

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
 英家銘（台北教育大學）  
 創刊日：1998年10月5日  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>  
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

## 第二十三卷第一期目錄 2020年3月

- ▣ 說算談天話論證：說算者的故事怎麼說？～(一)……………洪萬生
- ▣ 《數學奇蹟—魔術》自序  
……………林壽福、吳皓如
- ▣ 壽福速寫……………廖惠儀
- ▣ 昆蟲學家法布爾的數學奇遇記  
……………林倉億

## 說算談天話論證：說算者的故事怎麼說？～(一)

洪萬生

臺灣數學史教育學會理事長/台灣師範大學數學系退休教授

- 一、楔子
- 二、以吏為師的歷史環境
- 三、「說」與「談」的漢字語源
- 四、趙爽與談天者
- 五、說算者的直觀論證
- 六、「類以合類」或「事類相推」
- 七、數學論證與推論用語
- 八、說算/談天的故事怎麼說？
- 九、結語

### 一、楔子

這是一個有關古代中算論證的故事。其中角色有劉徽、趙爽、說算者、談天者、長吏以及「用算佐」。至於情節，則是在敘說秦漢「以吏為師」的歷史背景中，前述角色如何互動的過程。不過，為什麼這個故事值得敘說？還是要先簡單交代一下。

在中國古代數學史上，除了魏晉劉徽注《九章算術》所表現的算學論證之外，還有沒有其他數學家也重視證明或論證？自1980年代以來，我從業餘自修數學史到成為專業數學史家，始終為此一問題深感著迷，因為中國古代數學發展一向被認為是以實用為基調。當時，我撰寫中國魏晉南北朝科技史的「習作」時，即題為「重視證明的時代－魏晉南北朝的科技」。顯然，我企圖運用「重視證明」來刻畫那個時代的科技成就。

我所謂的「證明」，主要是在呼應漢代學者王充所說的「事莫明於有效，論莫定於有證」。至於像王充這樣思想或進路（他被認為頗有懷疑、批判精神），是否可以連結到劉

徽或其他天文/數學家的思維，則完全無從切入處理。因此，劉徽之前是否也有重視證明或論證的數學家？想當然耳，可能性頗高，因為任何一個人的創作再怎麼具有革命性，都不可能「憑空出世」。然而，關鍵的文本證據卻始終「未現」，所以，我始終無法好好地「安頓」類似的疑惑！

後來，在數學史家郭書春一連串的劉徽研究相繼發表之後，我才注意到劉徽注《九章算術》（成書年代下限為東漢初）時提及「說算者」的直觀論證，總算可以確認：劉徽證明的確有其歷史文化脈絡！事實上，說算者的「現身」更加襯托劉徽證明或論證「抽象化」的難能可貴。然而，我們也可立即追問：「說算者」一詞既然蘊含了「說者」，那麼，究竟是「誰在說」？說了些「什麼」？他們又是「說給誰聽」？這些問題顯然至關緊要，同時，說算者的身分或地位也有探索的必要。

另一方面，由於天文知識活動涉及算學，因此，「談天者」也值得我們考察。這個稱謂最早現身於劉徽同時代（公元第三世紀）趙爽的《周髀算經》注序。《周髀算經》經文本身，就包括陳子與榮方有關學習（天文數學）之對話。在以吏為師的歷史環境中，說不定其相關官僚養成的教育意義將更加顯豁。因此，我們首先要從這個話題談起。

## 二、以吏為師的歷史環境

現代的大學教育制度、研究機構，乃至於學會、期刊，都是專門知識（如數學等）傳播、保存以及創新發展的主要機制。不過，這種脈絡大都不存於兩千多年前的中國秦漢時期，即使《周禮》對周代國子（貴族子弟）的六藝（初等教育）有了簡要規範，<sup>1</sup>但所能發揮的傳承功能應該極為有限。這是官學的一部分，然而，對於官僚行政管理的知識與技能，則必須訴諸官學的另一個系統，那就是以吏為師，尤其是因應秦漢中央集權的郡縣制度。

根據史家呂思勉的考察，古人的知識技能，就是從宦中得來：

古人解釋宦字，有的說是學，有的說是仕，的確，這兩者就是一事。因為在古代，有些專門的知識技能，就是在辦理那件事的機關裡，且辦事且學習而得的。從其辦事的一方面說，就是仕，從其學習的一方面來說，就是學。

因此，他同意漢代劉向的看法，認為先秦諸子百家之學都出自官署。由於周代封建解體，於是，那些「宦」遂流落民間而將其學問流傳成為私學或家學。在漢簡《二年律令》— 西漢呂后攝政二年（公元前 186 年）頒佈的律令 — 中，其〈傳律〉就有規定：「疇官各從其父疇，有學師者學之」，可見有些吏員的「為吏之道」是來自世襲。

針對這個「家學」的歷史現象，司馬遷在他的《史記》中，也有著非常生動的描

---

<sup>1</sup> 「保氏掌諫王惡，而養國子之道，乃教以六藝：一曰五禮，二曰六藝，三曰五射，四曰五取，五曰六書，六曰九數。」劉徽〈九章算術序〉也指出：「算在六藝，古者實與賢能，教習國子。」

述：

幽厲之後，周室微，陪臣執政。史不記時，君不告朔。故疇人子弟分散，或在諸夏，或在夷狄。<sup>2</sup>

其中，「疇人」（或上一段引述的「疇官」）是指擁有天文曆算等專門之學的宦。由於封建解體，流落民間的宦需要謀生，孔門六藝就成了鮮明的「招生廣告」，因為這就如同史家錢穆所評論：

藝士不僅可以任友教，知書數可為家宰，知禮樂可為小相，習射御可為將士，亦士進身之途轍。

這一評論其實也呼應了司馬遷《史記》對孔子（公元前 551-479 年）早期生涯的刻畫：

孔子貧且賤。及長，嘗為季氏史，料量平；嘗為司職吏而蓄蕃息。

意即：「孔子家境貧窮，社會地位低下。到長大之後，曾給季氏做過管理倉庫的小吏，出納錢糧算得公平準確；也曾提任過管理牧場的小吏，牲畜蕃息。因此他又升任主管營建工程的司空。」<sup>3</sup>可見，孔子在周遊列國講學傳道之前，曾經擔任小吏，他的夫子自道「吾少也賤，故多能鄙事」，看起來相當寫實。

孔子究竟如何習得六藝，司馬遷〈孔子世家〉並未清楚交代。不過，到了戰國初期，商鞅為秦孝公變法，主張：人民的一切行為以法令為準則，他們的學習應以「習法」為主。他在《商君書》強調：「聖人必為法令，置官也，置吏也，為天下師」，應該是「以吏為師」的濫觴。到了戰國晚期，韓非子（法家要角）為秦王嬴政獻策，更加強化「以法為教、以吏為師」的主張，他還認為破壞法令權威（人民妄議律令）的一個大敵，就是「私學」。因此，他也強烈壓制私學，「禁其行、破其群、以散其黨」。總之，韓非子的法家觀點就成為秦統一之後的帝國治術之依據：嚴禁私學、以法為教、以吏為師。

秦始皇統一六國之後，不再沿襲夏商周三代的分封制，改行中央集權的郡縣制。由於郡縣長由中央派令，一切遵照朝廷律令處理政務。這些繁雜的行政管理工作，有賴基層的「文法吏」協助執行，因此，政府必須迅速培養這些基層吏員。然而，由於私學被禁且「以吏為師」，所以，有志於（或有機會）宦途者只能在「學室」學習，或是直接找官吏當學徒。

前者可以參照《睡虎地秦簡》的見證：「非史子也無敢學學室，犯令者有罪」（意思是說：不是史的弟子學徒，不能在「學室」中學習）。此處所謂史，正如前述孔子曾經擔

<sup>2</sup> 由於這段引文提及「或在夷狄」，到了明清就成了「西學源出中國」的最佳見證。

<sup>3</sup> 譯文參考 <https://kknews.cc/zh-tw/culture/9xa5gnl.html>。

任的季氏史，就是政府機關中從事文書工作的吏員。至於充當吏員的學徒小吏（「首書私卒」）案例，也可參考《睡虎地秦簡》中的〈秦律雜抄〉：「吏自佐、史以上負從馬，守書私卒，今市取錢焉，皆遷。」（譯文：自佐、史以上的官吏有運馱行李的馬和看守文書的私卒，如用以牟利，則要加以流放。）

在這些吏員中，有一種頭銜稱之為「用算佐」的小吏，別出「書佐」之外，可見「用算」專長的重要性。這份考古文獻出自江蘇尹灣六號墓。墓主師饒（公元 10 年）擔任攻曹史，是一位百石少吏，但地位尊崇，掌管《東海郡吏員簿》（類似今日公務機關的人事室職責），其中就記載了東海郡大（太）守下轄有吏員二十七人中，書佐九人，用算佐一人等。在秦漢時期，律令執行與用算之關連相當密切，譬如《漢書·東方朔傳》中有「待詔能用算者二人」之記載，目的當然在於「舉計其數而為簿籍」。可見當時由於律令規定及社會結構變複雜之後，計算與統計的專業性與必要性獲得重視，於是，「用算」專業人才應運而生。我們曾在《數之起源》一書中，以《筭數書》vs.《二年律令》為例，就此一主題提出說明。茲簡要引述其中〈傳食律〉vs.〈傳馬〉如下，以方便讀者參考。

《二年律令》的〈傳食律〉是驛站供給過往出差官員和馬匹食物及草料的相關規定。至於《筭數書》的〈傳馬〉題，則應該是針對馬匹草料的供應及其相關計算：

傳馬日三匹共芻粟二石，令芻三而粟二。今馬一匹前到，問予芻粟各幾何？

曰：予芻四斗、粟二斗泰半斗。

術〔術〕曰：直〔置〕芻三、粟二，并之，以三馬乘之為法，以二石乘所直〔置〕各自為實。

按本題先給定驛站馬匹餵食的規定：三匹馬一日餵食飼草（芻）及禾稈（粟）共二石，其中飼草與禾稈的比為三比二。現在，若只有一匹馬前來，那麼，驛站官員該餵食的飼草與禾稈的數量：「芻四斗、粟二斗泰半斗」，其中「泰半」等於三分之二。

上述這兩部竹簡《二年律令》及《筭數書》，都出自湖北張家山第 247 號墓。同墓出土的其他六部竹簡如下：《曆譜》（墓主大事記）、《奏讞書》（先秦以降司法案例彙編）、《脈書》（中醫把脈）、《蓋廬》（吳王與伍子胥對話有關陰陽家用兵之術）、《引書》（導引術及養生）及《遺策》（陪葬品清單，內含「算囊」一個，用以裝計算工具「算籌」）。墓主名字未詳，但根據考古學家/史家推測，他的身分應該是位階六到九級之間的長吏，他從「病免」（漢惠帝元年，公元前 194 年）到去世（呂后二年，公元前 186 年）之間，可能以訓練學徒為生，如此一來，《筭數書》應該是他的課徒講義，前述陪葬清單列有算囊一項，應該是他善算的見證之一吧。

因此，在以吏為師的歷史環境中，如果張家山 247 號墓的墓主運用《筭數書》為教材，來訓練未來的「用算佐」，這個推論或許不至於太過離譜。既然如此，公元第三世紀劉徽所說的「說算者」又是指哪些人呢？

### 三、「說」與「談」的語源

現在，我們參考（文字學的）語源資料，來考察「說算者」的可能意義。由於漢簡《筭數書》的題名使用了筭與數，因此，我們此處一併說明筭、算及數這三個文字的意思。

根據《形音義綜合大辭典》，筭與算都未見於甲骨文與金文。小篆「筭」是會意字，東漢許慎《說文解字》本義作說它「長六寸，計曆數者，從『竹』、從『弄』，言常弄乃不誤也。」顯然是指一種計算工具，以出土的文物來看，這種工具應該是竹子做的筭籌。至於「算」字從「竹」從「具」，也是一個會意字，「竹謂運筭以計者，具謂計數明確無錯誤，以筭明確計數為算。」可見「算」字是利用「筭」與「數」來下定義的。「算」的《說文解字》本義作「數也」解，乃計審以計其數之意。無怪乎清代考據學者段玉裁認為「筭為算之器，算為筭之用。」

總之，「算」就是計算的意思，殆無疑義。但是，「說算」的認知層次，應該是較「計算」來得高。「說」字不見於甲文及金文，在小篆中，它「从言兌聲」，本義作「釋」解。根據《形音義綜合大字典》：

〔說〕乃是善為剖析使通曉之意，故从言。又以兌本作「悅」解；釋而允當，言者畢其言論，聽者服於心，兩有悅意，故說从兌聲。

後來的「說」也代表「言論」、「書中義理」或「學說」之意，因此，「說算」或有解釋數理之本義。事實也是如此，本文第五節將以方亭體積公式之劉徽註解為例，說明「說算者」應該要比「用算佐」更能進行論述或解說。

接著，我們也來討論「談」這個字。根據《形音義綜合大字典》，甲文及金文都缺「談」字，小篆「談」字「从言，炎聲，本義作『語』解，乃互相語說之意，故从言。」又因為「炎」為「淡」之省文，所以，「談从炎聲」。由此引伸，無論是清談也好，晤談也好，都有互相談論之意。因此，相對於「說算」而言，「談天」多了「互相」語說的面向，即使在其互動中有某甲向某乙請益之動機。

(未完待續)

## 《數學奇蹟—魔術》自序

林壽福 吳如皓  
台北市興雅國中

連續兩年來，分別由教育部、國科會公佈的 2006 PISA、2007TIMSS 國際測驗評比，台灣 15 歲和八年級學生分獲捷報，都拿下數學能力世界第一。這是很令人振奮的好消息，忝為國中數學教師一員，同感光榮！不過，與此同時更讓人關心的是，在 2003 TIMSS 和 2007 TIMSS 測驗相關的調查研究均顯示，台灣學生呈現低自信、低興趣，以及對於是否喜歡數學的看法，有偏向負面的趨勢。換句話說，學生在情意面向上的表現，還有很大的改善空間！顯然成績好並不與「喜歡學數學」成正比。

台灣學生有這樣亮眼的成績，無非與近幾年來教改強調融入生活化、趣味化的題材，基測命題趨勢多著重於生活情境題的鋪陳，以及多數教科書重視選用生活情境來進行數學概念的引入，或是應用數學概念與方法來解決生活問題有關。加上我們擁有優良的傳統，除了數學教師們普遍認真教學之外，老師、家長均十分重視學生們的課業表現，並且會不斷給予學習的督促和成功的期待。

即便如此，中小學數學的教與學還存有許多亟待努力的空間。目前教科書多數仍以演繹知識的方式編排，學生學習的都是現成的知識結論，養成僅需記憶和運用，不必去探究和發現的習慣；這些現成的知識，對學生而言，是抽象且不容易理解的結論；這樣的呈現方式，也掩蓋了數學知識被發現、認識和發展的過程。不僅學生不容易知道知識的來龍去脈，只能機械式的模仿；而且凸顯局部的例題或習題編排，無法瞭解知識之間的內在邏輯結構，學習數學變成只是解題訓練。此外，有考試和進度的壓力，以及補習的速成文化助長，老師們大多使用「題海戰術」來加強學生的實戰操練，造成了多數學生對於數學學習的刻板印象——數學＝「考試」＋「解題」——，因此，如果學生沒有真心投入，他們會越來越覺得數學學習的『苦』與『煩』，提不起學習興致，甚且會對數學學習產生極端的厭惡感。

兩位作者過去一年來，藉由執行中小學科學教育專案計畫，研發與設計教學啟蒙例（或張本例）（generic example；Tall，1986），意外發現，許多魔術題材很能符應啟蒙例的屬性，而我們倆一整年合計也有超過百場的數學魔術表演，分享創意設計的點子於各校園，均廣獲好評！現場，我們發現無論是數學教師、資優班學生或者常態班學生，大家都對數學魔術展現高度的好奇和學習興趣，可謂是「年度最夯的數學演講！」這是激發我們結集出書的最大動力！

本書旨在透過魔術的新、奇、趣效果，引動學生學習數學的動機，它同時具備娛樂性和挑戰性，頗能滿足學生探索的慾望，拉近師生的距離，消除不少學生對於數學的恐懼感。對學生而言，魔術比一般傳統課堂的學習更具吸引力，而神奇玄妙的聲光刺激，可以帶給他們無比的興奮、想像與好奇，是激發學習動機很好的工具，真正感受到數學既有趣又好玩！這是因為它能將簡單的數學規律化作神秘的故事情節，讓人拍案叫絕！

具有引動好奇的魅力！例如魔術師耳朵可以聽牌，能不落痕跡閃電速算，也能預知觀眾的運算結果，並感應到任何一張紙牌的花色、點數；魔術師也能教你談情說愛、潤滑人際關係，以及如何巧妙地展現風趣與睿智，學會這些魔術，將為你跨出成功人生的第一步！

我們知道，部分魔術的結構比較複雜，所涉及的數學概念或 **patterns** 的掌握與理解，隱而未顯，對初學者有一定的難度，需要透過解說才容易明白；而本書的重點是在數學概念的學習，魔術扮演的僅是媒介工具的角色。因此，每個魔術活動設計，除了有【破解版寫真】和【原理解說】之外，幾乎每個活動都搭配有學習單的佈題設計，提供給數學教師們作為引導學生數學思考之用，採取由淺入深、逐步鋪陳的方式，並且多數含有的思維策略和學習方法，務使學生能藉著階梯「拾級而上」，獲得成功的體驗和成就的滿足，同時擁有面臨挑戰的機會與經歷，從而鍛鍊其克服困難的意志，建立學好數學的自信心。這種探究發現的教學佈局，多數是歸納推理的運用，可以補充教科書演繹方式編排的不足，對於鞏固學生概念和產生學習遷移作用，頗具成效。總之，我們企圖透過這些魔術，為學生構築了一個學習抽象數學知識的具體媒介，讓他們能順利建立概念心物 (**mental object**)，進一步作為學習新概念的參照對象；它們同時也能作為引動瞭解、形成直觀的憑藉。若再輔以優良的教學法，以及掌握思考引導的策略與方法，我們預期它們將可以改變學生對於數學課的看法，以及提升數學教師受歡迎的程度。本書有關數學能力的說明與界定，主要是參考 NCTM(1989)的架構，再輔以 Krutetskii(1976)對數學能力結構的分析，這兩項資料來自黃志賢教授的文獻翻譯。

愛因斯坦說：「教師的主要任務，是喚醒學生對創造與知識的樂趣。」教育學家康斯坦丁·烏申斯基 (Константин Дмитриевич Ушинский) 也說：「沒有絲毫興趣的強制學習，將會扼殺學生探索真理的欲望。」我們始終堅信，興趣是最好的老師，學生自己感興趣的，再苦再累也心甘情願付出！興趣也是學習和創新的重要動力，而創新則需要興趣來維持。

本書能順利付梓，要感謝許多貴人相助。恩師洪萬生教授近三年來不辭辛勞，不斷提供我們專業上的增能，無論在科教專案研究計畫上的指導，或者北區 10 縣市輔導團員的成長研習，都讓我們獲益良多！而謝豐瑞教授一直是我們在數學教育專業上，經常請益的良師典範！郭君逸教授在我們出書前夕，熱心提供我們在魔術技法上的指導，以及專業上的修正建議！教授平易近人，讓我們毫無壓力，並且有如沐春風的感受！感謝鍾靜教授近幾年來在中央輔導團所投注的心力與付出，讓我們學到很多行政，以及人際上的處事智慧！洪于雅實習老師的攝影和版面編輯，讓本書展現光彩！祝福她本年度能順利考上正式教師！感謝興雅國中美霞校長的默默支持與鼓勵，是我們最好的行政與後勤支援，讓我們倆得以在專業上盡展所長，無後顧之憂！最後要感謝尖端出版社曾慧雪主編，抱病期間仍然為本書辛勞付出，本書能順利出版她是最大的功臣！

編者按：本文原刊登於《HPM 通訊》第十二卷第 3 期  
謹以重刊文紀念林壽福老師(1957—2020)



## 壽福速寫

廖惠儀

高雄市大仁國中

- 95 年度台北市數學與自然特殊優良教師（師鐸獎）
- 教育部國教署中央課程與教學輔導諮詢教師
- 全國中學科學教學設計競賽金牌獎
- 臺北市第四、五屆行動研究教材教具實務展示類特優獎
- 教育部中小學典範教學競賽特優獎
- 臺北市中等學校教育叢書暨校刊競賽國中組教育叢書類特優獎、主編獎、美編獎、團體獎
- 第 16 屆國立台灣師範大學傑出校友獎

.....

穿戴著許多獎項與頭銜光環的數學老師，就是大家所熟知的林壽福老師。然而，這些耀眼的光環，不但不足以速寫林壽福這個人，甚至無法描繪他作為數學老師的身影中，最令人敬佩的那一面。壽福老師在八里國中任教擔任導師時，因八里校區幅員較廣、交通不便，在學生國三那年，他決定在學校附近租兩間房子，讓家境貧寒的學生能有安穩的環境讀書，自掏腰包貼補學生的生活費，另外，他又請廚房的阿姨煮飯供應學生晚餐，照顧他們的學業也照顧他們的生活起居，希望在升學之路上助這群學生一臂之力，藉此開闊他們未來的人生選擇。這群學生在畢業之後，每年都會記得在壽福老師的生日時為他慶生，幾十年來未曾間斷。壽福老師對外甚少提及這件往事，因為他不認為這是他為學生多付出了什麼，而是一件身為老師最歡喜快樂的一件事。

壽福老師對於學生學習數學時感受到的困難長存於心，因此，他對於各種能引發學生學習的教學方法，總是抱持著十分開放的心去思考與嘗試。他所開發的許多新穎有趣的教學情境，不只是在競賽中大放異彩，也帶來了源源不絕的學生營隊和講座的邀約，這也實現了他推展運用教學設計的巧思，讓數學課變得有意義、有感覺、有趣並且迷人的理想。在滿滿的行程表中，他絕對不推辭的便是來自偏鄉的邀約。

記得有一次，壽福老師到屏東滿州帶學生營隊，他一大早從台北帶著一大行李箱的教具坐高鐵到高雄之後，又開了兩個多小時的車才到達營隊地點，一整天的活動結束後，夜晚在學校外看著滿天星斗，他說：「能為這裡的孩子們而來，此刻感覺非常滿足。」兩天的學生營隊結束後，他將鐘點費全數捐給學校，並留下他為學生準備的學習素材。

在台灣數學教育的土地上，壽福為我們留下許多美好的足跡。這一位帶著傳奇色彩走向下一個旅程的數學老師，是一位無可取代的良師，他的英年早逝讓我們難以承受，我們永遠懷念他！



# 昆蟲學家法布爾的數學奇遇記

林倉億

台南一中

一個方程式中包含著那麼多科學定律的萌芽，…在這一項的前面加個「+」號，通過兩個友好的點，相互引出恆定數量的向徑，得到的是橢圓形—行星的軌道；在這一項的前面加個「-」，得到的是反向雙曲線，絕望的雙曲線像無限長的觸手在空間中延伸，越來越接近一條直線，那是永遠無法達到的漸進線。去掉這一項，得到的是拋物線，它徒勞地、無休止地尋找著另一個失去的焦點，這是導彈的軌跡，是彗星有朝一日訪問太陽時的軌跡，之後彗星便消失在深淵裡，再也不會回來了。<sup>4</sup>

## 一、喜歡數學的年輕法布爾

這段優美又帶有豐富情感的文字，透過友好的、絕望的、徒勞地這類擬人化的形容詞，將數學中抽象、冰冷的二次曲線方程式，賦予鮮活的形象。這段文字的作者，不是數學家，而是有「昆蟲詩人」之稱的尚-亨利·卡西米爾·法布爾 (Jean-Henri Casimir Fabre, 1823-1915)，他在 1879 年出版《昆蟲記》第 1 冊，歷經近 30 年的時間，在 1907 年完成 10 冊《昆蟲記》的出版。《昆蟲記》成為法布爾的代表作，不僅在法國自然科學史上有重要的地位，也被譯成多種不同語言流傳世界各國。

法布爾於 1823 年出生於法國小鎮聖萊翁 (Saint Léons)，他的父母為了全心打拼生計，在他 3 歲時將他送到鄉下和祖父一同度過的幼年時光。這段時間無憂無慮地擁抱大自然，培養出他戶外觀察的興趣。法布爾的成長歲月，家境一直沒有改善，所以他無法接受連續、完整的教育，不僅賣過檸檬貼補家用，16 歲那年還到鐵路建築工地去當工人。法布爾憑藉著他的努力，在 17 歲那年通過了亞維農 (Avignon) 師範學校的入學考試並獲得了助學金，接受為期 2 年的小學師資培訓課程。19 歲那年，他成為卡龐特拉 (Carpentras) 的小學老師，最喜歡的授課課程是野生灌木叢裡的自然史，這想必與他的幼年生活經驗有關聯。

這位喜歡大自然的卡龐特拉小學老師，今日大概會稱呼他自然老師或生物老師，怎麼會愛上數學？而且還用充滿詩意的方式來形容數學呢？法布爾在《昆蟲記》第 9 冊裡留下了 2 篇很有趣的〈數學憶事〉，告訴後人他與數學的奇遇。而這一切，要從「借」一本書說起！

法布爾在當小學老師之前的數學訓練很基本，大抵就是基本的算術與歐氏幾何學，

<sup>4</sup> 引自《法布爾昆蟲記全集》第 9 冊，頁 200-201。本文引用法布爾的文字，均出自《法布爾昆蟲記全集》第 8 冊〈第十八章 昆蟲的幾何學〉、《法布爾昆蟲記全集》第 9 冊〈第十章 蛛網的幾何學〉、〈第十三章 數學憶事：牛頓二項式〉、〈第十四章 數學憶事：我的小桌〉，為文簡起見，後文不再註明引用出處。

內容雖然不多，但他很享受思考幾何證明的過程：

我以為，幾何學的極致完美，就在於它是一種智力訓練。已經證明的定理的應用，對我來說並不重要，我感興趣的是證明的過程。…幾何學理當傳授思維的邏輯步驟，…如何將難題分解成若干部分，一個一個加以解決，結合各部分的力量，就能推動那塊無法直接攻克的巨石。

這段法布爾的自述，對數學教育工作者或喜歡幾何證明的人來說，一點也不陌生，應該都是心有戚戚焉。但對法布爾來說，幾何證明對他日後的寫作，產生了無比巨大的影響，他自豪地說：「如果說，我從沒寫過讓讀者費解的文章，這大多得歸功於幾何學這位教人思維藝術的傑出導師。…它能釐清複雜的頭緒，剔除繁雜，平息紛亂；它能濾去渾濁的雜質，予人明晰這種溢於詞表的更高級產物。」法布爾將對幾何學的熱愛與從中獲得的能力，實踐於他日後的生活之中，不僅僅是在寫作種運用獲得的能力，還將數學，真真實實的數學，寫入他的《昆蟲記》中，更甚者，還寫了《新數學》、《幾何學入門》兩本數學專書。

## 二、奇特的數學學習經歷

雖然法布爾求學時很享受幾何學習，但並沒有進一步學習數學，比方說今日中學生必備的代數與解析幾何，他完全沒有碰觸過。他自己說：

我從師範學校畢業時，數學知識最為貧乏。開一個平方根，證明球體的面積，對我來說是科學的頂點。偶爾打開一張對數表，那可怕的、有一大堆數字的對數，就讓我感到頭暈目眩。我只不過才抵達算術的洞穴邊緣，就被某種摻雜著敬畏的恐懼感給懾住了。關於代數，我一點概念都沒有。我知道這個名詞，在我知識貧乏的腦子裡，這個詞是個深奧莫測的疑團。

神奇的是，法布爾第一次參與的代數課，不是以學生的身分聽課，而是以教師的身分授課！起因是有位年紀與法布爾相仿的年輕人，為了學橋梁工程而準備一場考試，這需要代數學，法布爾竟成為這位年輕人的求救對象，當時法布爾才 20 歲！20 歲的年輕人，有著無畏的心靈，一口答應，並約在 2 天後上代數課。第一個棘手的問題不是代數學本身，而是法布爾根本沒有代數學的任何書籍或資料！所以，他決定用「借」的，偷偷地從一位資深自然老師的書架上「借」一本厚達 3 指寬、書名用阿拉伯文字寫的代數書。

「借」到書後，法布爾在隨意翻閱的過程中，被「牛頓二項式」這標題吸引住了，嚴格來說，是被赫赫有名的牛頓引發了好奇心，他就這麼一路讀下去，驚喜地發現自己竟然獨立讀懂了！法布爾自力學習的內容，其實就是今日高中數學中的排列組合與二項式定理，從摸索到理解的過程雖然辛苦，但享受到數學知識甜美果實的法布爾，充分地滿足，形容自己「像一個剛被接納入教的教徒，心中充滿了喜悅；交織成科學詩篇的 A、B、C 簇擁著我。」高中生頭疼的字母排列組合問題，竟然成了法布爾的簇擁者，哈！

法布爾是個很好的數學老師，那位年輕人在他的引導下，一步一步獲得數學知識。這自學也教學的過程，法布爾不是沒有遇到過困難，「負負得正」的證明，就是讓他嘗盡苦頭的阻礙。他自嘲自己是開鑿書本岩石的開路先鋒，雖然辛苦，但樂在其中且獲益匪淺。年輕人通過了考試，書也悄悄地回到了原本的位置。

用教學相長來形容小學老師法布爾，再貼切不過了！他不滿足於已有的知識，不斷地學習，在 23 歲時獲得了法國業士文憑 (baccalauréat)，相當於今日的高中畢業證書，有了它，法布爾才可以繼續往大學學士文憑邁進。1 年後，數學學士文憑到手！再過 1 年，物理學學士文憑也拿到了！數學、物理雙主修，在今日大學裡，可是一件非常了不得的事！

### 三、老是寫零的同事

在法布爾的任教小學中，有位歷經軍旅生涯的同儕，法布爾常看他在夜晚時拿著一本數學筆記本研究，提筆寫下「無語法意義、組合在一起的大小寫字母，這中間還夾雜著一些數字，最後在式子後加上等於零。…之後又按另一種順序寫下一行字母，後面照樣等於零。就這樣奇怪的寫了一頁又一頁，每一行的結果都是零！」法布爾根本看不懂他的同儕在寫什麼，但「每一行的結果都是零」引起了他的好奇心，詢問之下才知道那叫「解析幾何」。法布爾當下才知道原來幾何學不只一種，但也十分困惑於「以各種方式排列在一起的字母符號，怎麼能代表只有思想之眼才能得見的各種圖形呢？」

好學的法布爾就和這位同事相約，一起研究解析幾何。雖然是該名同事先接觸解析幾何，但沒多久就常常是法布爾先讀懂書上的內容，然後再教給這位搞不懂坐標與多項式組合的同事。他們兩人經常討論到深夜，各自回房後，法布爾常常在淺睡狀態時想通問題，然後立即起床將想法記下來，以免睡醒後就想不起來了。讀解析幾何的時光，耗去了法布爾許多心神，但他十分樂在其中，並從中體會到代數學的美——「數字排列的詩迸發出極美的情感」，深深認同雨果在詩集《光與影》前言中所說的：

數存在於藝術之中，也存在於科學之中。代數存在於天文學中，天文學涉及到詩；  
代數存在於音樂之中，音樂涉及到詩。

然而，當法布爾把這種體驗告訴他的同事後，他的回答竟是：「無稽之談，純粹是無稽之談。我們接著來畫曲線切線吧。」

這兩位共同研究解析幾何的小學老師，其實是數學學習的一組強烈對比。法布爾的同事想要考取數學學士文憑，完全是出自經濟考量，想要獲得更高的薪水，根本不是被數學所吸引。法布爾語帶嘲諷地說他是「希望能自己支配蔬菜和奶油」，學習數學對法布爾的同事而言，只是為了應付考試，毫無學習的樂趣可言，甚至不斷地向充滿學習熱情的法布爾潑冷水。面對這種功利至上、不斷潑冷水的學習同伴，法布爾自述：

那麼，我是否就真的錯了呢？在理想的火爐裡重新加熱算術中淡忘了的東西，將思維上升到公式，讓那些抽象的空洞充滿生活的陽光，這難道不是洞察未知世界的一種省力方法嗎？當同伴對我獲取成功的方法不屑一顧，在那裡忙碌的時候，我卻在完成有趣的旅行。我之所以能以代數這根堅硬的拐杖為依靠，是因為我有內趨力做嚮導。學習成了一種樂趣！

僅僅為了學習的樂趣而飽受熬夜之苦，搞得筋疲力盡，值得嗎？不為利益所惑，專注於知識魅力的人是瘋子。讓我們縮進自己的殼裡，閉上螺帽，避開生活中的煩惱，以軟體動物的方式生活。這就是活得自在的祕訣。

無論為了考試而學習數學，還是為了樂趣而研究數學，這兩位小學老師歷經了 15 個月的時光，都通過了考試、獲得了數學學士文憑。已習於用「軟體動物的方式生活」享受學習樂趣的法布爾，學習目標立刻轉向天體力學、微積分。至於那位同事呢？獲得了新頭銜，達成「支配蔬菜和奶油」的目的後，終止學習了！

#### 四、蜘蛛網與昆蟲的幾何學—為對昆蟲有興趣的聰明人而寫

我現在著手寫的這一章很有意思，可是寫起來卻困難重重，並不是因為這個題材難懂，而是因為它要求讀者具備一些幾何學知識。這種知識是非常有用的糧食，卻完全為人所忽視。我不是寫給幾何學家看的，一般說來他們不太關心生命本能之事；也不是寫給昆蟲學家看的，他們對於數學定理漠不關心。我是為那些對昆蟲有興趣的聰明人而寫的。

上述引文就是《昆蟲記》第 9 冊〈第十章 蛛網的幾何學〉開門見山的第一段。法布爾喜歡觀察大自然，也喜歡數學，就在他觀察各式各樣的生物時，他發現許多昆蟲、動物所建造出來的結構，都蘊含有幾何學。比方說，他觀察圓網蛛所織的蛛網，發現等距離的蛛絲所形成的角都一樣，而圓網蛛織網所走的路徑，就是一條內切於「對數螺線」的多邊形線。若沿著對數螺線向內走，雖然會越來越接近中心的極點，但卻永遠到達不了。圓網蛛在織網時，就是遵循這種規則，一直接近螺線的極點，直到某個距離才停止，法布爾稱圓網蛛是「精通螺線規則的行家」。在繼續向讀者介紹動物的對數螺線之前，法布爾貼心地幫不熟悉對數螺線的讀者，介紹一些這螺線的特殊性質，也提到了這螺線的發現者雅克布·白努力 (Jacob Bernoulli) 將它刻在墓碑上，並留下「我依原樣復活自身」的銘文。順道地，法布爾也向讀者介紹了阿基米德 (Archimedes) 墓碑上刻的幾何圖形—圓柱及其內切球，代表的意義是球的表面積與體積，分別是圓柱表面積與體積的  $\frac{3}{2}$ 。

法布爾不只在蜘蛛網上看到對數螺線，在軟體動物如菊石、海鸚鵡螺、蝸牛，貝殼動物的扁卷螺、錐尾螺、長辛螺、蟹瘦螺、馬蹄螺、嶸螺上，都看到了對數螺線，他稱牠們是「按對數螺線建造螺殼的幾何學家」。法布爾利用所擁有的來自新喀里多尼亞 (Nouvelle-Calédonie) 的錐尾螺，告訴讀者他是如何看出對數螺線的結構：

我在這個錐體上，隨意用鉛筆畫出一條母線。我的視覺並未受過幾何測量的訓練，但根據我所看到的，我發現螺旋線以一種恆定值的角度切斷這條母線。

這個實驗結果很容易獲致一種結論。錐體的母線投射到與貝殼軸線相垂直的平面上，變成了半徑，而從底部轉圈上升至頂部的細線，彼此輻合成為一條平的曲線，這條以恆定不變的角度與半徑相交的平曲線不是別的，只可能是對數螺線。反過來，我們可以把貝殼的條紋視為這種螺線在一個錐形表面上的投影。

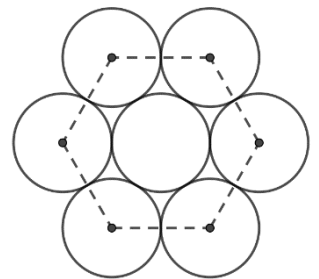
更妙的是，我們可以設想一個與貝殼軸線相垂直並從頂端通過的平面。再設想一條繞在螺旋線上的線。我們把這條線一直拉出來，它的末端不會脫離平面，而是在平面上畫出一條對數螺線，這便是比白努力「我依原樣復活自身」，更為複雜的變體：錐形對數螺線變成了平面對數螺線。

從動物觀察中看到對數螺線後，接下來不可迴避的問題，就是為什麼對數螺線會出現在蛛網中或貝殼上？關於為什麼貝殼上會出現對數螺線，當時人們傳授的一種說法是：

軟體動物是從毛毛蟲衍生來的。有一天，陽光照得毛毛蟲心花怒放，便解放出來，搖晃著尾巴，愉快地把尾巴拎成螺旋形，便突然找到了未來螺旋形貝殼的平面圖。

這說法，依今日的流行用語來說，「這是在哈囉？」當時的法布爾完全不接受這說法，他以蜘蛛的身體構造以及蜘蛛並非毛毛蟲的近親來反駁，振振有詞、言之有理。那為什麼貝殼上或蛛網中會出現對數螺線呢？法布爾說對數螺線是「為生命服務的真理，是動物建築師經常使用的一種草圖」，圓網蜘蛛是靠本能織網，幾何學就存在織網中，存在大自然之中，「對數螺線來自統治世界的幾何王國」。

法布爾不只提到了蜘蛛、軟體動物中的幾何學，在《昆蟲記》第8冊〈第十八章昆蟲的幾何學〉中，介紹了不同種類蜂巢的幾何結構——六邊形。在法布爾之前，已有人觀察到蜂巢中的六邊形結構，並且用豌豆相互擠壓的說法來解釋。什麼是豌豆相互擠壓？當時的說法是把水倒進裝有豌豆的瓶子裡，豌豆吸水膨脹後，就會出現六邊形結構。聽起來很玄嗎？其實懂數學的人一眼就看出背後的數學結構，就是畫出許多彼此互相外切的圓，這些圓的圓心就會形成六邊形；如果這些圓的半徑都一樣，那就會出現完美的正六邊形（如圖）。法布爾可不接受豌豆相互擠壓的說法，雖然這種說法可以找到數學模型支持，但問題出在它並不符合實際的蜂巢建構過程。法布爾舉胡蜂為例，一開始的時候，胡蜂並沒有受到限制，可以自由地往任何方向去建造蜂巢隔室，牠可以隨心所欲或隨機地造出任何形狀的蜂巢隔室，但結果不是別的，就只是六邊形！蜂巢隔室不是相互擠壓形成六邊形的，而是從最初就被構造成六邊形！對法布爾來說，幾何學才是大自然的統治者。



幾何學統治世界，這說法能被當時的人（或現在的人）接受嗎？會不會被批評只是法布爾的個人想像？法布爾深知他的說法會引來這樣子的批評，因此他進一步以懸鍊線為例，指出懸鍊線的代數表示需要

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \dots \approx 2.7182818 \dots$$

由自然數構造而成的無窮級數，結果會是一個「奇怪的」數值，法布爾說這不是出自人類的想像，而是大自然需要  $e$ ：抓住一條軟繩子兩端而垂下來的形狀、從側面看船帆被風吹鼓起來所形成的曲線、母山羊飽滿乳房鼓起來的弧線、附著露珠而下垂的蜘蛛絲，法布爾在大自然中看到許許多多的  $e$ ，讓我不禁讚感  $e$  「真是輝煌異常！」

法布爾深信幾何學統治世界，在原子世界和浩瀚宇宙中，都存在著幾何學。他把幾何學比喻成一個萬能的幾何學家，用其神奇的圓規把一切都量過了。當然，他也清楚知道，這種說法不會被當時的人所接受，但這種說法「具有更高的價值！」

## 五、後記

100 多年前的法布爾，就和今日的我們一樣，在大自然中看到許多數學，並試著提出他的說法：幾何學統治世界。這是法布爾的信念，但不只是他一個人的信念！時至今日，仍有許多人抱持著類似的信念。比方說，《大自然的數學遊戲》作者史都華 (Ian Stewart) 就告訴我們，「我們生活在一個充滿模式 (pattern) 的宇宙中」，「數學之於自然界，有如福爾摩斯之於線索」。《數學也可以這樣學 2：跟大自然學幾何》作者布雷克伍德 (John Blackwood) 相信大自然是有「智慧的」，射影幾何學能帶領我們看穿隱身於萬物外表下的數學，大自然是依據射影幾何學設計的。史都華與布雷克伍德是數學家、數學教育工作者，屬於中學數學教師的「同溫層」，但法布爾就不在這個「同溫層」之中了，透過他的眼睛來看大自然中的數學，確實是別有一番趣味。至於大自然與數學的關係，就讓我們姑且用欣賞的眼光來看待吧！

至於《昆蟲記》好看嗎？筆者任職學校的某位生物老師說：「不好看！」雖然法布爾利用文字「生動地」描述昆蟲及其行為，但對不熟悉昆蟲的讀者來說，缺少圖畫的輔助說明，文字敘述很難「生動」起來，讀者要從中獲得閱讀的樂趣，不是件容易的事。不過，對筆者來說，《昆蟲記》中關於數學的部分卻很有趣，推薦給大家！另外，法布爾不只有在數學、生物學方面有所見解、研究，在物理學、化學、天文學、地理學等諸多方面也有論文發表及專書出版，一生更是充滿了許多十分特別的經歷。日本學者奧本大三郎編寫的《法布爾傳—昆蟲詩人的一生》，雖然是寫給兒童、青少年看的，但透過這本書，可以很快速的認識法布爾。若想要更深入了解法布爾，可到專門網站 <https://en.e-fabre.com/> 查閱，該網站也提供了與法布爾有關的照片、手稿、信件（例如與達爾文的通信），十分值得參觀。



## 參考文獻

- 法布爾著，魯京明、梁守鏘譯 (2002)，《法布爾昆蟲記全集》，台北市：遠流。
- 奧本大三郎著，黃盛璘譯 (1993)，《法布爾傳—昆蟲詩人的一生》，台北市：台灣東方。
- 法布爾網站：<https://en.e-fabre.com/>。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

### 《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)

基隆市：許文璋 (銘傳國中)

台北市：楊淑芬 (松山高中) 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍 (成功高中)

蘇俊鴻 (北一女中) 陳啟文 (中山女高) 蘇惠玉 (西松高中) 蕭文俊 (中崙高中)

郭慶章 (建國中學) 李秀卿 (景美女中) 王錫熙 (三民國中) 謝佩珍、葉和文 (百齡高中)

彭良禎、鄭宜瑾 (師大附中) 郭守德 (大安高工) 張瑄芳 (永春高中) 張美玲 (景興國中)

文宏元 (金歐女中) 林裕意 (開平中學) 林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國 (健康國小)

李素幸 (雙園國中) 程麗娟 (民生國中) 林美杏 (中正國中) 朱廣忠 (建成國中) 吳宛柔 (東湖國中) 王裕仁 (木柵高工) 蘇之凡 (內湖高工)

新北市：顏志成 (新莊高中) 陳鳳珠 (中正國中) 黃清揚 (福和國中) 董芳成 (海山高中) 孫梅茵

(海山高工) 周宗奎 (清水中學) 莊嘉玲 (林口高中) 王鼎勳、吳建任 (樹林中學) 陳玉芬

(明德高中) 羅春暉 (二重國小) 賴素貞 (瑞芳高工) 楊淑玲 (義學國中) 林建宏 (丹鳳國

中) 莊耀仁 (溪崑國中)、廖傑成 (錦和高中)

宜蘭縣：陳敏皓 (蘭陽女中) 吳秉鴻 (國華國中) 林肯輝 (羅東國中) 林宜靜 (羅東高中)

桃園市：許雪珍、葉吉海 (陽明高中) 王文珮 (青溪國中) 陳威南 (平鎮中學)

洪宜亭、郭志輝 (內壢高中) 鐘啟哲 (武漢國中) 徐梅芳 (新坡國中) 程和欽 (大園國際高

中)、鍾秀瓏 (龍岡國中) 陳春廷 (楊光國民中小學) 王瑜君 (桃園國中)

新竹市：李俊坤 (新竹高中)、洪正川 (新竹高商)

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷 (竹北高中)

苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)

台中市：阮錫琦 (西苑高中)、林芳羽 (大里高中)、洪秀敏 (豐原高中)、李傑霖、賴信志、陳姿研 (台中女中)、莊佳維 (成功國中)、李建勳 (萬和國中)

彰化市：林典蔚 (彰化高中)

南投縣：洪誌陽 (普台高中)

嘉義市：謝三寶 (嘉義高工) 郭夢瑤 (嘉義高中)

台南市：林倉億 (台南一中) 黃哲男、洪士薰、廖婉雅 (台南女中) 劉天祥、邱靜如 (台南二中) 張靖宜 (後甲國中) 李奕瑩 (建興國中)、李建宗 (北門高工) 林旻志 (歸仁國中)、劉雅茵 (台南科學園區實驗中學)

高雄市：廖惠儀 (大仁國中) 歐士福 (前金國中) 林義強 (高雄女中)

屏東縣：陳冠良 (枋寮高中) 楊瓊茹 (屏東高中) 黃俊才 (中正國中)

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬 (馬公高中)

金門：楊玉星 (金城中學) 張復凱 (金門高中) 馬祖：王連發 (馬祖高中)

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！