

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 英家銘（台北教育大學）
 創刊日：1998年10月5日
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十一卷 第一二三期合刊目錄 2018年3月

- ▣ 算史慟折翼，千里悼知音：
記馬若安教授二三事……洪萬生
- ▣ 多元選修特色課程「沒有數學的數學課」－電影、閱讀與敘事
……黃俊瑋
- ▣ 數學閱讀專欄
《數學小說閱讀筆記》讀書心得
……王祺雅
- ▣ HPM的最佳伴手禮：推薦蘇惠玉的
《追本數源》……洪萬生

算史慟折翼，千里悼知音：記馬若安教授二三事

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

2018年初除了寒流不斷侵襲之外，還有從歐洲遠方傳來的不幸消息：數學史家馬若安（Jean-Claude Martzloff, 1943-2018）因心臟病（massive heart attack）突發，¹在1月10日拋下摯愛妻子 France Alice 而辭世。²

我與馬若安教授相識相知超過30年。儘管我們不常通信，但是，與他交遊的幾件事卻始終鮮明，茲聊記於此，以誌永恆的追思與懷念！

一、1983年

馬若安教授與我初識於台北故宮，至於時間則是1983年9月中旬。當時，他應邀來台灣參加「利瑪竇來華四百週年紀念研討會」（1983/9/11-16），透過主辦單位（可能是輔大及故宮）的聯繫，邀我到故宮會場與他會面。當天，我依約到會場，只看到一位老外坐在最後一排，旁邊還有座位，我自然地坐下，與他自然地低聲交談，彷彿老朋友一般，一切都顯得那麼自然而然！我甚至還記得他當時在一張紙上寫下他中文名字：讓 - 克勞德·馬洛夫，中文字跡相當秀麗。他的姓後來改成馬若安。

當年，我自修數學史，發表過一些粗淺的讀書心得報告，被遠在巴黎的他注意到。因此，與他的會面對於「全然無知」數學史這個學門的我來說，是一個難得的機遇。在一方面，我自己「閉門造車」的結果有國外學者青睞，總是多了「另類的」鼓勵，另一方面，透過與他幾天面對面接觸，我彷彿看到數學史（尤其是中國數學史），是一個可以

¹ 他在退休後，應該是全力投入 *Astronomy and Calendars – The Other Chinese Mathematics* 的英譯工作，這對他的心力一定是不小的負擔，或許這導致他最終不起的心臟病。

² 馬若安曾告訴我：他所以很少遠行到國外參加學術研討會，都與他不忍久別摯愛的妻子有關。

且值得投入的學術前景。事實上，我也藉機向他請教歐美學界在數學史研究方面的資訊。他強烈建議我到美國留學，至於法國嗎，他非常保留，因為他認為法國無政府主義者太多，缺乏比較制度性的訓練進程。另外，他也指點我：研究數學史之難在於古代某數學家繼承誰的研究，他又是影響哪些後輩。對於這個目前已經是數學史研究 ABC 的史家技藝，我始終銘記在心。還有，他對任何史料都表現了濃厚的雅趣，譬如，他就曾經想深入研究滿文版的《幾何原本》。再有，我手上的一本《阿爾熱巴拉新法》（法國傳教士傅聖澤中文著述，康熙皇帝的符號代數教本），就是他從梵諦岡圖書館複印贈送的。

我記得他在台期間的一些片段回憶。他個性隨和，是一位很好款待的客人。我請他在寒舍吃便餐，他一再地誇獎烹調美味，完全沒有老外的刻板「忌口」，讓做菜的女主人十分開心。此外，他一再謙稱中文說得不好，因為在（當時）巴黎他只能接觸一些廣東口音的華人，沒有機會練習普通話。他也提及文化大革命時，曾到瀋陽（？）遊學，學習中文，不過，他沒有辦法接觸數學史家，倒是常常被要求去「學習」政治宣傳影片。由於有些影片已經觀看多遍，情節與對白都非常熟悉，因此，有些同學會早一步背誦影片中的人物之台詞，惹得觀眾哈哈大笑。這是他學習中文的一段有趣插曲。

二、1988 年

1985 年，我如願到紐約市立大學歷史研究所科學史組就學，投入道本周（Joseph Dauben）老師門下專攻數學史。直到 1988 年返台撰寫博士論文的三年之間，我與馬若安應該有些通信，可惜，細節都記不得了。我只記得當年夏天返台途中，應邀到加州大學聖地亞哥分校（UCSD），參加第五屆中國科技史國際研討會（由程貞一主辦）。我有幸又與馬若安見面，當年，陪同他與會的同事，有剛榮獲博士學位的詹嘉玲（Catherine Jami）。由於那次盛會是海峽兩岸數學史家的首度齊聚一堂，所以，可能出自李國偉的提議，有一晚我們十幾個人一齊到李國偉下榻的學人宿舍聊天（有王渝生拍攝的照片為證）。當晚，除了中國史家杜石然、李迪、梅榮照、王渝生等等之外，傅大為與我則「代表」台灣，不過，馬若安也應邀過來與我們湊熱鬧。多虧李國偉的熱情招待，當晚我們不見得酒酣耳熱，不過，絕對是賓主盡歡！我這個數學史的「初生之犢」，有機會在前輩面前大放厥詞，一點都沒有「保留」。我記得曾以黃仁宇（Ray Huang）的《萬曆十五年》為例，說明作者如何從正統史學「沒有意義」的插曲，去觀察省思大歷史的流變。其實，這本史學著述的英文書名正是：1587, A Year of No Significance。這個別開生面的書名以及它所引伸或蘊涵的史學進路，讓我印象深刻，對於我研究數學社會史，也啟發良多。如果我的記憶可靠的話，當晚熱烈呼應我發言的，主要是馬若安！

三、中算史導論

馬若安的熱烈迴響，極可能正如學長 David Rowe 所觀察到的，他與我非常投緣。這或許可徵之於他對我的博士論文 *Li Shanlan (1811-1882): The Impact of Western Mathematics in China during the Late 19th Century* 之謬賞與推許。事實上，早在他於

1997 年所出版的 *A History of Chinese Mathematics* 甚至稍早法文版 *Histoire des mathématiques chinoises* (1987) 中，³他就一直不吝於引述我的中算史研究成果。

另一方面，這當然也可能由於他在 *A History of Chinese Mathematics* 之中所採取的進路，與我自己的文本分析與詮釋方法，以及數學社會史的進路頗相呼應。事實上，在該書的自序中，馬若安指出：如果在研究數學史時，除了知識內容的分析與說明之外，也關注歷史脈絡，那麼，吾人對於所研究的數學史就可以獲得更好的理解。針對中算史學，他還特別指出：

- The question of defining the notion of mathematics from a Chinese point of view: was it an art of logical reasoning or a computational art? Was it arithmetical and logistical or was it concerned with the theory of numbers? Was it concerned with surveying of geometry? Was it about mathematics or the *history* of mathematics?
- The important problem of the destination of the texts. Certain texts may be viewed as accounts of research work, others as textbooks, and others still as memoranda or formularies. If care was not taken to distinguish between the categories of texts, there would be a danger of describing Chinese mathematical thought solely in terms of ‘Chinese didactic thought’ or ‘Chinese mnemonic thought.’ The fact that a textbook does not contain any proofs does not imply that its author did not know how to reason; similarly, the fact that certain texts contain summary proofs does not imply that the idea of a well-constructed proof did not exist in China: one must bear in mind, in particular, the comparative importance of the oral and written traditions in China.
- The question of the integration into the Chinese mathematical culture of elements external to it. The history of Chinese reactions to the introduction of Euclid’s *Elements* into China in the early 17th century highlights, in particular, the difference between systems of thought.

基於這些問題意識，馬若安將他的 *A History of Chinese Mathematics* 分為兩大部分，先是提供中國數學的（歷史）脈絡，其次是知識內容的介紹與分析，至於前者的目的，則主要是為了澄清後者的意義（the former being intended to clarify the latter）：

We have not attempted to produce an encyclopedic history of Chinese mathematics, but rather to analyse the general historical context, to test results taken for granted against the facts and the original texts and note any uncertainties due to the pooriness of the sources or to the limitations of current knowledge about the ancient and

³ 他自題中文書名為「中算史導論」。

medieval world.

為了瞭解他的苦心及洞識，我們不妨再引述他的第一部分目次：

Part I. The Context of Chinese Mathematics

1. The Historiographical Context
2. The Historical Context
3. The Notion of Chinese Mathematics
4. Application of Chinese Mathematics
5. The Structure of Mathematical Works
 - Titles
 - Prefaces
 - Problems
 - Resolutive Rules
6. Mathematical Terminology
7. Modes of Reasoning
8. Chinese Mathematicians
9. The Transmission of Knowledge
10. Influences and Transmission
11. Main Works and Main Authors (from the Origins to 1600)⁴

上引第 3、5-7 章等四章的關懷面向，在 1980 年代中算史的研究中相當罕見。這是馬若安對於中算史最重要的提點與貢獻，可惜，根據他自己的觀察，這些論述由於都以法文發表，譬如 *Histoire des mathématiques chinoises* (1987)，而得不到國際學界應有的注意。這可以解釋何以他後來一定要將這部法文版改寫成英文版 *A History of Chinese Mathematics* (1997)。

四、1998 年

我手上的這一本 *A History of Chinese Mathematics* 是他簽名寄贈的，題贈文如下：“For 萬生，my friend of old”，日期是 1998 年 4 月 26 日。我應該是在當年五月多收到此書，大概沒多久之後，就收到 David Rowe 及 Ivor Grattan-Guinness 的邀約，參加 10 月 19 日那一週在南德黑森林區 Oberwolfach 數學中心所舉行的數學史研討會，主題是 *History of Mathematics: Mathematics in the Americas and the Far East: 1800-1940*。在這場研討會中，我除了會見道本老師、林力娜、學弟徐義保之外，也會見李迪、郭世榮翁婿二人。當然，我知道馬若安也將與會，事先應該曾與他通信，詢問合作研究徐光啟與利瑪竇的可能性。

⁴ 這裡他提及的算家及算書依序如下：算經十書、賈憲及劉益、李治（或名李冶）、秦九韶、朱世傑、楊輝、程大位（及其算法統宗）、數理精蘊、疇人傳，以及李善蘭。由於包含李善蘭（1811-1882），因此，他所介紹的數學家及算書之範圍，應該是到 1900 年為止，而非原書目次所說的 1600 年。這裡提及的算家及算書依序如下：算經十書、賈憲及劉益、李治（或名李冶）、秦九韶、朱世傑、楊輝、程大位（及其算法統宗）、數理精蘊，疇人傳，以及李善蘭。

按照原訂計畫，研討會結束後，我搭馬若安的便車前往巴黎，然後再返台。我們在 10 月 23 日離開 Oberwolfach，取道 Strasbourg，在那裡休息午餐，並參觀大教堂的天文鐘。在經過德、法邊界時，例行的驗關已經取消，沿路不時看到掛英國及羅馬尼亞車牌的汽車，整個歐洲已經「統一」，拿破崙的夢想終於實現，馬若安特別補上一句：“But without war!” 10 月 24 日中午，馬若安伉儷邀請我到 le café du commerce 午餐，接著，參觀奧賽博物館，然後就分道揚鑣，不再有從容的時間閒話家常了。

五、道本老師祝壽文集

幾年前，馬若安曾來 email 詢問我的郵寄地址，原來他出版新書 *Astronomy and Calendars – The Other Chinese Mathematics: 104 BC – 1644 AD* (2009/2016)，⁵打算送我一本。我立即回信，可是，我始終未接獲該書，或是進一步的資訊。後來，David Rowe 與我合編道本老師七十祝壽文集（本來是徐義保學弟提議，但他不幸在 2013 年 11 月因腦溢血英年早逝）時，也向馬若安邀稿，他滿口答應，後來就撰寫了 “Yixing (一行) in Paris”。事實上，邀稿函是我負責發送的（2013 年 8 月 22 日），他在 2013 年 9 月 10 日回函如下：

On Tue, 10 Sep 2013 10:03:27 +0200, Jean-Claude Martzloff wrote:

Dear Wann-sheng,

Many thanks for your message. I feel that this is a very good initiative and I will be very pleased to join your team. The deadline March 2014 is also quite convenient for me.

I am very sorry I could not answer earlier to you. I was in a remote corner of France with no access to the internet and I read your message only now when back in Paris.

I also hope that you are fine and I hope that we will have some occasion to meet again in the future

With my kindest greetings

Jean-Claude

由於歐美學者邀稿主要由 David 負責，所以，就由 David 與馬若安直接聯繫 -- 我記得 David 有一次（2014 年 8 月 26 日）還跟我確認馬若安的 email，可見他應該十分忙碌才是。⁶可是，我萬萬沒有想到，這個 email 竟然是生前他寄給我的最後一次。

⁵ 我查閱網路書訊，發現本書法文版於 2009 年問世，或許當時他就打算送我這個版本。

⁶ 他的忙碌一定與英譯 *Astronomy and Calendars – The Other Chinese Mathematics* 有關。在英譯《中算史導論》時，他曾提及耗費了巨大的心力。

六、來不及說再見！

2018年2月26日，我參與琅元教授的研究生論文計畫口試，博佳佳也應邀擔任口試委員。結束後，她告知我馬若安不幸謝世的消息。回來後，又看到李國偉兄及英家銘的臉書，也轉述了同樣的噩耗。我向道本老師探聽進一步的資訊，結果他立刻回 email（2018年3月1日），確認馬若安的死訊，並且相當遺憾地提到：

I am in the process of trying to write about those of us who were among the earliest to become involved in the history of Chinese mathematics, and have already received accounts from Karine Chemla and Chris Cullen about how they first entered the field, when they first visited China, how they first became interested in mathematics in China, etc. I was going to write to Jean-Claude and several others about their experiences as well, and now wish I had done so last fall, rather than wait until I'm done with several other projects I would like to finish first before getting into a historiographic study of those of my generation and earlier who have become historians of Chinese mathematics.

道本老師未能及早寫信給馬若安，請他提供早期學術生涯紀錄，以便留下他們那個世代歐美的中國數學史家的完整圖像。無論如何，馬若安對於中算史的深刻研究成果，以及因此在中算史學方面的獨到見解，都讓他在那個世代的數學史家中，成為不可或缺的典範。國際學界中的中算史家欠他的，豈止是一個偶而的引述與註解！

七、梅文鼎研究的發為先聲

由於馬若安的史家生涯始自他有關梅文鼎的研究，因此，我要在本文最後，轉引我在多年前根據他的研究成果所引伸的一點心得，作為對他的無限追思及永恆的懷念。

為了證明「幾何即勾股」（這是「西學中源」的幾何版），梅文鼎在他的《幾何通解》與《勾股舉隅》中，以中國傳統的勾股術，重新證明《幾何原本》第二冊的命題。在分析梅文鼎的進路之後，馬若安評論說：

對原著（按即《幾何原本》）的改寫不僅涉及論證，還包括幾何圖形，像梅文鼎這樣的一流數學家，就曾盡力將幾何圖形從其所附屬的論證中分離出來。於是，為使相應的原理更直觀，他們便會重新畫圖。若視其為「演示法」（monstrations），則通過明確的圖形表示，論證的實質已發生了變化。

他進一步對比歐幾里得 vs. 梅文鼎，分享了發人深省的歷史洞識：

在歐氏原著中，其命題的實質是難以脫離相伴其中的無可置疑的邏輯過程的，而對梅氏來說，對給定命題的理解則主要依循相關圖形的特殊畫法，而不是演繹推理。

以上，是我在拙文〈數學與意識形態：以梅文鼎的「幾何即勾股」為例〉中，針對馬若安對梅文鼎進路的分析所做的引述。他的相關研究論文是：“Space and Time in Chinese Texts of Astronomy and Mathematical Astronomy in the Seventeenth and Eighteenth Centuries”。翻譯成中文〈17、18世紀中國天文學與數理天文學著作中的時空觀〉，收入《法國漢學》第6輯（科技史專號），北京中華書局，頁448-474。

參考文獻

Martzloff, Jea-Claude (1993-1994). “Space and Time in Chinese Texts of Astronomy and Mathematical Astronomy in the Seventeenth and Eighteenth Centuries,” *Chinese Science* No. 11 (1993-1994): 66-92.

Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.

洪萬生 (1991/1999). 〈1998年Oberwolfach數學史研討會記事〉，收入洪萬生著，《孔子與數學》（台北：明文書局），頁141-147。

洪萬生 (2009). 〈數學與意識形態：以梅文鼎的「幾何即勾股」為例〉，收入洪萬生等著，《當數學遇見文化》（台北：三民書局），頁161-171。



照片來源：Oberwolfach Photo Collection, Copyright: MFO

照片提供者：Grattan-Guinness, Enid

拍攝年代：1998

左邊為 Sanchez, Clara Helena，中間為馬若安教授，右邊為洪萬生教授

多元選修特色課程「沒有數學的數學課」－

電影、閱讀與敘事

黃俊瑋

台北市立和平高中

一、前言－本校數學特色課程簡述與未來方向

近年來，各高中端為了因應 108 學年度新課程綱要的實施，必需開設各類多元選修課程供學生們選擇。其中，數學特色課程怎麼上？上些什麼？有何「特色」與賣點？往往是考驗各校的難題。事實上，即便以大專院校的師資，目前可供參考的數學通識課程亦不多，因此，教育當局的政策與理念要真正落實到全台各地的高中學校，還有許多努力空間。

而筆者所在的台北市和平高中，開設與數學有關的特色課程主要包含兩類：其一是提供數理實驗班與數學專班學生的特色課程，其二則是學科課程發展小組所設計，供一般普通班學生選修的特色課程。

首先，依學校課程計畫規定，數理實驗班與數學專班的數學特色課程共包含了：「數學專題」、「數學探究與實作」與「數學的奧妙」等三門課。筆者在開設相關課程時，一方面搭配教育部訂定的數學課程綱要，進行相關數學知識的加深加廣，並且強化學生在數學解題與一題多解方面的能力，鼓勵學生參與各項數學競賽作為取向。二方面，也依據學生們的興趣與性向，利用此課程作為數學科展、數學小論文或數學專題研究的準備。另外，在「數學的奧妙」課程裡，則以數學通識與數學素養為導向，融入數學史、數學文化、數學哲學、數學美學以及數學閱讀和數學寫作等元素，作為課程核心。

至於提供普班學生選修的數學特色課程，在課程設計上更加彈性，以數學科為例，在拙文〈數學史與數學特色課程的邂逅〉與〈從棒球計量學探討統計思維〉中，筆者便曾經介紹本校所開過的兩門數學特色課程，如「數學 π 的奇幻漂流」與「棒球與統計」。

再參考大專院校的數學通識課程或者他校的數學特色課程，筆者曾經構思過下列可行的課程設計方向：數學史（師大數學系課程）、數學活動與思維（師大通識課）、電影（影片）中的數學（師大通識課）、數學與小說（台大通識課）、數學與科普閱讀、數學專題研究（專題、科展）、渾身解數（數學解題、數學競賽）、數學與摺紙、數學與藝術、多面體與幾何、數學與遊戲（桌遊）、數學建模、數學與電腦（程式）、統計與生活、數感實驗室等。不過，基於種種原因，這個學年度決定嘗試設計一門以「數學普及閱聽」以及「數學敘事」為導向的數學特色課程。

首先，從 2006 年以來，台灣參與了每三年一次，由經濟合作暨發展組織(OECD)委託的跨國研究計畫：國際學生能力評量計畫（Programme for International Student

Assessment，簡稱 PISA)。從台灣學生這四次評量計畫的表現來看（如表一）：

表一 台灣學生「數學、科學、閱讀」歷年在 PISA 的排名

年度	數學排名	科學排名	閱讀排名
2006	1	4	16
2009	5	12	23
2012	4	13	15
2015	4	4	23

數學方面的表現一直名列前茅，但是閱讀的排名始終表現欠佳。再加上近年來無論是教育部或出版界對於數學閱讀以及數學科普閱讀的推動與支持，考量種種原因，決定從閱讀與敘事的角度切入，設計出新的數學特色課程。這也呼應了拙文〈數學史與數學特色課程的邂逅〉一文中所提到：

本特色課程只是開端，十二年國教政策與課程趨勢目標下，未來所需開設的特色選修課程勢必持續增加，本課程第一次施作，仍有諸多不足與改善空間，而未來相關課程的設計與調整上，亦期盼能加入更多與閱讀相關的元素，寓數學於閱讀。本課程也期盼能發揮啟發學生數學思想的作用，並賦予學生們更自由而寬廣的數學視野。⁷

接下來，本文首先介紹這門新數學特色課程的各週課程主題與主要內容，接著，介紹本課程的評量方式並提供筆者所設計的課程學習單，給有興趣開設相關多元選修特色課程的教師們參考。

二、沒有數學的數學課

課程名稱

筆者多次開設特色課程的經驗，課程名稱往往決定了學生們的選課意願，也是吸引學生的最重要關鍵。幾經思量後，「沒有數學的數學課」這個課程名稱於是誕生。

一般而言，數學這個學科帶給人們的印象通常是：冰冷抽象的知識、難題、背誦公式、考試、標準答案、補習等，因此，本課程所謂「沒有數學」，指的是：沒有冰冷知識的數學課、沒有難題的數學課、沒有背誦公式的數學課、沒有考試的數學課、沒有標準答案的數學課、沒有補習的數學課等。果然，在第一輪的選課時，本課程的選課人數便能達到上限。

課程設計

課程設計的靈感最早來自於洪萬生等教授在師大所開的門通識課程—「電影中的數學」，筆者聽聞洪教授分享後，同樣基於此構想，將數學或數學家相關的電影、影集與小說等題材，融入本次的多元選修特色課程中。

⁷ 引自黃俊瑋(2016)，〈數學史與數學特色課程的邂逅〉，《數學頻道》，第 16 期，三民出版社。

首先，筆者考察近年來上映，與數學家或數學主題相關的電影如下：美麗境界、心靈補手、博士熱愛的算式、天地明察、風暴佳人、決勝 21 點、質數的孤獨、丈量世界、魔球、模仿遊戲、 $x+y$ 愛的方程式、天才無限家、關鍵少數等。先從這些電影之中選出 6 部適合高中階段學生，或者故事內容與高中數學課程或學習經驗較貼近的電影：博士熱愛的算式、天地明察、魔球、 $x+y$ 愛的方程式、天才無限家、關鍵少數。接著，依據每部電影的內容，設計問題導向的學習單，並擬定相關探究與討論的主題。

至於教學進度的安排上，在扣掉放假或期中與期末考週後，一整個學期下來課程進度約莫有 18 週，第一週一般為課程介紹與引言，最後一週則為課程總結與回饋時間，再加上有 2 週為學生期末報告時間（本課程的期末報告為數學科普書籍評論與短講），因此，尚有 14 週的課程需要構思設計。

為了能夠幫助其他有興趣的教師也能共襄開設類似的課程，於是，筆者針對前面提到的 6 部電影，總共設計出 6 個「課程模組」，每個模組包含了：

電影欣賞→寫學習單→上台發表與討論→老師提問與補充

四個部份，各個模組大約需要 3 週共 6 小時的時間。因此，無論是筆者或其他開這門課程的老師，可以自由地從 6 個課程模組中選擇 3~4 個自己比較感興趣或拿手的主題來進行。綜合以上，筆者在表二中整理列出本學期課程的各週主題與上課內容：

表二 各週課程主題

週次	課程主題 第一節	課程主題 第二節
1	數學經驗分享	課程說明
2	數字搜查線	數學上的重要猜想
3	電影欣賞－魔球 1	電影欣賞－魔球 2
4	電影欣賞－魔球 3	學習單
5	「魔球」學習單與相關議題討論	棒球與統計－ 棒球統計數據的限制與迷失
6	數學與文創相遇：數學小說、數學詩與 數學普及讀書介紹	數學無奇不有！？
7	電影欣賞－天地明察 1	電影欣賞－天地明察 2
8	電影欣賞－天地明察 3	學習單
9	「天地明察」學習單與相關議題討論	和算文化
10	數學閱讀－你所不知的數學家	數學家的故事
11	電影欣賞－博士熱愛的算式 1	電影欣賞－博士熱愛的算式 2
12	電影欣賞－博士熱愛的算式 3	「博士熱愛的算式」學習單與相關議 題討論
13	發現數學之美、數學與藝術	數學競賽介紹
14	電影欣賞－關鍵少數 1	電影欣賞－關鍵少數 2

15	電影欣賞－關鍵少數 3	「關鍵少數」議題探討
16	期末報告－數學科普短講	期末報告－數學科普短講
17	期末報告－數學科普短講	期末報告－數學科普短講
18	最美的數學式	課程回顧與課程回饋

課程內容概要說明

第一週為本課程介紹，一方面介紹本課程的來由與課程內容簡要說明，也分享筆者過去學習數學的經驗。例如，筆者當年選讀數學系的原因，乃是因為小時候在科普書中讀到了有關費馬最後定理的故事，特別是費馬留下耐人尋味的一段話：「我想到一個絕妙的證法，可惜頁邊的空白處太小，沒有辦法把寫下來。」便是因為這個故事，因而勵志決定以數學系作為第一志願。因此，期待透過這樣的特色課程，改變學生們對數學的想法，也引發學習數學的興趣。

接著，筆者在這學期的課程中，從一開始設計的 6 個課程模組中，選擇了「魔球」、「天地明察」、「博士熱愛的算式」與「關鍵少數」等四部電影，作為這學期課程的主軸。如同前面所述，課程進行方式主要以「電影閱聽」、「問題導向式的學習單」、「議題探討與發表」的方式進行。而不同的開課老師，也可以依自己的喜好選擇。（相關學習單如後述）

每一個課程模組的最後，筆者也補充相關議題。例如接在「魔球」電影之後，筆者簡單介紹棒球這個運動產業以及數學家、統計學家、數據分析師所扮演的角色。並以一些例子，簡單帶領學生反思報章媒體上常見的這些棒球統計數據，存在了哪些限制或相關迷思？如何看穿統計數據的表象，看清事實的真相。

為了讓學生了解數學發展史上的不同風貌，看完「天地明察」之後，除了探討曆法與政治等議題，也簡單介紹了發展於江戶時期的日本數學知識文化－「和算」，介紹遣學繼承、算額奉納、流派競技等特有的數學知識活動，也介紹關流數學家以及有趣的數學問題和研究成果。

課程中，也融入了數學與美學、數學與藝術等議題，閱聽完「博士熱愛的算式」這部電影後，介紹十數年前師大數學系學生與 30 年前國際數學家們所票選最美的五個數學式，並聚焦在最美的數學式「 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 」，介紹式子中所涉及的 5 個重要數學常數，探討為何數學家覺得它「美」，並帶領學生看見數學之美。

除了上述電影課程模組之外，剩餘的課程內容則可以依據開課教師本身的興趣與專長來設計課程。由於今年的暑假，指導學生參加「青年尬科學－看見數學」的比賽，因此第二週時，介紹了該比賽複決賽時的閱聽文本「數字搜查線」這部與數學有關的影集，利用課程時間讓學生觀看其中一集，並探討當中的數學議題，再延伸探討何謂數學猜想以及介紹古今重要的數學猜想（如哥德巴赫猜想、孿生質數猜想、黎曼猜想等等）。

此外，數學小說與數學閱讀也是本課程聚焦的議題，因此，課程中也和學生分享「數學與文創相遇」相關主題，介紹目前台灣可及的數學小說與數十本適合高中生閱讀的數學普及讀物，也介紹了數學詩這個新文類。筆者也設計了數學科普閱讀與討論活

動，以洪萬生教授的《窺探天機－你所不知道的數學家》序言作為閱讀的文本，探討書中所討論的數學議題，以及分享這些數學家的故事。

部份選課同學對數學解題與數學競賽深感興趣，因此，筆者也設計了數學競賽專題，一方面介紹目前台灣中學生常見的數學競賽，特別是國際數學奧林匹亞競賽（International Mathematical Olympiad）這項官方競賽。同時，也介紹《數戰數決》、《數學奧林匹亞特訓班的一年：從奧林匹亞競賽看資優生特質與數學之美》、《陶哲軒教你聰明解數學》這三本書與國際數學奧林匹亞競賽有關的書，以及天才數學家陶哲軒的故事，也利用數學問題引導學生思考。

另外，也讓學生閱讀洪萬生教授的〈IMO 獎牌、傑出數學家與資優教育〉一文，反思頂尖數學家們從事學術事業時所必備的人格特質。又如高爾斯(Timothy Gowers)對於證明費馬最後定理的懷爾斯(Andrew Wiles)的評論：「必定需要無上的勇氣、決心與毅力，同時，他也需要掌握前人的辛苦耕耘成果，在正確的時機選對了數學研究領域，以及擁有一種罕見的擬定策略之能力。」

本課程的期末報告，則是讓學生閱讀一本數學相關普及讀物或數學小說，進行導讀與評論，最後上台發表短講，介紹此書與閱讀心得，並且每位同學抽籤針對一位報告的同學進行提問。

如此，筆者完成了 18 週的課程設計，也期望這樣的課程進行模式可供校內外有興趣的數學老師參考與執行，透過這樣的數學特色課程，落實數學的閱讀與敘事。

三、課程評量與電影學習單

本課程主要的評量方式與評量工具包含：

1. 課程問卷與課程回饋單
2. 電影學習單
3. 期末報告：(1)期末書評導讀文 800-1000 字 (2)期末數學短講與提問
4. 平時參與討論或上台發表的表現

接下來，簡單介紹期末報告的進行方式，期末報告主要融合了數學的「聽說讀寫」四大要素，並包含兩個部份：

1. 數學科普讀與寫作

本課程要求學生選讀一本數學科普書，並撰寫 800-1000 字的導讀文或書評。相關參考書目主要包含《數學小說閱讀書記》、《博士熱愛的算式》、《天地明察》、《爺爺的證明題》、《蘇菲的日記》等數學小說，或是本課程中曾介紹過的數學普及讀物。

2. 數學科普短講與提問

每位學生根據選讀的數學科普書，序抽籤順序，於期末報告週發表 5-6 分鐘的數學科

普短講，除了報告自己閱讀的書籍與心得外，每位同學也會針對 1 位報告同學進行提問。進行流程如下：

- (1) 報告者上台報告（報告時間以 5-6 分鐘為限，時間超過或不足者扣分，5 分鐘時按鈴 1 次，6 分鐘時按鈴第 2 次，7 分鐘時按第 3 次鈴，並強制結束。
- (2) 提問者聆聽完報告後，針對報告者所報告的內容提出 2 個問題。
- (3) 報告者回答 2 個問題。（提問加回答時間共計 2 分鐘）

數學科普短講的評分採取學生互評的方式，每位同學需要仔細聆聽其他同學的報告，並根據評分單上的評分項目，對上台報告的同學、提問者的問題與報告者的回答分別作評分。一方面透過評分的過程，培養高層次的認知能力，二方面，也認識更多的數學普及讀物，並從同學們報告過程中所舉的例子，學習相關數學知識。

四、結語與反思

綜合本文所述，本課程融合了數學影集、數學電影、數學小說、數學科普、數學史、數學故事、數學閱讀、數學寫作、數學書評與數學短講等要素。如同〈數學史與數學特色課程的邂逅〉提到的：數學特色課程的設計上，以「數學通識」為主要導向，旨在讓學生跳脫傳統「考試的數學」，並體會數學多元而有趣的各個面向。因此，課程所涉及的面向廣泛，但不包含太多艱深的數學問題，多數的主題與內容皆屬探索性，並以引發學生對數學的興趣與學習動機作為主要導向，淺嘗輒止。⁸

另一方面，數學對於多數學生而言，是最抽象、困難卻又無法逃避的科目，而數學特色課程，正可彌補一般數學正課上的不足，透過講述、分組合作、模型製作、電影欣賞乃至成果發表等更多元的教學方式，融入多樣化的教材，讓學生體會數學的有趣、有用的多元面向，也可從數學史與數學文化的角度切入，豐富並開拓更寬廣的數學新視野。相較起數學正課的「硬」，數學特色課程的「溫柔」與通識取向，更能引發學生的學習動機，並拉近學生們與數學之間的距離。一方面領會數學的多元性，並能引發他們對數學的興趣，拉近與數學之間的距離。⁹

附錄－學生回饋

以下摘錄自學生回饋表：

「我覺得這種教數學模式非常符合現代趨勢，因為這門課要想拿高分就必須把學習單寫好，而要寫好就必須認真看電影，了解電影的過程。而寫完學習單後要上台報告，上台報告則訓練了你的準備功夫，以及臨場反應。藉由一次次的訓練將自己打成精鐵，這些都對你未來的生活以及工作有了很大的幫助。最後的讀書心得，可以訓練你的控場能力，能不能時間掌控好，將觀眾的心思拉到自己的報告上。總合以上想法，我覺得這門課值得你的付出。」

⁸ 引自黃俊瑋 (2016)，〈數學史與數學特色課程的邂逅〉，《數學頻道》，第 16 期（三民書局）。

⁹ 同上。

「我覺得最後的心得報告讓我印象最深刻，因為透過大家報告的比對之下，可以清楚的了解有準備和沒準備的差別，有準備的在做完報告之餘，還可以想想如何將報告講得生動有趣，甚至是將報告內容背起來。而沒準備的上台後就會結結巴巴，不知所云，甚至沒有達到應有的報告時間，我希望能從報告者的身上挑出好的學習，而那些差勁的就可以當成一種警惕。」

「我原本以為學數學只是為了考試，並沒有什麼實質的用處，在看了這麼(多)電影，我才發覺數學與生活習習相關。有人曾說：『數學是組成這個世界的規則』，所以我們學數學是為了了解這片天地，幫助人類能夠更與這片天地結合，探索們自然的奧妙，古代有科學家研發出公式，現在的我們也一樣可以，透過對數學的應用，去尋找那些我們曾經為不能解釋事物的真正答案，讓我們的生活變得更加完美。」

「我真的很少看課外書，藉此讓我發現原來書，尤其是數學書，並不是我想像中那樣無聊，我個人很討厭上台，但至少聽同學講我也學到許多。」

「在所有的課程內，我最喜歡的就是看影片的時候，而且平常不太有時間看電影，可以在上課時間看電影，又是大螢幕，看完還會一起討論，覺得心情很放鬆，另一方面也把看完電影後的心得紀錄起來，不會有種花一大堆時間卻沒學習到的感覺，喜歡這種上課方式，因此印象深刻。」

「我對數學的看法轉變最大的是：以往真的覺得數學只是冷冰冰的公式，還有一大堆奇怪的符號和數字，是個難搞的家伙（當然～我現在還是覺得它難搞），但我的心得報告寫的那本「博士熱愛的算式」讓我知道原來數學也能代表一種事物，也能有象徵的意義。……說實在的，我以前只要知道某本書或電影有關數學，就覺對不會碰它，但沒想到原來是好看的呢！……還有就是，這門課讓我更加覺得數學非常的重要，因為幾乎所有的事物都和它有關，沒有它，很多事都完成不了（這似乎代表我永遠都逃不出它的魔爪）。」

主要參考資料

書籍

小川洋子著，王蘊潔譯（2011），《博士熱愛的算式》（三版），麥田出版社。

史帝夫·奧森著，齊若蘭譯（2011），《數學奧林匹亞特訓班的一年：從奧林匹亞競賽看資優生特質與數學之美》（二版一刷），遠流出版社。

沖方丁（2013），《天地明察》，新經典文化出版社。

洪萬生（2017），《數學小說閱讀筆記》，遠足文化。

洪萬生（2017），《窺探天機－你所不知道的數學家》序，三民出版社。

洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏（2009），《當數學遇見文化》，三民出版社。

陶哲軒（2011），《陶哲軒教你聰明解數學》，遠流出版社。

麥可·路易士著，游宜樺譯（2011），《魔球：逆境中致勝的智慧》（經典新版），早安財經出版社。

傅承德、劉啟昌（2014），《數戰數決》，商業周刊。

黃俊瑋(2016)，〈數學史與數學特色課程的邂逅〉，《數學頻道》，第 16 期，三民出版社。

黃俊瑋(2017)，〈從棒球計量學探討統計思維〉，《數學多元選修》，第二刊，龍騰出版社。

影集與電影

數字搜查線第一季、博士熱愛的算式、天地明察、魔球、 $x+y$ 愛的方程式、天才無限家、關鍵少數。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）

王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學

園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

數學閱讀與寫作

黃俊瑋

台北市立和平高中

106 學年度上學期，筆者在和平高中擔任高二數理實驗班的數學教師，課程中，也融入了數學閱讀與閱聽等元素－包含數學相關電影欣賞、數學科普書介紹等。並指定學生們在寒假期間，自行選讀一本數學科普書籍，並撰寫一份心得報告。筆者在課堂上，也分享了如何簡單地寫一份 1000~1200 字的閱讀報告，其中閱讀報告主要包含以下兩個部份：

一、內容摘要

- 用 200-300 字簡單地摘要本書重點、作者寫作動機與旨趣。

二、閱讀心得報告

- 如何寫作、充實閱讀心得的內容？

1. 例子：

舉出印象最深、最有趣的片段、情節或數學知識。

2. 反思：

從書中學到了什麼？帶給你什麼樣的啟發？是否影響你對數學的看法？

3. 評論：

簡述你所認為的本書的優缺點與特色（含知識內涵、故事、寫作方式等）

4. 延伸思考與議題探討：

嘗試自己提出問題或拋出議題，並從閱讀的過程中尋找答案回答或深入探討。

這學期開學後，筆者也從學生的作品當中，挑選出三篇佳作與讀者們分享。這三篇佳作閱讀的書籍分別是《數學小說閱讀筆記》、《平面國－向上，而非向北》、《數學偵探物語》。這三篇心得將陸續刊登在這幾期的通訊中。

《數學小說閱讀筆記》讀書心得

王祺雅

台北市立和平高中 二年 14 班

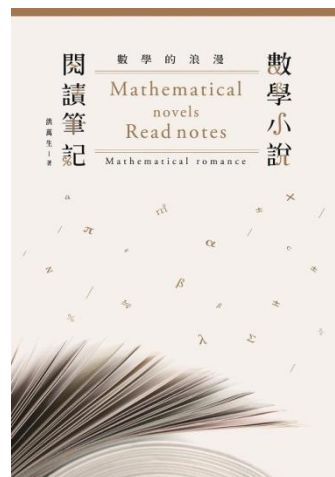
書名：數學的浪漫：數學小說閱讀筆記

作者：洪萬生

出版社：遠足文化

出版日期：2017/07/12

語言：繁體中文



一、《數學小說閱讀筆記》內容摘要

課本上的數學會使它感覺是無趣、枯燥乏味的，不輕易使人對它產生熱情，但是作者洪萬生認為，若是以數學小說的方式去呈現，透過敘述的方式，從不同的角度欣賞數學邏輯，不僅可以燃起對它的認同感，還能夠在輕鬆的心態下容易地傳達想訴說的精神與價值觀。

此書整理了許多其他數學小說的精華，先是從各書的背景開始介紹，接著來到內容，用原書故事內容與此書作者看法交織寫作，時而提及原書的作者是如何帶入數學知識，時而告訴讀者原書如何將數學變成文學比喻，借此也許會讓讀著想要閱讀介紹中的書籍，在最後加上自己的總結，就這樣帶著讀者看著一小篇又一小篇的數學文章。

二、閱讀心得報告

讀起這本書時，它給人的感覺就猶如書名，是本可以讓人邊讀邊思考邊想像的筆記，裡面有部分我尚未學習到的數學，因此在讀的時候我也自己上網查了一些資料，盡量讓自己能夠更加吸收書中想傳達的想法，很特別的感受，閱讀此書籍的同時我也正在學習、正在成長，不單單只是像一般文學小說一樣隨著故事劇情發展，書中每篇介紹的數學小說都有不同的意涵可以讓我去思考。

當然的，此書內容當然也有許多令我驚豔的敘述，書中有提到保羅·艾狄胥(Paul Erdős)的自白：「人們早就爭論，究竟是我們創造了數學還是僅僅發現了它。換句話說，數學真理是否已經存在在那裡，即使我們還沒認識到。」在體會到歐拉公式之美後，我只能說它實在是美到一個極致，有一種令人說不出的感動，像 π 、 e 這種無理數，甚至是

i，竟然可以巧妙的同存在一個等式之中，這使我無法相信它是一個巧合，也許這就是數學的奧妙吧！《數字愛人》的作者保羅·霍夫曼(Paul Hoffman)指出：「數學就是發現聯繫，尋找特殊問題和一般結果之間、一個概念和另一個貌似無關但實際上互相聯繫的概念之間的關係。任何有意義的數學都不是孤立的。」這也是我在此書中非常有感觸的一段話。

接著是關於女數學家海芭夏(Hypatia)，她的父親曾告訴她：「保留思考的權利！因為即使想錯了，總比什麼都不想來的好些。」他強調明辨是非的能力，我想或許這就是笛卡兒想說的「懷疑一切」，若平白無故的接受我們所聽聞的一切而不加以思考，想必一定會造成人的思考僵化，又我們的所見所聞並非一定正確，因此懷疑的能力不可少，一再盲目的接受則會使我們滯留於原地無法成長。有時候在算數學題目時，會將運算時運用到的一些定理在心裡默證一次，原因在於不想將它視為理所當然，每個定理都是先人證明而來的，而在成為定理前，它們都只是猜想，也許是這些猜想是對的，但也有可能是錯的，這就是為什麼要去證明，因為我們懷疑，懷疑這些猜想的正確性，這當然也都只是我的想法，而「證明」本身也是一個可以考驗自己、逼迫自己去思考的事情，運用自己知道的所有事物去述說它，就像講一個短篇故事，字數少卻不失其內容，同時又有架構使得它具合理性，而且完成證明後，才會使自己對這個定理更有印象，美好的事物總是不想忘記的，對我來說唯有如此才能讓它在腦中揮之不去。

我還很喜歡書中介紹原書是如何用數學去形容生活中的一些事，比如說在《質數的孤獨》中，作者用孿生質數來形容男、女主角的關係：「既孤獨又迷網，彼此非常靠近，卻又不夠近到可以真正碰觸到對方。」這樣的敘述讓我第一次從數學身上感覺到了溫度，原來它也可以讓人的心感到這麼糾結；在《數字狂小姐》中提到：「沒有記數，我們就不會注意生活，不重視、不珍惜。我們獲得東西時感到歡樂，失去東西時感到悲傷，這就是我們和動物不同的地方。記數、加總、衡量、計時，是我們之所以為人的原因。」這點醒了我，是什麼產生我們對於一物的價值觀，是記數與衡量，於是我發覺，數學是如此神奇，它似乎組成了世界上一切所需，看似理性的數學，卻也以某種潛在形式存在於感性之中，它無所不在，但是想要去完全的理解又感覺是多麼的遙不可及；最後，在介紹《平面國》的篇章中，可以藉此知道螞蟻是如何看待三維的，因此我又不禁去想像四維空間要如何表現，也許生活中一些不可理喻的現象是源自於四維空間，對於這個猜測，即便是錯的，總比什麼都不想來的好些。

看完這本閱讀筆記，感覺就像是集了各書精華於一身，既滿足又踏實，進一步擴大了我對數學的認知，揭開我所不知道的數學的一面，期許自己以後能夠更認真去體認這個世界，去感受其中數學帶來的衝擊，也大膽去懷疑一些日常的假設。的確，數學不應該侷限於教科書中，因為它帶來的美感，也許是在生活中意外發生的。

HPM 的最佳伴手禮：推薦蘇惠玉的《追本數源》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

蘇惠玉老師出版這本 HPM 專書，較之於我自己的著作出版，我的雀躍與期待絕對是有過之而無不及。這種心情就好比看到年輕後輩終於獨當一面一樣，因此，我想藉此機會欣然分享二十幾年來，開拓 HPM 這個新興學門的價值與意義。

所謂 HPM，原是指一個國際研究群 International Study Group on the Relations between **H**istory and **P**edagogy of **M**athematics 的縮寫，後來，逐漸演變成一個學門的簡稱。這個學門的主旨，是為了探索數學史與數學教學的關連。事實上，就學門的分類來說，它是橫跨數學史與數學教學（研究）的一門新興學問，也因此，它的理想目標要是連結到數學教育的現實，無非是數學史與數學教學的研究結果之互惠。



HPM 與我的直接關係要從一九九六年談起。當年夏天，我前往葡萄牙參加 HPM 1996 Braga。那是四年一度的 ICME（International Congress on Mathematics Education）之衛星會議，在會場我得以認識 John Fauvel（英國數學史家）與 Jan van Maanen（荷蘭數學史家），他們分別是 1996-2000、2000-2004 年間的 HPM 主席。由於下一屆 ICME 2000 即將在東京舉行，所以，他們希望我承辦 HPM 2000。這是 HPM 的國際慣例，顯然大家都希望 ICME 與 HPM 分別在鄰近國家舉行。或許是基於數學史同行的某種默契吧，我沒有經過太多考量就承擔下來。

我當年所以決定接手，多半由於我年少時的數學普及夢想所引發的數學史研究志業。記得我在 1981 年出版的《中國 π 的一頁滄桑》自序中，就特別引述數學史家 Morris Kline 懷抱 HPM 精神的證詞：「循著歷史的軌跡介紹數學，這種方式是獲得理解、深入體會的最佳途徑。」現在，既然有這種機緣籌備此一盛會，就當作一種 HPM 實踐吧。另一方面，我有把握屆時好多學生可以提交學術報告，撐起在地的所謂「主場優勢」，同時他們也會樂意擔任 HPM 會議的志工。事實上，我的學術生涯最值得驕傲的一件事，就是在 1991 年榮獲科學史博士學位之後，有幸指導相當多位非常優秀學生（如蘇惠玉等人）撰寫數學史相關論文，他們大都從大四開始選修我開授的「數學史課程」，因而深深地被這門學問所吸引。

公元兩千年七月，HPM 2000 Taipei 如期舉行，也如預期地博得好評。不過，在所有的行政資源支援中，最具有意義的一項，就是我也從當時的國科會獲得些許補助，得以創辦《HPM 通訊》，¹⁰藉以推動在地的 HPM，並分享 HPM 的研究成果以及相關資訊。至於這個刊物的主編，就邀請蘇惠玉擔任，從 1998 年 10 月一直到今天，她可以說是台

¹⁰ <http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>。

灣 HPM 的永遠志工。

由於惠玉的堅持與慧識，這份小眾刊物維持了我們台灣 HPM 伙伴的學習動能。近二十年來，我們在數學史研究與 HPM 上的實踐，都在這個通訊上留下了珍貴的點點滴滴。業師道本周 (Joseph Dauben) 甚至以「通訊團隊」稱呼我們這一組數學史的愛好者。事實上，有許多伙伴都是由於惠玉的不時敦促，而在這個刊物上留下深具紀念性的文章，其中，當然包括惠玉本人的長期耕耘成果。

這些成果的精緻版本，其中就有部分收入這本《追本數源》。全部的這二十七篇「你所不知道的數學秘密」，大致可分為四類。在這四類中，第一類所包括的單元 (第 1-15 篇) 有：

- (1) 數學概念：無理數、虛數、對數、費式數列、黃金分割比、向量 (含複數)、巴斯卡三角形 (含巴斯卡傳記)；
- (2) 數學公式：餘弦定律、海龍公式、歐拉最美的數學公式；
- (3) 數學理論：三角學、圓錐曲線、機率初步；
- (4) 數學方法：數學歸納法、三次方程式解法 (及優先權之爭辯)、高斯消去法的預備。

其中，〈機率初步〉(第 9 篇) 可以「抽出」與〈機率論發展的第二樂章〉(第 19 篇) 及〈統計學的興起與發展〉(第 20 篇) 並列，合為第二類。另外，第 16-18 篇主題都是天文學的數學模型，可單獨成為第三類。至於第 22-27 篇等六篇，則是有關微積分的故事，我將它們歸屬為第四類。

(我的) 上述分類多少忽略了年代學因素，不過，如此會比較方便我們推薦這些材料作為「特定的」教學用途。基於此一考量，首先，我要鄭重推薦第二類，因為在這三篇文章中，惠玉從數學史切入，為我們呈現了機率與統計之關係的一個簡要輪廓，譬如，她評論說：「當數學家由觀察事件發生的機率，推論事件真實機率的近似值時，就需要用到統計了。」這對於想要釐清所謂的「統計思考」之意義的老師 (譬如我自己) 來說，尤其是不可多得的參考教材。

另一方面，第四類文章可充當微積分特色課程之教材。惠玉從有關無窮概念的問題談起，總共處理了它們的三個面向：芝諾悖論 (Zeno paradox)、潛在無窮與實在無窮 (之對比)，以及不可分量 (indivisible) 與無窮小量 (infinitesimal)。然後，再以另三則故事來說明微積分的誕生，其中涉及數學家除了牛頓與萊布尼茲之外，還論及沃里斯 (Wallis) 及費馬所扮演的過渡角色。不過，最重要的數學史洞識，莫過於她引述數學史家凱茲 (Victor Katz) 的見解，說明何以我們會將牛頓與萊布尼茲並列為微積分的發明人。這對於喜歡「提問」並「告知」「誰率先發明○○○？」的人來說，頗有醍醐灌頂之功！因為唯有深入 (知識的及歷史的) 脈絡，我們才能判斷此類提問是否恰當？或者，即使問題有意義，是否還適合簡單的回答？

再有，本書第三類文章針對「西方歷史上的數學與天文之關係」，提出了非常詳盡的解說與圖示。惠玉深入相關原典史料所進行的論述與敘事，說明她打算為這一類特色課程，提供一個相當前瞻的參照，讓高中教師同行借鏡。她的故事始於托勒密的《大成》，經歷哥白尼天文學革命，終於克卜勒的行星三大運動定律。針對克卜勒最終發現橢圓的天文（物理）意義，惠玉給了十分動人的評論：「如果當初克卜勒沒能打破一千多年來對圓形軌道在哲學、美學與宗教上的『盲目』信念，或許我們現在還體會不到這個宇宙簡單、純粹與和諧之美。」

最後，我們回到本書第一類文章。這一類所涉及的，都是 HPM 「曝光率」最高的單元。也因此，這些故事要說得別出心裁，尤其需要數學史、HPM 的素養與功力，甚至是數學知識本身的洞察力。譬如說吧，惠玉在〈有意思的餘弦修正項〉（第 11 篇）一文中，針對畢氏定理 vs. 餘弦定理之對比，就提出了非常有趣的觀察：「一般定理的出現都有其脈絡，當數學家們發現了直角三角形三邊所作的正方形有著畢氏定理這樣的關係時，接下來感興趣的課題自然而然就是非直角三角形時是否保持一樣的關係？或是要作如何的修正？從特例到通例，從熟悉的已知推廣到未知，餘弦定理的出現脈絡為數學定理的發現做了個很好的示範。」

還有，在〈圓錐曲線的命名〉（第 15 篇）一文中，對比高中數學教材僅從代數面向來看待拋物線、橢圓與雙曲線，惠玉從「問題的起源、名稱的由來以及表徵方式」，重新考察這三個曲線，從而進一步發現「正焦弦」在「徒然」計算之外的重大意義。原來這個線段的長度，都出現在阿波羅尼斯圓錐截痕（conic sections）的表徵之中。因此，針對圓錐截痕的不同定義方式，她明確指出：「仔細觀察就可發現它們都有個相同不變的形式，那就是相等（parabola，拋物線）、超過（hyperbola，雙曲線）與短少（ellipse，橢圓）。藉由這個因性質而起的名字由來，圓錐截痕（圓錐曲線）的觀念得以整合成一體，而不再只是零碎的三個不相關曲線而已。」

這個有關正焦弦的故事，在數學與數學史兩方面都深具洞識，是數學教師專業發展中不可多得的範例。惠玉在《HPM 通訊》發表後沒多久，我在 MAA 所發行的 *Convergence* 線上期刊上，¹¹也發現類似的論述，「德不孤必有鄰」，充分見證惠玉乃至於台灣團隊伙伴的 HPM 之國際化視野。

總之，無論從教師專業實作成果，或是數學史甚至是 HPM 研究來看，本書都忠實地反映作者的深厚學養。它字字珠璣，筆調溫暖，而且洋溢著數學知識活動的練達反思。所有這些，都保證了它的 HPM 跨界（譬如國界）可能性。因此，本書將是 HPM 的最佳伴手，也是 HPM 伙伴獻給台灣數學教育界的最佳禮物。透過它，我們一定可以想像數學教育的更美好未來！（2017/11/12 寫於木柵仙跡巖末端）

¹¹ MAA 是 Mathematical Association of America 的縮寫。Convergence 是由這個團體所發行的 HPM 期刊。