

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 英家銘（台北教育大學）
 創刊日：1998年10月5日
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十二卷第四期目錄 2019年12月

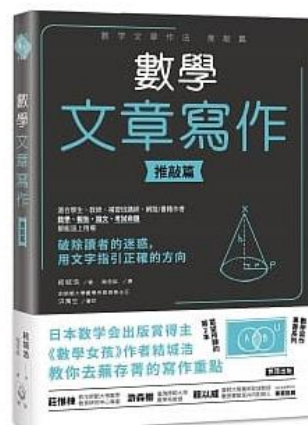
- ▣ 《數學文章寫作：推敲篇》導讀
.....洪萬生
- ▣ 結合數學史的數位科技教學設計～
常用對數篇(1)蘇惠玉
- ▣ 臺灣數學文化紀行：臺北孔廟
.....英家銘

《數學文章寫作：推敲篇》導讀

洪萬生

臺灣數學史教育學會理事長
 臺灣師範大學數學系退休教授

書名：數學文章寫作：推敲篇
 作者：結城浩
 譯者：衛宮紘
 出版社：世茂出版社
 出版日期：2019/12/04
 語言：繁體中文



本書是結城浩《數學文章寫作》系列的第二本。第一本《數學文章寫作：基礎篇》「著眼於寫作正確且容易閱讀的文章」，那是針對正在寫作（而尚未完成者）的提醒。至於這第二本《推敲篇》，則是「著眼於將已經寫好的文章，改寫為更正確且容易閱讀的文章」。因此，本書關鍵詞是「改寫」。正因為如此，作者才會提及漢語「推敲」的典故，並且指出：「斟酌字詞是推敲的重要一面，但推敲並非只有斟酌字詞。字詞的順序、句子的結構、增添刪減的檢討等，全都可以說是推敲。」事實上，他的「推敲的訣竅」（第7章）甚至還提及十分具體有用的建議：「看著自己所寫的文章唸出聲音閱讀吧。比起僅用眼睛默讀，唸出聲音比較容易發現錯字、漏字、主述語扭曲的句子、語順不適當的句子、反覆相同的句子結構等。」

事實上，本書可以說是將結城浩自己「平時用於推敲的技巧，統整集結而成的書籍」。換言之，本書就是他自己的現身說法，至於他（寫作）實踐的憑藉或成果，當然就主要是他的「數學女孩」系列（針對高中層次讀者），甚至「數學女孩秘密筆記」系列

(針對國中層次讀者)了。

對我來說，這種連結呼應了我指導數學史研究生修訂論文的經驗。在提醒他們進行細部的修訂之後，我不時敦促他們注意全文的結構。不過，我分享給研究生的說法或評論，當然比不上結城浩來得專業。他在本書中，針對執筆、推敲、校正及評論，提供了非常專業細緻（或技術性）的建議，對於數學寫作者或數學文章的評論者來說，都十分受用。儘管如此，在本書第 5 章〈整篇文章的平衡〉之中，結城浩還是強調「將文章的每個句子寫得容易閱讀，與統整整篇文章的平衡是兩回事」。對此，他的比喻其實比起所謂的「見樹不見林」更為形象化：「只要將整篇文章比喻為城鎮就能夠理解，即便每條道路都是筆直的，若是道路組合得像是迷宮一樣的話，整座城鎮也會難以通行吧」。

結城浩的「大處著眼、小處著手」作風，就充分展現在他的「數學女孩」小說系列之中，我要鄭重邀請讀者欣賞他榮獲日本數學學會「出版賞」的那些傑出作品。事實上，我也曾特別針對那些數學小說，指出他的書寫之獨到特色：「這些小說也經常基於『知識結構的高觀點』或『數學史的洞察』，來歸納或提示一些（有時是跨界的）「旅行地圖」，藉以強調相關的數學結構意義，讓讀者不至於迷失瑣碎的解題迷魂陣中，而無法自拔」。（請參考拙文〈《數學女孩》的數學學習與結構美學〉）。

我相信在同一時間區段內，交替閱讀他的小說及創作心得（本書系列《基礎篇》及《推敲篇》），一定可以更深刻體會他的敘事與論證之絕妙，這是一種另類的「後設認知」，值得推動數學閱讀寫作者參考借鏡。

本書之適用讀者當然不僅於此。事實上，結城浩是為下列四類讀者而作。正如結城浩在本書〈序言〉所指出，讀者其中就包括「修改、指導文章的人」（第四類，按照他的指涉順序），因為他認為「改寫正確且容易閱讀文章的心態，跟修改、指導他人文章的心態相通」。不過，他所訴求的另外三類讀者，則是更值得我們注意，因為絕大部分的讀者都可以歸類其中。譬如，他希望本書可幫助像他自己一樣，在「寫作穿插數學式文章的人」（第一類），其中包括學生、學校老師、補習班講師、Web 雜誌書籍的作者等。這一類人在閱讀時，可以瞭解寫作人如何推敲文章，而獲得更深刻的閱讀經驗，因此，一般閱讀人（第三類，包括閱讀寫作者的堆動者）也可從中獲益。至於對一般「寫作人」（第二類，文字編輯都算在內）來說，本書提及有關論文、網頁、報告、書籍等各種文章共通的注意事項，儘管都有數學知識的針對性，還是很有助益。

另一方面，本書第 9 章的「推敲的檢查清單」，是將第 1-8 章學到的東西依序整理而成，譬如：（數學寫作）

- 「有為讀者鋪設沒有岔路的單向道嗎？」
- 「有抱持作者該有的自覺與責任嗎？」
- 「有區別專門術語及一般字詞嗎？」
- 「有注意定義時的詞性嗎？」
- 「沒有『言外之意』容易遭受誤解的句子嗎？」

- 「文章具有錯讀耐性嗎？」
 - 「有採行多樣的讀法嗎？」
-

所有這些對於打算推動數學寫作的數學教師、撰寫教科書的編輯（多半由教師兼任），乃至於指導研究生撰寫碩士論文的（數學教育）教授，更是貼心且便利。當然，如何引領學生從事寫作，還是以《基礎篇》的「教戰守則」為主。至於如何進行改寫，上述這個清單絕對是可以憑藉的不二法門，數學教師只要「照表操課」，必要時配合文學專長的教師同仁之協助，就一定可以勝任數學閱讀與寫作的素養課程了。

本書第一刷於 2014 年 12 月問世，到 2019 年 7 月已經有五刷的成績，足見（日本）讀者對於這一類的書寫，正如對《基礎篇》一樣，都有相當高的需求。對於我們的 108 課綱的素養訴求來說，本書連同（它的前篇）《基礎篇》都是教育現場不可或缺的教與學之良伴，更是教師研習的最佳參考用書。至於對一般的讀者來說，結城浩在這個系列之現身說法，正好是我們欣賞他的數學小說之最佳切入點。因此，本書值得我們大力推薦，無論你是那一類的讀者，你都可以從中分享閱讀與寫作的深刻反思。

結合數學史的數位科技教學設計～常用對數篇(1)

蘇惠玉

台北市立西松高中

108 學年度台灣教育開始實施新的課程標準，這一套標準通常被簡稱為「108 課綱」。在 108 課綱的架構下，數學老師必須做許多教學上的調整，因此在實施之前，各個單位自然有許多的研究計畫因應而生。筆者有幸於去年開始參與由陳界山教授主持的研究計畫，此計畫主旨為利用數位科技融入做數學課程的教學設計。在進行教學設計的過程中，筆者嘗試結合數學史與數位科技，以學習單的方式讓數學教師可應用於 108 課綱下的高中數學教學。

以常用對數為例，在 108 課綱的規範下，高一學生僅由計算機的操作來「感受」與理解何謂常用對數，沒有對數的發明脈絡，也沒有基本的對數的運算性質，因此這個單元的教學僅流於「認識符號」而已，無法為學生建構較完整的(常用)對數概念。因此筆者希望藉由數學史的引入，同時結合計算機的操作，讓學生一方面理解與欣賞對數發明的歷史緣由，同時經由計算機的操作，方便學生快速地體驗數學家使用的方法，藉此建構數學概念知識的豐富意涵。以下的學習單僅融入對數的意義與發明的歷史緣由，其餘部分將陸續刊登於《HPM 通訊》中。

- 學習單名稱：對數概念的起源

- 設計理念(使用時機、學習目標等)：

透過活動 1 與活動 2 的等差與等比數列的對應，讓學生理解對數發明的動機與對數的意義，讓學生可以從簡單的對應關係中理解對數，以補足課本直接定義之不足。本學習單可配合課程選取適當的活動在對數單元教學時使用，亦可於選修課時完整實施。

- 學習單內容(教學例題、教學活動等)：

活動 1：等差與等比的對應

現在我們所使用的對數定義是由歐拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 於 1728 年給出，但是對數的發明卻歸功於蘇格蘭數學家納皮爾 (John Napier, 1550-1617)。納皮爾是個有廣泛興趣的人，對宗教尤其狂熱，他所製作的對數表出現在 1614 年的著作《對數的奇妙準則 (Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio)》，以及在他死後由他兒子整理出版的《如何建構對數的奇妙準則 (Mirifici Logarithmorum canonis Constructio)》(1619 年) 中。納皮爾是如何產生對數的概念不得而知，不過可以知道的是，納皮爾應該熟知三角學中的積化和差關係，如

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

因此他知道在三角學的計算中，可以經由計算和與差來得到兩數的乘積。另外，他也熟知之前的數學家如法國數學家許凱 (Nicolas Chuquet, 1445-1488)、德國數學家史蒂費爾 (Michael Stifel, 1487-1567) 所觀察到等差數列與等比數列之間對應關係的結果。

問題：

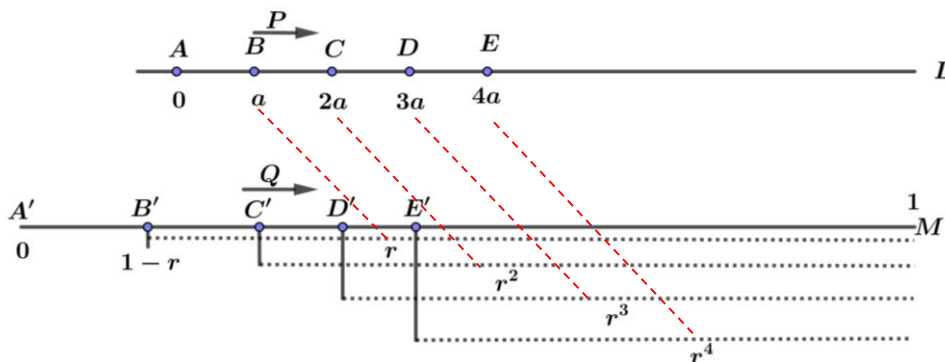
1. (1) 觀察下面的對應表，利用計算機計算在空白的對應處填入適當的數字

y	1	2	3	4	5	6		8	9	10
x	2	4	8	16		64	128	256	512	1024
y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x										

- (2) 觀察上表，如果要計算 128×8192 ，可以怎麼利用上表達成計算？計算結果為何？
- (3) 若 $x=300$ ，那麼對應 y 值的範圍為何？
- (4) 觀察 x 列，這個數列是以什麼為底的指數值？
- (5) 納皮爾發現相鄰兩數間的時間太大，中間有許多數找不到指數次方對應。若想要讓間隔縮短，可以做甚麼樣的調整？

活動 2：動起來~補上空洞就完整了

P 點在直線 L 上以等速度前進；Q 點在直線 M 上前進的速度與距離成比例，如下圖



直線 L 上相鄰兩點間的距離相同，亦即若 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{AC} = 2a$ ， $\overline{AD} = 3a$ ，...

因此當 P 點在直線 L 上等速前進時，經過每個相鄰區間的時間間隔都會相等；

而 Q 點在長度為 1 單位的直線 M (另一端點為 M) 上以成比例的方式移動，從 A' 點出發，

使得每一區間的左端點到最右端的點的距離成等比，亦即 $\overline{A'M} = 1$ ， $\overline{B'M} = r$ ，

$\overline{C'M} = r^2$ ， $\overline{D'M} = r^3$ ，...

設 P 點與 Q 點同時分別從 A 與 A' 點，以相同的初速度出發，當 P 點經過 B、C、D、

E、... 時，Q 點相對地通過 B'、C'、D'、E'、...，亦即 Q 點通過相鄰區間的時間間隔也會相等。

問題：

1. 當 P 點到達與 A 的距離為 na 的點時，Q 點到達的點與 M 的距離為何？若將兩數列的

對應關係以函數 L 表示，即 $L(r^n) = ?$

2. (1) 當 Q 點走到與 M 的距離為 $s = \sqrt{r}$ 時，此時 P 點與 A 的距離為何？

(2) 令 $t = \sqrt[3]{r}$ ，當 Q 點走到與 M 的距離為 t^4 時，此時 P 點與 A 的距離為何？

當 Q 走到與 M 的距離為 x 時， P 點與 A 的距離為 y ，納皮爾將 y 視為 x 的「對數」，為了區別，我們將此對應關係稱為納皮爾對數。納皮爾選擇以 $1-10^{-7}$ 為底，此為他設計的表中的公比，他稱此為「比例 (proportion)」。若已知一數 $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ ，其對應的指數次方為 L 。納皮爾完成了艱鉅的計算工作之後，他將每個乘方的指數稱為「對數 logarithm」，logarithm 這個字源自於希臘文 *logos* 與 *arithmos*，*logos* 有比、比例 (ratio, ratio-number) 的意思，不過它也有計算、推算 (reckoning, calculation) 之意；而 *arithmos* 的用法如現代的「數論」，用來表示更高層的數字理論。因此納皮爾可能用 logarithm 來表示「比例」，也有可能用此來表示一種數字理論。

3. (1) 計算下表中的指數值：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.9^x											
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.99^x											

觀察上表， 0.9^k 與 0.9^{k+1} 間的距離，與 0.99^k 與 0.99^{k+1} 間的距離，何者較大？

(2) 納皮爾為何選擇以 $1-10^{-7}$ 為底？請說明你的看法。

(3) 納皮爾為何要計算 $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ ？請說明你的看法。

4. (1) 計算下表中的 N ，準確到小數點後第 7 位：

L	$N = 10^7(1-10^{-7})^L$	L	$N = 10^7(1-10^{-7})^L$
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

(2) 利用上表，計算 $9999993.0000021 \times 9999989.0000055$

● 教學指引(問題答案、教學提醒等)

- 活動 1 問題 1(5) 參考答案：要使得相鄰兩次方之間的乘幂值(例如 a^n 與 a^{n+1} ， $a > 0$ ， n 為非負整數)間的差距縮小，有兩個方法，①使用分數次方，②讓底越接近 1 越好。
- 活動 2 的目的在呈現納皮爾的想法，等差與等比的對應是離散的，因此他必須解決中間的空洞問題，他的做法是利用運動的觀點，利用點的連續運動，兩數線間每一點都

有對應。

- 活動 2 問題 3 利用兩個乘冪 0.9^x 與 0.99^x 的計算，讓學生透過計算理解底越接近 1 時，同底的兩指數值之間的差距越小。由此將可理解納皮爾為何選擇 $1-10^{-7}$ 為底。
- 納皮爾將他選擇的底，在乘以 10^7 ，計算 $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ ，主要目的在減少小數的計算，當時雖然有十進制的小數觀念與記號，但是使用仍不普遍。
- 問題 4(2) 答案為 $10^{14}(1-10^{-7})^{18} = 99999820000153$ 。如果學生已經學完常用對數單元之後再實施本活動，可讓學生注意比較與現在使用之常用對數的差別。

- 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhv1022@gmail.com
- 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
- 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
- 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
- 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國

中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高

中）、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台

中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥、林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

臺灣數學文化紀行：臺北孔廟

英家銘

臺灣數學史教育學會秘書長

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系副教授

數學因為有悠久的歷史，很自然地在不同社會文化中都可以找到它的痕跡。舉例來說，儒家文化在臺灣、中國、韓國與越南等東亞國家一直佔有主流文化的地位，臺灣各地都有孔廟，而臺北的孔廟，也可以看到數學相關的文物喔！

臺灣數學史教育學會在 2019 年初成立之後，就致力於推廣數學史與數學文化，包含臺灣的數學文化。本會理事蘇意雯教授之前無意間在臺北孔廟發現有數學相關展間，十分驚艷，於是就建議我們學會與孔廟合作辦理推廣活動。我們在 2019 年 10 月與 11 月總辦理六場「六藝之數」導覽活動，由本會理事長洪萬生教授、理事蘇意雯教授與筆者主講，共吸引約兩百人次的學生與社會人士參與，反應十分良好。對於沒有辦法直接到場參加活動的朋友，我們就利用本刊的空間來向大家介紹啦～



圖一：臺北孔廟，右方為大成殿，左方西廡即為六藝之「數」展間所在地。

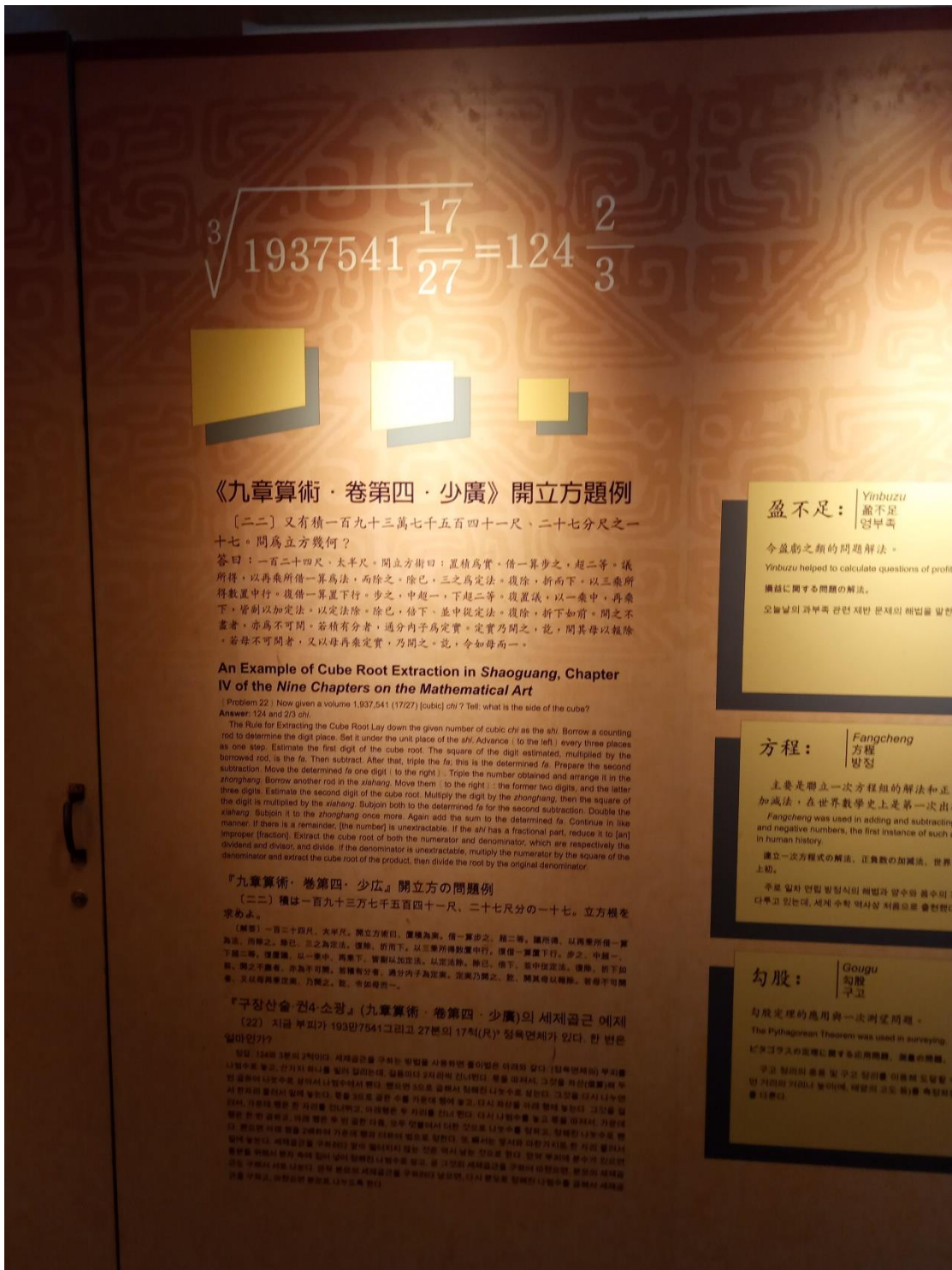
孔廟從 2011 年起利用他們原有的空間設立「六藝」展間。所謂「六藝」，原本是指禮、樂、射、御、書、數這六項西周的貴族教育，春秋戰國時代之後也成為儒家學派教育的內容。很可惜的是，現代學者對於秦、漢之前的東亞算學內容所知甚少，所以在臺北孔廟「數」之展間介紹的大多是漢代以後的東亞算學內容。雖然我們對於孔子與其弟子本身懂多少數學知道的不多，但因為「數」是孔門六藝之一，使得被儒家哲學宰制的中國、朝鮮、越南等文化中，對於數學有興趣的知識份子，即使把讀四書五經的力氣拿去學數學，也能宣稱他們沒有逾越士大夫的本份。某些身份或家族的成員還可以通過數

學相關的科舉考試成為國家公務員。

孔廟「數」之展間內有許多展版，用中、英、日、韓四種語言介紹東亞古代的數系、計算方法與工具，以及重要的數學內容，其中很大的篇幅是關於東亞算學最重要的經典《九章算術》，包含方田、粟米、衰分、少廣、商工、均輸、盈不足、方程、勾股等九章的內容概述，還包含一個開立方的例題，參觀者可以很快認識東亞算學的基本內容。



圖二：《九章算術》內容介紹



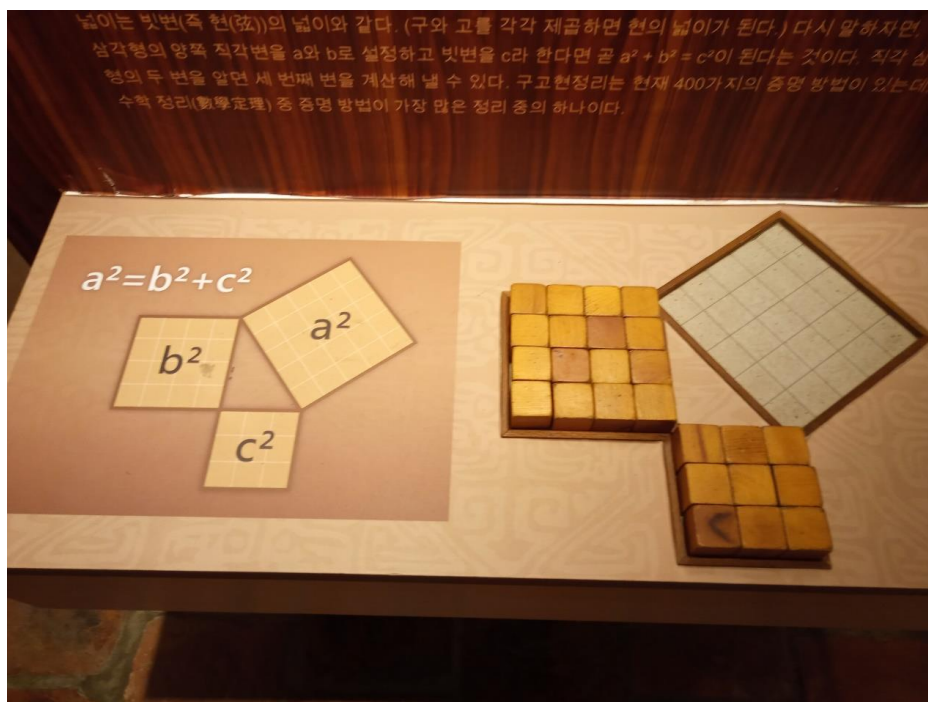
圖三：開立方題例

除了展版的介紹之外，筆者覺得這個展間做有趣的部分，是實物的展覽。15 世紀以前的古代東亞，主要的計算工具是「算籌」。這個展間裡面就有漢代與隋代算籌的複製品供大家觀賞喔～



圖四：漢代與隋代算籌

可惜算籌只能觀賞，不能拿來做計算。但展間中也有可以動手操作體驗的道具。《九章算術》中第九章「勾股」講的就是直角三角形相關的問題，而來展間參觀的朋友，也可以用操作的方式體驗兩股平方和等於斜邊平方的「勾股定理」。



圖五：勾股定理體驗區

除了勾股定理之外，筆者覺得最有趣的部分，就是關於立體幾何的體驗。在圖六的體驗區中有幾個立體，包含「立方」（正立方體）、「壑堵」（直角三角柱）、陽馬（底面為正方形，有一稜垂直底面的四角錐），以及鼈臠（四個面均為直角三角形的三角柱）。這四個立體都是第三世紀劉徽證明《九章算術》商工章各體積公式所需要的基本立體，而這四個立體互相的關係是：一個陽馬與一個鼈臠可以組成一個壑堵，而兩個壑堵可以組成一個立方，也就是說，兩個陽馬加上兩個鼈臠可以組成一個立方體。各位大朋友、小朋友在離開展間前，可以挑戰看看你是否有辦法把正立方體組起來。筆者的觀察是，小朋友通常可以比成人更快把立方體組出來。



圖六：立體體驗區

看完這個介紹，你是不是也想來體驗一下東亞數學文化的魅力呢？歡迎到臺北孔廟六藝之「數」展間！

參考資料：臺北市孔廟儒學文化網 <https://www.tctcc.taipei/>