nx+i\ \ sin\ \ nx$　（頁 78-80）

本書最後一則日記（日期為 **1794** 年 **12** 月 **29** 日），是蘇菲藉由數學史的回顧，禮讚歐拉的偉大貢獻：

歐拉或許是本世紀最偉大的數學家，他的成就是如此豐碩，以致於我根本數不清。數學家崇拜歐拉，說他幾乎在數學的每一個領域都做過研究，而且，他發展了微積分方法，拓展它的應用，有效地將數學推進到數學思想的一個新的境地。儘管歐拉一生大半時間半盲，最後十七年甚至全盲，他卻保有計算上近乎神奇的技能。在歐拉那些了不起的定理中，他導出了漂亮的方程式：$e^{i\pi}+1=0$，連結了數學的基本數目，這是一個啟發我良多的神聖公式，今天它仍讓我深深著迷。

上引結城浩與朵拉・穆西亞拉克對歐拉算式與公式的連結意義之說明，可以說是大同小異，只不過前者特別藉著由梨的心得，指出她喜歡公式 $\boldsymbol{e^{ix}=cos\ \ x+i\ \ sin\ \ x}$ 更甚於 $e^{i\pi}+1=0$。事實上，這個「比較」具有數學洞察力的意義。另一方面，小川洋子對歐拉公式的詩意想像（**poetic imagination**），則見證了她上乘的文學功夫，而在數學小說中獨樹一幟。

五、歐拉公式 $e^{i\varphi}=cos\varphi+isin\varphi$ 的由來

在本節中，我們首先引述大栗博司《用數學的語言看世界》第八話第 **6** 節的內容，來說明「連結三角函數與指數函數的歐拉公式」。這些論證是前述引文（見本文第四節第 **8** 小節）的前置作業，其主要目的當然是歐拉公式的由來。

1. 大栗博司的說明

在本小節中，大栗博司一開始就指出：「**高中數學學習過的三角函數指數函數雖然是完全獨立發展出來的，但是藉由複數，竟然將這兩個函數之間的關係明朗化了。**」至於其中的關鍵，則是因為指數函數的乘法法則 $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ 與三角函數的加法定理 $(\cos\theta_1+isin\theta_1)(\cos\theta_2+isin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)$ 非常相似。

緊接著，他利用加法原理導出棣美弗公式 $(cos\ \ \theta+i\ \ sin\ \ \theta)^n=cos\ \ n\theta+i\ \ sin\ \ n\theta$。再改寫成下式：

$$\cos\ \theta + i\ \sin\ \theta = (\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n})^n$$

當 n 愈來愈大時，θ/n 就愈小，於是，

$$\cos(\frac{\theta}{n}) \approx 1，\sin(\frac{\theta}{n}) \approx \frac{\theta}{n}$$

從而可推得

$$\cos\ \theta + i\ \sin\ \theta = (\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n})^n \approx (1 + i\frac{\theta}{n})^n$$

現在，如果 n 趨近於無限大，則上式可以寫成：

$$\cos\ \theta + i\ \sin\ \theta = \lim_{n\to\infty}(1 + i\frac{\theta}{n})^n = e^{i\theta}$$

為了讓最後這個式子有意義，大栗博司根據指數函數 $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ 的定義，將 x 從實數改成複數 $i\theta$，如此，極限式 $\lim_{n\to\infty}(1 + i\frac{\theta}{n})^n = e^{i\theta}$ 還是有意義。因此，歐拉公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ 成立。

上述大栗博司對歐拉公式的推導與說明，應該是歐拉原版的改寫。請參看下一小節我們對歐拉進路的引述與說明。

2. 歐拉的推論

歐拉的《無限小分析引論》（***Introductio in Analysin infinitorum*, 1748**）是十八世紀的分析學經典。誠如數學史家李文林指出：「在數學史上，歐拉首先把函數放到了微積分的中心地位。他在《無限小分析引論》中明確宣稱『數學分析是關於函數的科學』，並對函數概念做了前所未有的深入考察，獲得了許多對分析的嚴格發展有重要意義的結果。」在本節我們從《無限小分析引論》所引述的論證，[3]可以發現：「歐拉在這裡揭示了指數函數、對數函數與三角函數的聯繫，給出了數學中初等函數的統一理論。」

由於歐拉的論證對現代讀者來說，已經相當清晰易讀，因此，在下文中，我將盡可能讓歐拉的史料「自己說話」，以便貼近歐拉的心智活動，從而欣賞他的論證之「現代性」！

歐拉首先指出：

> **在對數與指數量之後，我們將研究圓弧及其正弦和餘弦，這不僅是因為它們構成了另一類超越量，而且也因為在引進虛數以後，它們恰好可以通過這些對數與指數量來得到。（頁 330）**

---

[3] 參考李文林主編，《數學珍寶》，頁 **330-333**。

接著，他取圓半徑為 1，如此，π 就是半圓周長，或是 180 度弧的弧長。此時，令 z 為圓上的任意一段弧，以 $\sin z$、$\cos z$ 分別代表 z 弧的正弦及餘弦。由於 π 是 180^{o} 弧，所以，我們得到 $\sin 0 = 0$，$\cos 0 = 1$，以及 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$，$\cos\frac{\pi}{2} = 0$。

接著，基於 $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$，利用因式分解，得

$$\left(\cos z + \sqrt{-1}\ \sin z\right)\left(\cos z - \sqrt{-1}\ \sin z\right) = 1$$

針對這個等式，歐拉備註說：「**其因式雖然是虛量，但在正弦與餘弦的組合與相乘中確有很大用處。**」例如，他發現：

$$\begin{aligned}
&(\cos z + \sqrt{-1}\ \sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\ \sin y) \\
&= (\cos y\ \cos z - \sin y\ \sin z + \sqrt{-1}(\cos y\ \sin z + \sin y\ \cos z) \\
&= \cos(y+z) + \sqrt{-1}\ \sin(y+z)
\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}
&(\cos y + \sqrt{-1}\ \sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\ \sin z) \\
&= \cos(y+z) - \sqrt{-1}\ \sin(y+z)
\end{aligned}$$

而且，

$$\begin{aligned}
&(\cos x \pm \sqrt{-1}\ \sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\ \sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z) \\
&= \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\ \sin(x+y+z)
\end{aligned}$$

於是，

$$\begin{aligned}
(\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z)^2 &= \cos 2z \pm \sqrt{-1}\ \sin 2z \\
(\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z)^3 &= \cos 3z \pm \sqrt{-1}\ \sin 3z
\end{aligned}$$

以及一般地，

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\ \sin nz$$

上引這些推導過程都是歐拉的原作，我們在此所以鉅細靡遺地引述，是希望讀者有機會體認他的思維之「現代性」（modernity），也就是說，他的論證與現代的數學教師之教學進路，並沒有太大的差異。

由上述最後一個等式，歐拉推得

$$\cos\ nz = \frac{(\cos\ z+\sqrt{-1}\ \sin z)^n+(\cos\ z-\sqrt{-1}\ \sin\ z)^n}{2}$$

$$\sin\ nz = \frac{(\cos\ z+\sqrt{-1}\ \sin z)^n-(\cos\ z-\sqrt{-1}\ \sin\ z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

如將這些二項式「展開」，可得

$$\cos\ nz = (\cos\ z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos\ z)^{n-2}(\sin\ z)^2\ + etc.$$

$$\sin\ nz = \frac{n}{1}(\cos\ z)^{n-1}\sin\ z - \ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos\ z)^{n-3}(\sin\ z)^3\ + etc.$$

現在，我們終於來到歐拉最精彩的論證了。這個進路洋溢著十八世紀數學的「形式」推論風格，而歐拉則是最忠實的實踐者及最佳的見證者。

歐拉「**設弧 *z* 為無限小，那麼我們就得到 *sin z* = *z* 和 *cos z* = 1。現在設 *n* 為一無限大數，而弧 *nz* 卻具有限的大小。**」再「**令 *nz* = *v*，則因 *sn z* = *z*= *v*/*n*，我們將有**

$$\cos\ v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots etc.$$

$$\sin\ v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots etc.$$

最後，在上述 *cos nz*、*sin nz* 的等式中，正如前述，歐拉「**設弧 *z* 為無限小，同時設 *n* 為一無限大數 *i*，**[4]**使得 *iz* 取有限值 *v*，於是我們有 *iz* = *v* 和 *z* = *v*/*i*。將這些值代入後，我們得到**

$$\cos\ v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i+(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$$

$$\sin\ v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i-(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$ 」

已知 $(1+\frac{z}{i})^i = e^z$，其中 *e* 表示「雙曲對數的底」，因此，如將 *z* 取作 *iv*，也取作 -*iv*，就會推得

---

[4] 此處 *i* 是拉丁文 *infinitus* 的第一個字母，歐拉於 1777 年才設 $i = \sqrt{-1}$。

$\boldsymbol{cos\ v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}}$ $\boldsymbol{sin\ v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}$

歐拉最後的結論是：

從這些公式，我們可以看到怎樣能把虛指數量化為實弧的正弦和餘弦。事實上，我們有

$$\boldsymbol{e^{v\sqrt{-1}} = cos\ v + \sqrt{-1}\ sin\ v}$$
$$\boldsymbol{e^{-v\sqrt{-1}} = cos\ v - \sqrt{-1}\ sin\ v}$$

六、結語及建議

就筆者孤陋所知，許多作家從事數學普及書寫時，大概都設法將幾個「很夯的」主題納入，最受寵的莫過於生活周遭常見的費氏數列、（相關的）黃金比、容易操作「理解」的七橋問題，以及莫比烏斯紐帶（**Mobius strip**）等等，至於歐拉算式或公式，似乎是在公元 **1990** 年之後，才逐漸地受到科普作家的青睞。究其原因，或許它們都涉及微積分，科普作家自認解說功力有所不逮吧。事實上，從 **1970** 年代之後，[5]數學史家已經逐漸注意到歐拉數學進路的特殊意義。或許這對於數學普及書寫而言，是個極重要的提醒。

以台灣科普出版為例，毛爾的《毛起來說 $\boldsymbol{e}$》（**2000**）的問世應該是個里程碑。在該書中，作者運用一整章（第 **13** 章〈$\boldsymbol{e^{ix}}$：「最有名的公式」〉）的篇幅，對歐拉算式及公式，不僅進行了水平層次的跨界連結，同時，也縱深統整了歐拉的相關史料，讓這兩個式子站上數學普及舞台的核心，從而成為大眾閱讀的矚目焦點。換句話說，《毛起來說 $\boldsymbol{e}$》為這兩個公式找到了「邏輯位置」，也找到了「歷史位置」。至於本文論及的其他數學普及書籍，則是在各自主題敘事的情節中，為它們找到「適當位置」。

這個「定性」效果在小川洋子《博士熱愛的算式》及其同名電影版的推波助瀾之下，更是展現了新的風貌。現在，跟著小川溫暖的筆調，一般讀者總算敢於親炙「外表冰冷」的歐拉算式。這是小說家從容分享的數學美學經驗，而其最佳媒介正是歐拉算式。

因此，如果你想在一般的數學通識課程中，說明數學美學的經驗，那麼，小川洋子的《博士熱愛的算式》及其同名電影的觀看（或賞析），就是我們大力推薦的必要選項。此外，吾人也可順勢推薦霍夫曼的《數字愛人》（保羅・艾迪胥的傳記），再另行補充歐拉如何導出「歐拉公式」的簡易版本（參酌本文第五節）。當然，如果歐拉算式或公式始終是主題，那麼，《數學女孩》及《蘇菲的日記》，應該可以滿足學生的「小說敘事」好奇心才是。

至就高中數學多元選修或特色課程來說，如果教師打算與學生分享數學的美學經驗，那麼，除了上一段的建議之外，你還可以推薦學生閱讀永野裕之的《喚醒你與生俱

[5] 這個年代也是數學史成為一個專業學門的開端。

來的數學力》及大栗博司的《用數學的語言看世界》，並輔以德福林的《數學的語言》這部比較「大器」的著作。至於切入點當然是歐拉算式及公式（也就是，一開始的討論就是這兩個式子），一方面，鼓勵學生欣賞永野裕之所分享的多元學習經驗（含音樂），體會數學穿透事物本質才能展現的「單純一致性」；另一方面，則是讓「數學語言」發揮模式思考的最大美學效果。如此一來，學生對於數學知識活動的多元面向，或許可以獲得更深一層的體會了。

參考文獻

小川洋子 **(2004/2009).**《博士熱愛的算式》，台北：麥田出版社。

大栗博司 **(2017).**《用數學的語言看世界》，台北：臉譜出版社。

大衛・艾契森 **(2013).**，《掉進牛奶裡的 ***e*** 和玉米罐頭上的 ***π***》，台北：臉譜出版社。

毛爾 **(2000).**《毛起來說 ***e***》，台北：天下文化出版公司。

永野裕之 **(2014).**《喚醒你與生俱來的數學力》，台北：臉譜出版社。

朵拉・穆西亞拉克 **(2014).**《蘇菲的日記》，台北：三民書局。

李文林主編 **(2000).**《數學珍寶：歷史文獻精選》，台北：九章出版公司。

洪宜亭 **(2008).**〈評論《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》〉，台灣數學博物館。

洪萬生 **(2010).**〈如果數學也可以像詩篇〉，載傑瑞・金，《社會組也學得好的數學十堂課》，也收入台灣數學博物館。

洪萬生 **(2013).**〈數學列車 **1089** 號啟程〉，載大衛・艾契森，《掉進牛奶裡的 ***e*** 和玉米罐頭上的 ***π***》，台北：臉譜出版社。

洪萬生 **(2017).**〈《博士熱愛的算式》：數字愛人的故事〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》，新北市：遠足文化出版社。

洪萬生 **(2017).**〈《數學女孩》的數學學習與結構美學〉，載洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》，新北市：遠足文化出版社。

林倉億 **(2013).**〈**1665** 年，牛頓和 ***e*** 相遇了嗎？〉，《**HPM** 通訊》**16(4): 1-10**。

保羅・霍夫曼 **(2001).**《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》，台北：台灣商務印書館。

亞瑟・班傑明 **(2017).**《數學大觀念》，台北：貓頭鷹出版社。

威廉・鄧漢 **(2009).**《數學教室 **A to Z**》，台北：商周出版社。

傑瑞・金 **(2010).**《社會組也學得好的數學十堂課》，台北：商周出版社。

結城浩 **(2008).**《數學少女》，高雄：青文出版社。

結城浩 **(2011).**《數學女孩：費馬最後定理》，新北市：世茂出版社。

黃俊瑋 **(2009).**〈《數學教室**A to Z**》：數學證明難題 **&** 大師背後的故事〉，台灣數學博物館。

齊斯・德福林 **(2011).**《數學的語言》，台北：商周出版社。

蘇惠玉 **(2018).**〈歐拉與最美的數學公式〉，載蘇惠玉，《追本數源：你不知道的數學秘密》，台北：三民書局。

疫情記者會上的數學

林倉億
台南一中

一、 前言

根據衛生福利部疾病管制署 **2020** 年 **8** 月 **14** 日上午更新的資料，**COVID-19** 在全球 **187** 個國家／地區肆虐，全球確定病例數已達 **20,879,858**，死亡人數更高達 **755,719** 人，對人類生活的各個層面，都造成了無比巨大的影響。更慘的是，在筆者撰寫此文的當下，全球疫情仍未見緩和之勢，雖有少數國家把疫情控制得很好，但多數國家／地區之確定病例數仍不斷攀升，甚至控制下來後又爆發第二波的疫情。

若將 **COVID-19** 的防疫成果納入維持居民正常生活與適度經濟活動的考量，相信許多人都會和筆者的看法一致：「若台灣謙稱第二，那全球沒人可稱第一。」台灣防疫的成功，是集體合作的成果，除了醫護人員的犧牲奉獻、全體居民的共同配合（勤洗手、戴口罩、保持社交距離），疫情記者會上傳遞的訊息，也成為防疫的一大助力。疫情記者會上除了傳遞重要的防疫、衛教資訊外，偶爾也會有令人莞爾的效果，例如龜苓膏、荷蘭焦糖煎餅被搶購一空，更特別的是，數學在其中幾場疫情記者會中，竟然成了主角之一，這為防疫期間的高中數學教學，提供了生活化的教學素材。

中央流行疫情指揮中心的防疫記者會已開了上百場，筆者沒有場場「追劇」，目前僅知道 **4** 月 **28** 日與 **7** 月 **1** 日這兩天的記者會中，衛福部陳時中部長利用數學來解釋當時社會上對防疫的一些爭議。另外，台大公共衛生學院自 **2** 月 **10** 日開始週週舉行記者會說明疫情，其中 **7** 月 **6** 日的疫情說明會上，陳秀熙教授提出了入境防疫的另外方案，並利用數學推估不同方案中可能遺漏的感染者數目。這三場記者會與數學相關的內容，非常適合在高中數學課堂上播放（國中生要先有一些機率概念），讓學生們親眼見證，課堂上所學的統計與機率，如何在防疫的決策中發揮關鍵的作用。筆者在附錄一列出這三場記者會的影片連結，並註明筆者個人認為適合給高中生觀看的片段主題及影片起始時間，方便有興趣的老師直接播放與數學有關的內容。

二、 三場記者會

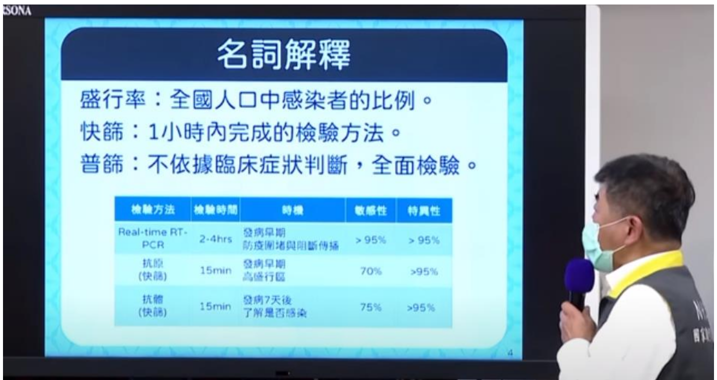
第一場：2020 年 4 月 28 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會

疫情爆發以來，台灣民眾都十分關心每日新增確診病例數，如果新增確診病例數為 **0**，大家就有鬆一口氣的感覺，社會上緊繃的氣氛也得到舒緩。因此，當時最受歡迎的流行語非「**+0**」莫屬了，各式諧音的「嘉玲」、「佳鈴」都受到大家的歡迎。不喜歡「**+0**」的，大概就是考生了，每一題得分都「**+0**」，那考試就要抱鴨蛋了。

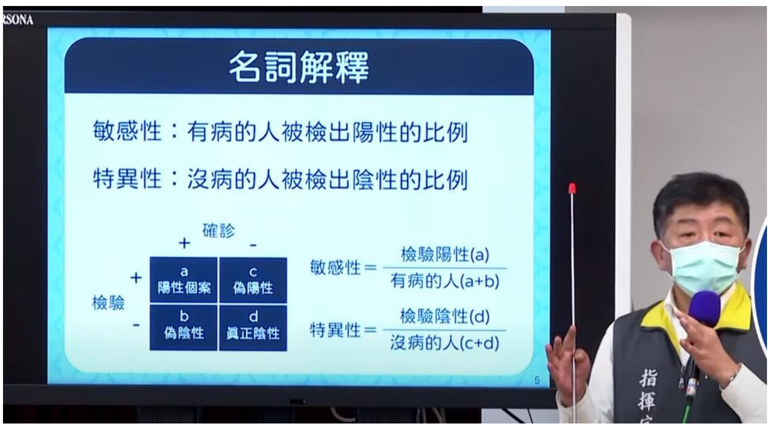
猶記得 **4** 月份大家歡慶連續好幾日的「**+0**」後，突然傳出敦睦艦隊官士兵得到了

COVID-19，18 日 3 名確診，19 日再傳新增 21 名確診。由於這些確診官士兵在離艦休假後，足跡遍及台灣 9 縣市，造成社會一片恐慌，因此，當時許多人倡議台灣應該實施普篩，而非有症狀、有接觸或有相關地區的旅遊史才檢驗。這議題，從防疫專業，逐漸變成了政治（口水）議題，無論是否具有公衛或醫療背景，許多政治人物或電視名嘴，開始發表個人意見，並評論／批評、支持／反對中央流行疫情指揮中心的防疫措施，著實造成了社會上一股動盪不安的氛圍。到了 4 月 28 日中央流行疫情指揮中心的防疫記者會上，衛福部陳時中部長就這個爭議，透過數學分析，向全國民眾說明為何台灣不適合普篩。筆者當時還戲稱這場記者會是「Clock 部長的數學課」。

陳部長在記者會上先將相關名詞說明清楚：「**盛行率：全國人口中感染者的比例**」、「**快篩：1 小時內完成的檢驗方法**」、「**普篩：不依據臨床症狀判斷，全面檢驗**」，並比較 PCR、抗原（快篩）、抗體（快篩）三種不同檢驗方法的檢驗時間、時機、敏感性與特異性（參見圖一，圖一至圖八均為當日記者會影片截圖）。由於檢驗方法有「**敏感性：有病的人被檢驗出陽性的比例**」與「**特異性：沒病的人被檢驗出陰性的比例**」（參見圖二），所以就會有偽陽（沒病但被檢出陽性）與偽陰（有病但被檢出陰性）的情形。筆者首先被敏感性與特異性這兩個名詞吸引，在高中數學教材中或升學考試試題裡，都有關於檢測造成的偽陽、偽陰個數或機率的計算（參見附錄二），但並未特別區分這兩者的不同，甚至在高中課本中或指考試題裡，還常將偽陽、偽陰的比例當作相同。經過這次疫情，往後無論在教材還是試題中，敏感性與特異性這兩個專有名詞應該可以堂而皇之出現，只要把兩者的意義說明清楚，學生或考生在解題時就能更貼近真實情境。



圖一



圖二

記者會上解釋完名詞後，部長就進入「數學課」的主題：「普篩迷思解析—以快篩為例」(參見圖三)。直到 **4** 月 **28** 日記者會前一天，台灣總共檢驗了 **31,156** 名，其中有 **55** 名確診個案，因此，依盛行率的定義計算，台灣的盛行率為 $\frac{55}{31,156} \doteq \frac{18}{10,000}$ 。然而，台灣是根據臨床症狀決定是否檢驗，被採檢的人，都是有可能感染到 **COVID-19** 的，因此，台灣實際的盛行率應該是遠低於 $\frac{18}{10,000}$ 的（也就是如果是隨機採檢而非只針對有症狀或接觸史、旅遊史的人做採檢的話，那盛行率會遠小於 $\frac{18}{10,000}$ ）。部長在台灣的盛行率會遠小於 $\frac{18}{10,000}$ 這件事上費了不少唇舌，其實用高中數學的說法， $\frac{18}{10,000}$ 是條件機率（分母不是樣本空間總數），而非一般的機率，所以 $\frac{18}{10,000}$ 會高於台灣的實際的盛行率。

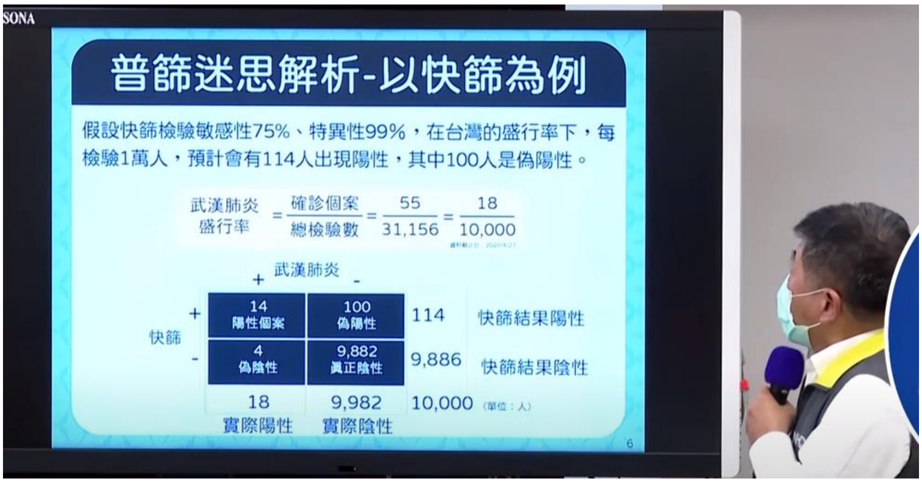
定義完盛行率後，接下來就是快篩的敏感性與特異性設定。如圖三中的數據：敏感性 **75%**、特異性 **99%**、盛行率 $\frac{18}{10,000}$ ，這些條件設定好後，接下來就完完全全是數學的事了，無關乎是否「順時中」。在這樣的數據設定下，每 **1** 萬人進行快篩，檢驗結果會有 **114** 個呈現陽性，其中 **14** 個是陽性個案，而另外 **100** 個是偽陽性；檢驗結果呈現陰性的會有 **9,886** 個，其中 **9,882** 個是真正陰性，而 **4** 個是偽陰性。記者會上部長說完這些數據後，就跳下一張投影片，真的是太可惜了！部長這張投影片下方快篩結果與是否得到武漢肺炎的人數表格（參見圖三），正是 **108** 課綱新引入的「列聯表」：

	患有武漢肺炎	未患武漢肺炎	合計
快篩陽性	**14**	**100**	**114**
快篩陰性	**4**	**9882**	**9886**
合計	**18**	**9982**	**10000**

各種情況的人數透過「列聯表」不僅一目了然，更方便我們直接利用表格的數據，輕鬆地按按計算機得到在檢驗結果呈現陽性的情況下（**114** 人），真正是陽性個案（**14** 人）的機率為 $\frac{14}{114} \doteq 12.28\%$ ，換句話說，有將近 **9** 成的檢驗陽性個案是偽陽性！檢驗結果呈現陽性的人只有 12.28% 的機率是真正的陽性，這其實就是高中教材中的「貝氏定理」；然而，理解 12.28% 的意義，並不需要真正在高中課堂上學過「貝氏定理」，只需要將資料整理成「列聯表」，然後解讀它就可以了！反過來說，在高中課堂上引入「列聯表」，相信學生們不僅可以更容易掌握到「貝氏定理」或「條件機率」的真正意涵，也可以更輕易地列出所需要的算式。

由以上的數學推論可知，當盛行率低時，全面普篩不僅在數學上沒有說服力，真的

執行後，恐將給社會帶來很大的負面影響！在當時的社會氛圍中（獵巫？），一旦檢驗呈陽性，當事人的生活會受到多大的衝擊呢？可能遭受到多少不友善的對待呢？又會導致多少親密接觸者受到牽累呢？不妨回想一下磐石軍艦的官兵生及家人在當時所受到的（歧視）待遇！



圖三

如果改變設定條件與檢驗方式（參見圖四至圖七），快篩檢驗的偽陽性比率依然是居高不下；若採 **PCR** 檢驗，在合理推估的情況下，不僅偽陽性的比率是高的，付出的檢驗費用成本更是高昂（每人檢驗費用為 **3000** 元）。若是全民普篩，光是每人只檢驗一次，國庫就要支出數十億到數百億新台幣（參見圖八），然後為了確認是真正的陽性還是偽陽性，後續的成本就又更可觀了！至於許多人擔心的「無症狀感染者」在社區「趴趴走」，無論是哪種檢驗方式，都存在偽陰性的檢驗結果；也就是說，單靠檢驗，是無法將「無症狀感染者」一網打盡的。無怪乎，中央流行疫情指揮中心要不斷地提醒民眾做好自主健康管理。

圖四


以呼吸道症狀就醫人數為例(合理值)
+ 武漢肺炎 -
PCR
敏感性 95%
特異性 99.99%
71 陽性個案
480 偽陽性
551
4 偽陰性
4,799,445 真正陰性
4,799,449
75
4,799,925
4,800,000 (單位：人)
+ 武漢肺炎 -
快篩
敏感性 75%
特異性 99%
56 陽性個案
47,999 偽陽性
48,056
19 偽陰性
4,751,926 真正陰性
4,751,945
75
4,799,925
4,800,000 (單位：人)

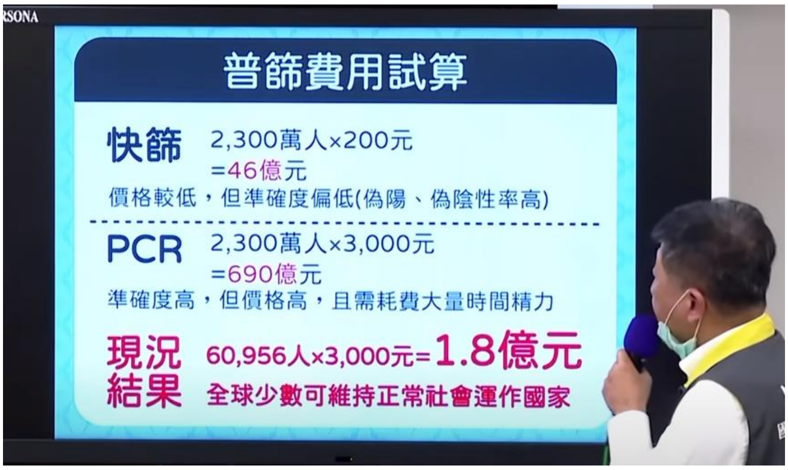
圖五


以我國無症狀人數為例(極大值)
+ 武漢肺炎 -
PCR
敏感性 95%
特異性 99.99%
30,780 陽性個案
1,797 偽陽性
32,577
1,620 偽陰性
17,965,803 真正陰性
17,967,423
32,400
17,967,600
18,000,000 (單位：人)
+ 武漢肺炎 -
快篩
敏感性 75%
特異性 99%
24,300 陽性個案
179,676 偽陽性
203,976
8,100 偽陰性
17,787,924 真正陰性
17,796,024
32,400
17,967,600
18,000,000 (單位：人)

圖六


以我國無症狀人數為例(合理值)
+ 武漢肺炎 -
PCR
敏感性 95%
特異性 99.99%
9 陽性個案
1,800 偽陽性
1,809
1 偽陰性
17,998,190 真正陰性
17,998,191
10
17,999,990
18,000,000 (單位：人)
+ 武漢肺炎 -
快篩
敏感性 75%
特異性 99%
8 陽性個案
180,000 偽陽性
180,008
2 偽陰性
17,819,990 真正陰性
17,819,992
10
17,999,990
18,000,000

圖七


普篩費用試算
快篩
2,300萬人×200元
=46億元
價格較低，但準確度偏低(偽陽、偽陰性率高)
PCR
2,300萬人×3,000元
=690億元
準確度高，但價格高，且需耗費大量時間精力
現況結果
60,956人×3,000元=1.8億元
全球少數可維持正常社會運作國家

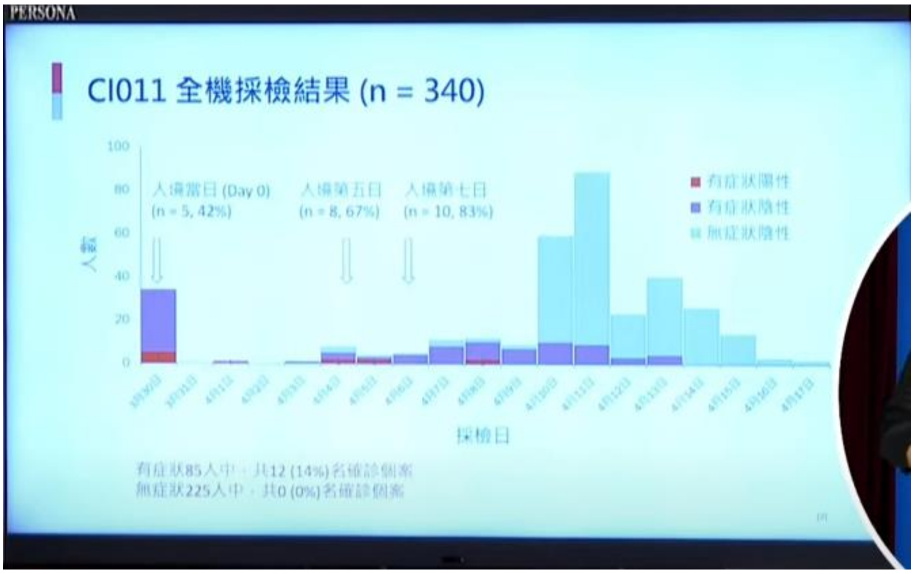
圖八

第二場：2020 年 7 月 1 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會

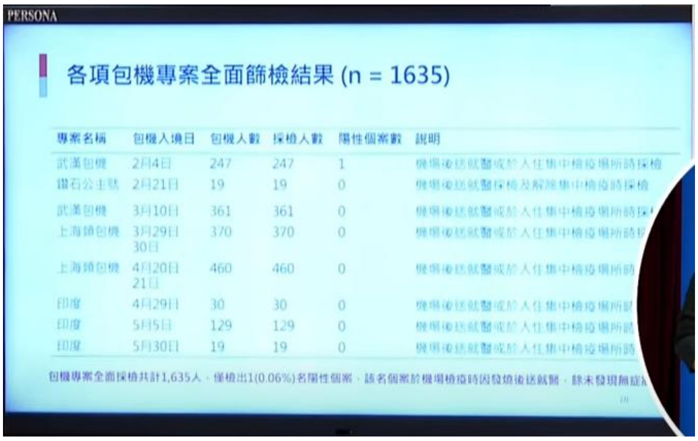
隨著台灣疫情的控制得宜，在許多日都無出現本土確診案例之後，政府宣布放寬諸多的防疫規定，推動「防疫新生活」，鼓勵民眾在做好自主健康管理及保持安全社交距離的情況下，恢復正常生活。因此，台灣也成為全球第一個恢復職業棒球比賽的國家，投手投出的第一顆球、打者擊出的第一支安打、第一支全壘打、第一次三振、第一次保送……，全都是全世界「第一」。雖然沒有本土確診個案，但陸陸續續增加的境外移入案例，中央流行疫情指揮中心的篩檢策略又再次受到挑戰。入境者是否要在機場全面篩檢，成了大家討論的焦點。**7** 月 **1** 日這場記者會的主題就是機場入境者的檢測與檢疫。

這次的記者會，依然由陳部長為大家「上課」。一開始說明根據目前對 **COVID-19** 的認識與研究，雖然感染者在潛伏期（常見 **5~6** 天，範圍 **1~14** 天）可能就有傳染力，但不見得能夠被檢測出來，大概要到發病前 **2** 天，感染者體內的病毒就能夠以 **PCR**（核酸檢驗）檢測出來，而這也代表此時病毒的傳染力已經比較強了，更容易傳染出去。因此，上述這些時間點就成為中央流行疫情指揮中心做疫調、採檢及規定檢疫天數的重要依據。

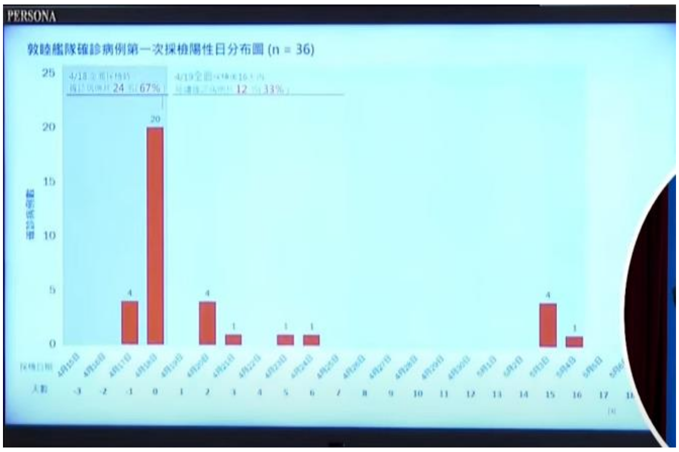
除了對 **COVID-19** 的研究認識之外，台灣有幾個境外移入的特別案例數據，可作為中央流行疫情指揮中心的專家們決策時的重要參考依據。陳部長接下來就分別以「**CI011** 全機採檢結果 **(n=340)**」、「各項包機專案全面篩檢結果 **(n=1635)**」、「敦睦艦隊確診病例第一次採檢陽性日分布圖 **(n=36)**」（參見圖九至圖十一，圖九至圖十四均為當日記者會影片截圖），用圖表說明一個簡單且重要的觀念，就是採檢時陰性並不代表未被感染，在不同日做檢驗，可能漏掉不同數量的感染者。例如，在華航 **CI011** 的案例中，全機共有 **12** 人確診，但若在第 **1**、**5**、**7** 天採檢，分別可驗出 **5** 人 **(42%)**、**8 (67%)**人、**10 (83%)**人，都會有「漏網之魚」未被驗出。



圖九

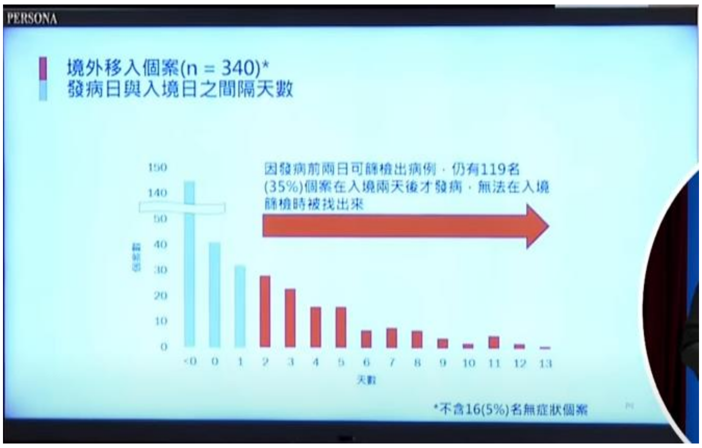


圖十

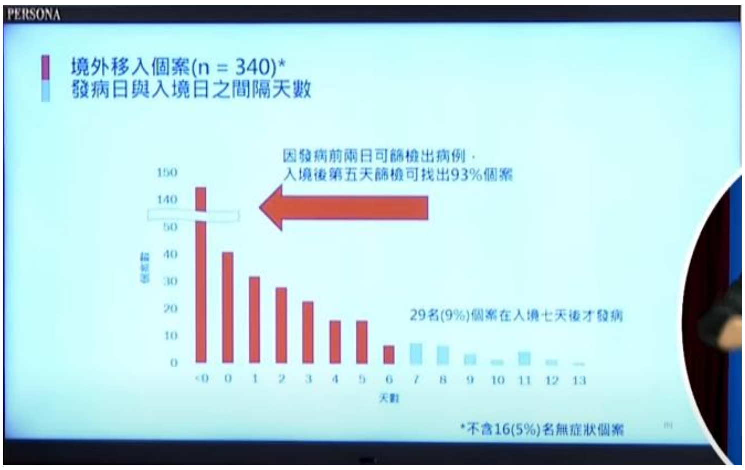


圖十一

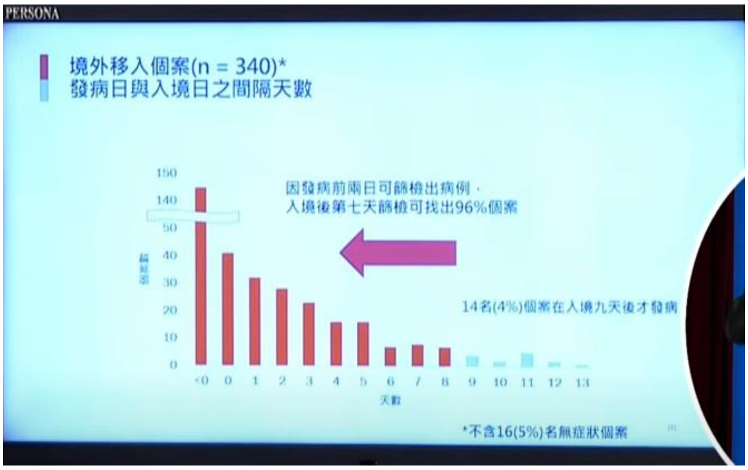
至於當時大家爭議的邊境檢疫政策，陳部長以「境外移入個案發病日與入境日之間隔天數 (n=340，不含 16 (5%)名無症狀個案)」（參見圖十二至圖十四）說明，在機場採檢，只能檢驗出 65%的感染者，若在入境後第 5、7 天採檢，分別能檢驗出 93%、96%的感染者，仍有 14 名感染者在入境第 9 天後才發病。陳部長利用上述數據為目前的入境後居家檢疫 14 天的政策作辯護，還舉冰島為例說明只有入境時篩檢而無居家檢疫，沒辦法確保社區的安全。那有沒有什麼方法把所有的感染者都找出來呢？陳部長很明白地表示，除非每 14 天就作一次採檢，不然是沒有辦法找出所有的感染者的，然而，這樣會付出很高的社會成本。



圖十二



圖十三



圖十四

這一日的記者會資料，都是數據的整理分析，不像 **4** 月 **28** 日的記者會資料可以親手算算看，若讓學生們觀看這段記者會影片，想必不少學生會覺得枯燥。筆者建議，不妨只挑選「境外移入個案發病日與入境日之間隔天數 **(n=340**，不含 **16 (5%)**名無症狀個案**)**」這段說明讓學生觀看即可，若學生對其他境外案例有興趣，再播放另外的片段。

數據的整理與分析，正是高中數學課程的主題之一，透過 **7** 月 **1** 日的記者會影片，可以讓學生們看看中央流行疫情指揮中心是如何分析數據來作決策並捍衛政策。更重要的是，播放完影片後，問問看學生是否有不同的想法？對於邊境防疫是否可能有不同的做法或考量？不同的做法或考量能否提出相關的數據作為立論基礎？簡單來說，鼓勵學生利用數學和部長「打對台」、「仙拚仙」！不過，這僅僅是「紙上談兵」，實際上的防疫作為，仍然要遵守中央流行疫情指揮中心是的規定與建議。

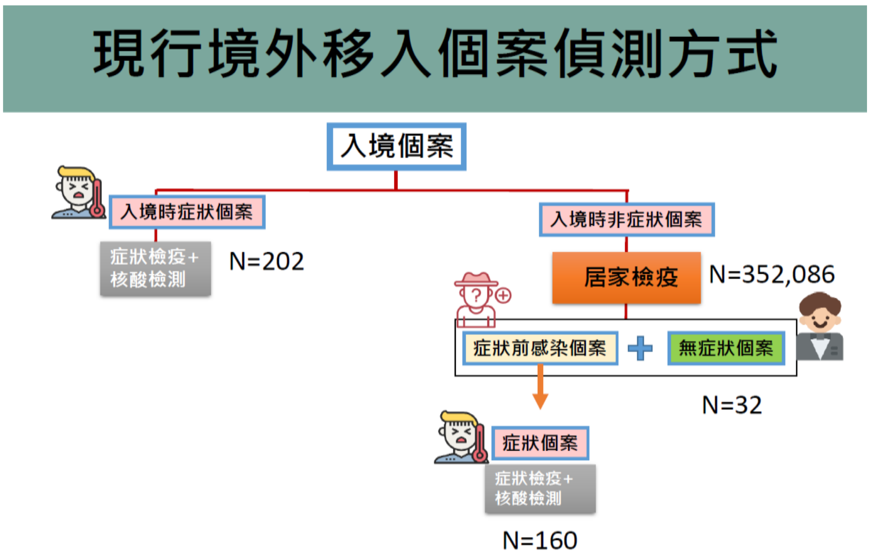
台灣在防疫上「順時中」取得了很好的成果，但若在課堂上看完記者會影片後，學生連大腦都「順時中」，失去批判或思考能力，那反而就糟糕了！在防疫作為上，大家共同遵從中央流行疫情指揮中心的指示，但在課堂討論上，老師應該鼓勵學生大膽地「逆時中」，根據公開的數字，善用所學的數學知識，試著從多元的面向提出不同的觀點與做法。台大公共衛生學院陳秀熙教授在 **7** 月 **6** 日的疫情說明會上，就提出了不同的入境防

疫措施構想。

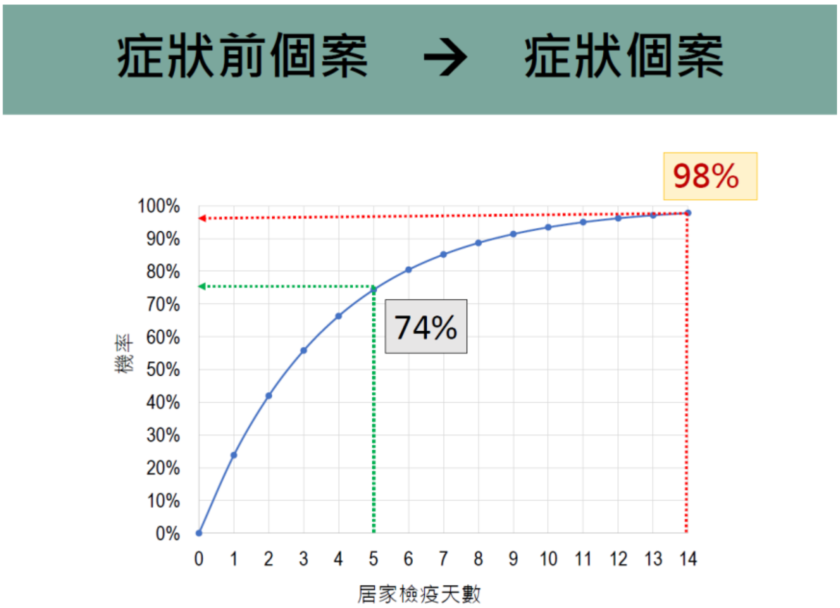
第三場：2020 年 7 月 6 日台大公共衛生學院群體健康研究中心抗 COVID-19 說明會

陳秀熙教授的說明有兩個主題，第一個是國際疫情的分析，從全球確診人數、國際基礎再生數 (R_0)的分布與趨勢、國際解封指數變化…等，分析並預測全球 COVID-19 疫情的發展。這一個主題的說明，清楚易懂，可以推薦給學生自己上網觀看。

第二個主題就是「台灣國際出入境防疫措施新思考」，陳教授利用台灣入境旅客人數與各項檢疫人數及確診人數，設計了不同的入境檢測方案，再藉由數學推算不同的方案可能遺漏的感染個案。陳教授以台灣今年 2 至 5 月的境外移入個案（含敦睦艦隊個案）作說明（參閱圖十五，圖十五至圖十八均取自陳秀熙教授當日說明會的簡報檔），其中有 **202** 名在入境時就有症狀而被檢測確診，有 **160** 名是在檢疫期間確診，而無症狀確診個案有 **32** 名。這期間居家檢疫的人數，高達 **30** 多萬人。陳教授特別提醒大家注意居家檢疫的這 **30** 多萬人，除了造成疫調相關人員的大量負擔外，也會產生無法工作的間接成本。另外，陳教授也利用居家檢疫症狀前發生率及出現症狀時間推估出，居家檢疫 **5** 天內，感染者有 **74%**的機率會成為症狀個案；而在居家檢疫 **14** 天內，感染者有 **98%**的機率會成為症狀個案（參閱圖十六）。

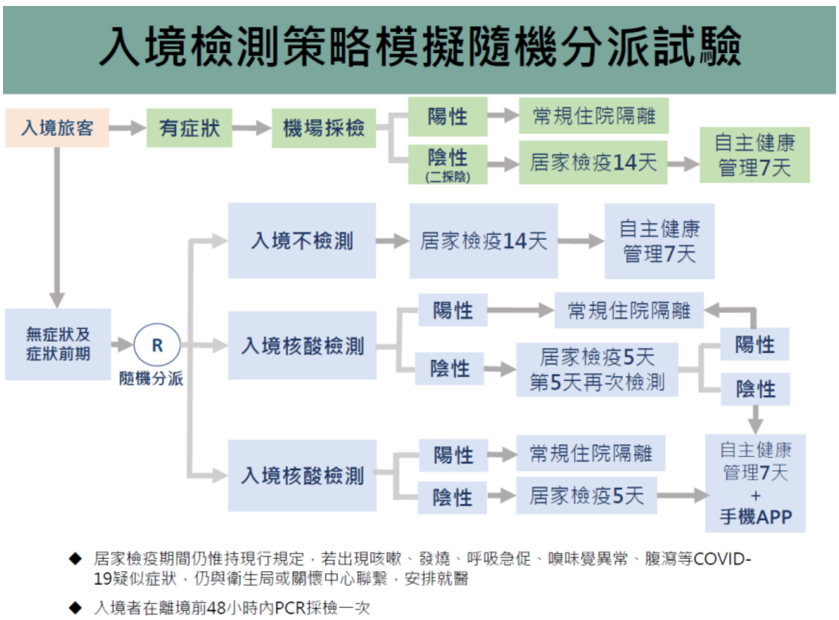


圖十五



圖十六

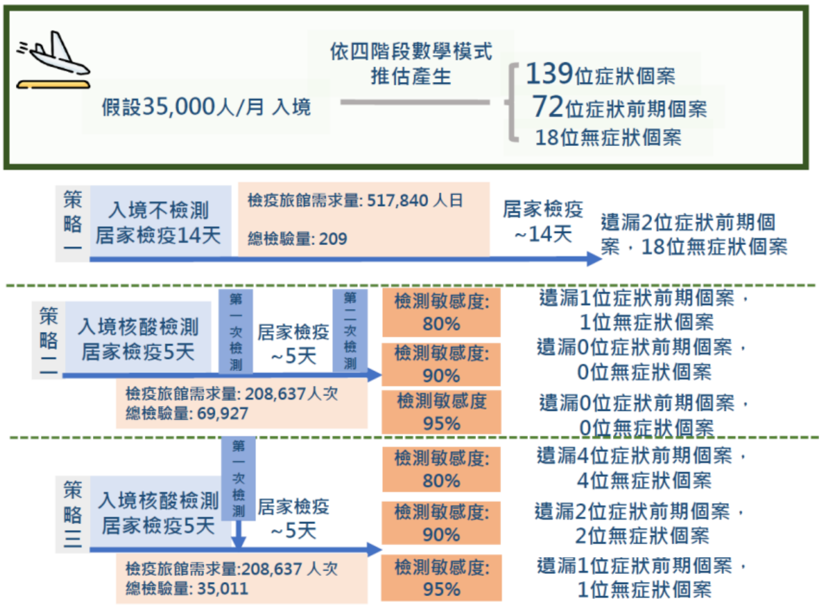
如同中央疫情指揮中心在 7 月 1 日記者會上所說的，即使居家檢疫 14 天，還是有可能遺漏感染者。台大公衛學院在考量國外的做法（如瑞士居家檢疫天數為 10 天）及相關社會成本之後，提出「入境檢測策略模擬隨機分派試驗」的構想（參閱圖十七），希望在縮短檢疫天數後，配合檢測，找出可能遺漏的感染者。圖十八是在假定台灣未來邊境開放之後，每月有 35,000 名入境旅客，而依台灣 2~5 月的數據推估，每月入境旅客中有 139 位症狀個案（在機場就被檢疫並檢測確診）、72 位症狀前個案（入境時沒有症狀的感染者）、18 位無症狀個案（沒檢測就不會被發現的感染者），然後依不同的檢疫、檢測策略，會有不同的檢疫旅館需求量以及總檢驗量。其中的 72 位症狀前個案以及 18 位無症狀個案，在不同的檢疫、檢測策略中可能被遺漏多少位，這就是陳教授當日說明會中最有趣、最「數學」的部分了！



圖十七

圖十八中針對症狀前個案與無症狀個案的策略一「入境不檢測居家檢疫 14 天」，就是台灣目前現行的做法，那麼除了 18 位無症狀感染者會進入社區外，還有 2 位症狀前個

案在居家檢疫 **14** 天後仍未出現症狀而進入社區之中，陳教授評估這 **2** 位進入社區後並不會造成社區的感染。策略二則是入境時先檢測一次，陽性者當然就送醫隔離治療，陰性者居家檢疫 **5** 天後再檢測一次，仍是陰性就解除居家檢疫但仍須維持自主健康管理。策略三與策略二不同之處在於居家檢疫 **5** 天後，沒有出現症狀者就解除居家檢疫。顯然，策略三的風險比策略二的風險高，但高出多少呢？陳教授用數字量化告訴我們可能的風險，列出策略二與策略三在不同的檢測敏感度（同前面說的「敏感性」，亦即有病的人被檢驗出陽性的比例）下，可能會遺漏掉的症狀前個案數與無症狀個案數，也就是可能帶著 **COVID-19** 進入我們社區的個案數。



圖十八

筆者身為高中數學老師，看到不同策略下可能的遺漏個案數後，「職業病」就發作了，高度好奇它們是怎麼被推算出來？能不能作為課堂上的教材？很可惜的是，陳教授並未在記者會上說明他的計算公式。但，換個角度想，陳教授沒講的，不就可以給我們（高中師生）來猜猜看！重點不在於猜得對不對，而是如何猜？如何依據陳教授記者會或投影片上的資訊來猜？即便是猜錯了，在運用數學猜測、推算過程中所產生的樂趣與挑戰，一定遠大於被動觀看記者會。以下是筆者「不負責任的」猜測！

先看策略三，在檢測敏感度 **80%**的條件下，會遺漏 **4** 個症狀前個案與無症狀個案。**4** 個症狀前個案是怎麼算出來的呢？圖十六中告訴我們，症狀前個案有 **74%**的機率會在居家檢疫 **5** 天內出現症狀，所以筆者猜測的數學式如下：

$$\underset{\text{症狀前個案的預估總數}}{72}\times\underbrace{(1-80\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}\times\underbrace{(1-74\%)}_{\text{居家檢疫5天後仍未出現症狀的機率}}=3.744\doteq 4$$

而 **18** 名無症狀個案在檢測敏感度 **80%**的條件下，會有$18\times(1-80\%)=3.6\doteq 4$個會被遺漏而進入社區。類似的算法套用在策略二中 **80%**、**90%**、**95%**這 **3** 種不同的檢測敏感度下，算出遺漏掉的症狀前個案數分別為：

$$\underbrace{72}_{\text{症狀前個案的預估總數}}\times\underbrace{(1-80\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}\times\underbrace{(1-74\%)}_{\text{居家檢疫5天後仍未出現症狀的機率}}\times\underbrace{(1-80\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}=0.7488\doteq 1$$

$$\underbrace{72}_{\text{症狀前個案的預估總數}}\times\underbrace{(1-90\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}\times\underbrace{(1-74\%)}_{\text{居家檢疫5天後仍未出現症狀的機率}}\times\underbrace{(1-90\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}=0.1872\doteq 0$$

$$\underbrace{72}_{\text{症狀前個案的預估總數}}\times\underbrace{(1-95\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}\times\underbrace{(1-74\%)}_{\text{居家檢疫5天後仍未出現症狀的機率}}\times\underbrace{(1-95\%)}_{\text{檢測為陰性的機率}}=0.0468\doteq 0$$

三、 後記

台灣對抗 **COVID-19** 的戰役尚未結束，還有許多的疫情記者會將陸續召開。相信每個人都希望疫情結束不再關心疫情記者會的日子趕快到來，然而，在那一天到來之前，我們除了配合防疫之外，也可以「苦中作樂」，從疫情記者會或相關資料中，找點數學樂子來消磨。

本文所介紹的第一場記者會，非常適合結合高中數學機率課程，筆者就曾經給任教的高一、高二學生看該場記者會的資料或影片，都得到很不錯的迴響。至於本文所選的第二場與第三場記者會，除了數學考量之外，還希望透過入境檢測的爭議，讓學生們聽聽多元的聲音與思考可能的不同方案。台大公衛學院陳秀熙教授將檢疫天數造成的社會成本納入考量之後，提出了三種不同的策略並做相關的推估。**7** 月 **6** 日記者會上陳教授對三種不同策略的分析其實還比較初步，之後他仍持續作修正，對來自不同風險程度國家的入境旅客，分別作出分析與預估，有興趣的讀者可以觀看 **8** 月 **12** 日台大公衛學院的疫情說明會影片，也不妨推薦給學生觀看，或許能激發出更多應用數學後的討論與多元見解。我們不是決策者，更可以大膽地討論各種可能性。現值暑假期間，筆者不方便利用課堂和學生分享這些記者會影片與資料，開學後再找任教班學生來當白老鼠試試。

參考資料

2020 年 4 月 28 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會，影片網址：
https://www.youtube.com/watch?v=905wyEmNcd0。

2020 年 7 月 1 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會，影片網址：
https://www.youtube.com/watch?v=MDGjhbcOB3g。

2020 年 7 月 6 日台大公共衛生學院群體健康研究中心抗 COVID-19 說明會，影片網址：
https://www.youtube.com/watch?v=WEKkBWpQsYA&feature=youtu.be，**陳秀熙教授說明投影片檔案網址：**http://coph.ntu.edu.tw/uploads/root/hsuhsi_22_ppt.pdf。

附錄一：

第一場：2020 年 4 月 28 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會（影片網址：

https://www.youtube.com/watch?v=905wyEmNcd0）

影片起始時間	主　　要　　內　　容
13:17	名詞解釋：盛行率、快篩、普篩
16:10	名詞解釋：敏感性、特異性
17:15	普篩迷思解析—以快篩為例
18:48	以呼吸道症狀就醫人數為例（極大值）
21:11	以呼吸道症狀就醫人數為例（合理值）
22:06	以我國無症狀人數為例（極大值）
22:33	以我國無症狀人數為例（合理值）

第二場：2020 年 7 月 1 日中央流行疫情指揮中心防疫記者會（影片網址：

https://www.youtube.com/watch?v=MDGjhbcOB3g）

影片起始時間	主　　要　　內　　容
5:57	**COVID-19** 傳播特性
16:10	**CI011** 全機採檢結果 **(n=340)**
11:33	各項包機專案全面篩檢結果 **(n=1635)**
12:03	敦睦艦隊確診病例第一次採檢陽性日分布圖 **(n=36)**
13:27	境外移入個案發病日與入境日之間隔天數 **(n=340，**不含 **16 (5%)**名無症狀個案**)**
18:00	冰島每日 **COVID-19** 確定病例數

第三場：2020 年 7 月 6 日台大公共衛生學院群體健康研究中心抗 COVID-19 說明會（影片網址：

https://www.youtube.com/watch?v=WEKkBWpQsYA&feature=youtu.be）（陳秀熙教授說明投影片網址：http://coph.ntu.edu.tw/uploads/root/hsuhsi_22_ppt.pdf）

影片起始時間	主　　要　　內　　容
33:29	陳秀熙教授說明開始
33:49	**COVID-19** 國際疫情分析及解封
36:42	全球 R_0 趨勢圖
49:49	台灣國際出入境防疫措施新思考

57:30	境外移入居家檢疫後個案型態說明
58:53	台灣入境旅客與境外及敦睦：症狀、症狀前期及無症狀個案分類
1:01:09	現行境外移入個案偵測方式
1:03:40	症狀前個案成為症狀個案之「居家檢疫天數—機率」曲線圖
1:05:40	入境檢測策略模擬隨機分派試驗說明
1:05:40	不同入境檢測策略可能遺漏的個案數

附錄二：

翰林版 **99** 課綱第二冊課本頁 **166~167** 例題：

已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，其「偽陰率」為 20%（即帶原者做檢驗有 20%的機會呈陰性反應），而「偽陽率」亦為 20%（即未帶原者做檢驗有 20%的機會呈陽性反應）。現推估有 2%的民眾為此病毒帶原者。若小芬以此試劑檢驗結果呈陽性反應，試求她確實帶原的機率為何？

98 學年指考數學乙試題：

某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受此血液偵測實驗，實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有 665 人，其中真正未患老年癡呆症有 660 人。試問此血液偵測技術的誤判率為________。(化成最簡分數)」

107 學年專科警員班第 **37** 期正期組甲組數學試題：

經多年臨床的統計數據知，某項傳染病的快篩檢查之可靠性如下：「患有此病的人能被正確檢驗出的機率為 0.9；不患此病卻被誤檢為病人的機率為 0.05。」現在對某地區的居民進行此項檢查，並對檢驗報告為陽性（患病）的人進行後續的追蹤治療，結果發現其中只有 $\frac{54}{71}$ 的人是真的患有此病！由此可推估，該地區被此傳染病感染的人占全體居民的比重為？ (A) 0.05 (B) 0.1 (C) 0.15 (D) 0.2。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！