HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
王文珮（青溪國中）
英家銘（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二十卷 第六期 目錄（2017年6月）

數學小說閱讀筆記序言

洪萬生
台灣師範大學退休教授

從 **2003** 年應邀審訂《鸚鵡定理》的中譯版開始，我就跟數學小說結了不解之緣。說真的，當時我對於「數學小說」這個新文類的方興未艾，完全在狀況之外。不過，基於數學史的專業以及數學普及的關懷，我對這一本小說的敘事，留下了極深刻的印象。

儘管如此，我仍然將它視為一本數學普及書籍。我想後來台灣陸續出版的其他數學小說（主要是中譯本，台灣作家創作的極少），也應該是被當作數學普及書籍才是。對我自己來說，有關數學小說的閱讀經驗逐漸累積，才終於察覺到這是一個嶄新的文類。林芳玫與我在**2009**年共同發表的學術論文 **--**〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉，無疑是為我自己將數學小說視為獨立文類，提供了一個忠實的見證。在本篇論文中，我們「從『數學與敘事』（**mathematics and narrative**）切入，試圖探討數學與說故事乃至文學敘事之關聯。」至於案例則是以《遇見哥德巴赫猜想》及《博士熱愛的算式》為（文本）分析對象。「我們發現數學小說的敘事風格，與作者所運用的數學知識息息相關，也因此演變成為一個嶄新的文類，為數學的『隱喻』（**metaphor**）賦予了極有價值的意涵。」

除了該篇學術論文之外，我也在「台灣數學博物館」這個虛擬的網站中，[1]將有關數學小說的評論或推介，從「科普深度評論」欄獨立出來，別列成為一個「數學小說」專欄。其中，絕大部分的評論文章，現在都改寫成為本書的閱讀筆記。

本書所收集的二十四篇文章，有二十二篇都是我分別針對二十二部小說的閱讀心得，其中，我將電影與漫畫都歸類為小說。[2]另外兩篇，則是針對所謂的「數學敘事」（**mathematical narrative**），與讀者分享一點有關「敘事學」的讀書心得，同時，也藉以

---

[1] 目前暫用網址是 http://mathmuseum.tw，由張秉瑩博士（數學史家兼自由作家）擔任經營志工。
[2] 其實，還包括劇本與舞台劇。可參考 Alex Kasman 的數學小說網頁：http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/。

指出數學學習的敘事面向，絕對是未來數學教育現場一個備受矚目的議題。此外，附錄有兩篇文章，分別由蘇惠玉、黃俊瑋及邱珮瑜撰寫，他們都是現職老師，由他們現身說法，來說明數學小說的教育價值，真是再恰當不過。我在此特別感謝他們的慨然同意出借，納入這兩篇文章，無疑使得本書多了許多親和力。

還有，我自從**2010**年退休之後，即應邀在台灣大學講授數學通識課程：「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」，多年來得到許多學生的熱情與知性的雙重回饋，[3]這讓我在這本閱讀筆記中，有了比較從容的「對話想像」，而不至於陷入自以為是的「客觀」陳述 － 那是學術論文參考太多的後遺症。因此，我希望讀者參閱本書時，儘可能「想像」這是我閱讀那二十二篇小說時，所留下來的「隨興」筆記。既然隨興，就不應該像《如何閱讀一本書》那樣正經八百。事實上，任何人閱讀小說時，都會有（而且也被期待有）完全不同於他人的感想，因此，當你閱讀數學小說時，這也是我敬謹建議的最基本正向態度。

現在，我必須針對本書提及的小說，以及目次的安排，提供一點起碼的說明。本書第一、二輯所寫的閱讀筆記，都是針對職業作家或文學家的作品，其中艾莉絲・孟若（**Alice Munro**）與小川洋子（**Yoko Ogawa**）是響噹噹的文學大咖，前者尤其已經榮獲諾貝爾文學獎。他們會以這類作品為榮，足見這個文類擁有值得大力開拓的空間。

第三輯包括了兩篇比較特別的閱讀心得，那就是針對兩部古典文學作品 **--** 《格列弗遊記》及《平面國》 － 的數學敘事之介紹。這是較少為人所知的一個面向，尤其前者始終被當成「兒童讀物」(其實是使用簡約版或改編版)，現在如果運用比較成年人的視角，說不定可以讀出完全不同的況味。在本輯中，我還介紹一本數學漫畫，那就是加藤元浩的〈十七〉。我相信當讀者看完這部漫畫之後，一定大感意外，因為以漫畫為媒介，漫畫家竟然可以那麼「從容地」講解數學。

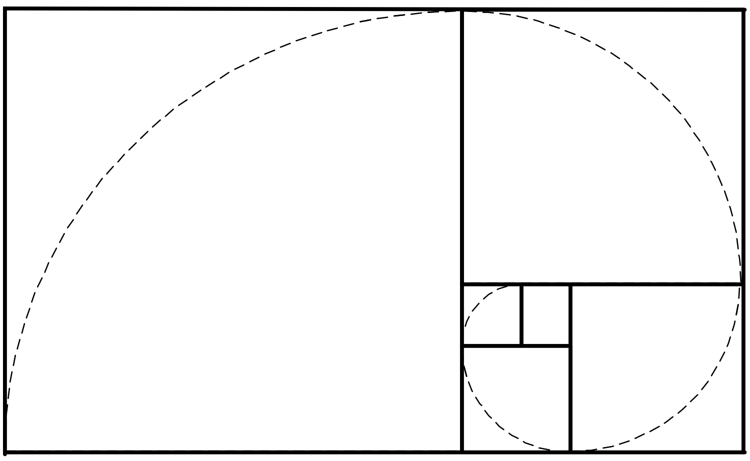
第四輯所介紹的小說之作者，大概都是數學專業出身，因此，在小說敘事中，數學知識活動通常較為凸顯，而呈現數學普及進路的更豐富風貌，其中，尤以結城浩的《數學女孩》系列最為突出。事實上，他就是因為出版這些書籍，而榮獲日本數學會出版賞。同樣地，《數字搜查線》的製作團隊也榮獲美國科學促進會（**AAAS**）的公共服務獎章，以表彰他們對於數學普及的貢獻。此外，像《蘇菲的日記》與《爺爺的證明題》的書寫，我們也可以發現這兩部小說的作者，在將數學知識活動融入故事情節時，如何為那些數學賦予了更豐富多元的意義。由此可見，這個文類一旦有了正當性，作家在創作數學小說時，都顯得更加理直氣壯，一點都不擔心數學這個角色喧賓奪主。

本書所介紹的二十二本小說，有許多同時具有歷史小說及數學普及的面向，甚且還有關乎少女或少年的勵志書寫。因此，適合閱讀的讀者年齡大概可以從十一歲開始算起，以《算法少女》小章十一歲為標準。這種多元的面貌，對於數學小說的閱讀愛好者，當然是一大福音，因為至少我們可以從閱讀中領悟數學知識的豐富內涵與價值。

[3] 最近，我與同事謝佳叡、英家銘在台灣師範大學合開通識課程「小說與電影中的數學」，學生的反應也頗為類似。

最後，我要再次聲明，本書內容絕對無關嚴肅的文學評論。這是因為正如前述，我採取了相當隨興的書寫，總是從數學敘事切入，試圖「理清」在各篇小說中，數學作為比喻的（教育）意義。又因為是隨興，所以，我選擇的二十二篇小說多少反映了我目前個人的偏好，同時，各篇體例不一的「風格」，也相當反映我在初稿書寫時的脈絡與心境。另外，有一些閱讀筆記沒有收進來，主要是由於我自認為讀得還不夠透徹或者得體，而暫時無法分享比較獨特的心得報告。不過，未來只要還有機會，尤其在與數學小說的互動更為全面之後，我希望呈現給讀者比較成熟的閱讀筆記續篇。

總之，數學小說因為是小說，所以，它當然具有「怡情養性」的功能。另一方面，由於它具有數學元素，因此，它帶給吾人的陶冶，似乎也多了一些知性的想像。不過，所有這些「強作解人」都不應該影響你閱讀數學小說乃至其他小說的心情。如果本書讓你有了閱讀數學小說的「衝動」，那就請立刻採取行動吧。（**2017/5/6**寫於餘音裊裊的仙跡岩之末）



編者按：本書預計2017年7月出版

比例中項與倍立方問題作圖器

蘇惠玉
台北市立西松高中

前言

平面幾何作圖中，有很大一部份是尺規作圖。所謂的尺規作圖，即是限制只能使用沒有記號的直尺和圓規在紙上連續作出曲線。在古希臘時期，由於對數學確定性的追求，對於作出的幾何圖形，要求要能做到動作上沒有疑慮，邏輯上沒有不合理之處才能接受，因此才有尺規作圖的規範。在歐基里得《幾何原本》的第一卷中，就明確地規範了尺規作圖的規則。然而在尺規作圖的限制下，卻也讓許多有趣或實用的問題無法以尺規作圖解決，其中最重要、最著名的就有三個作圖題：化圓為方問題、三等分任一角問題、以及倍立方問題。然而一旦開放作圖的限制，那麼許多有趣的作圖器與作圖方法就會因應而生，本文先以倍立方問題為例，說明許多跟倍立方問題解決有關的作圖器之運作方式與數學原理。

倍立方問題

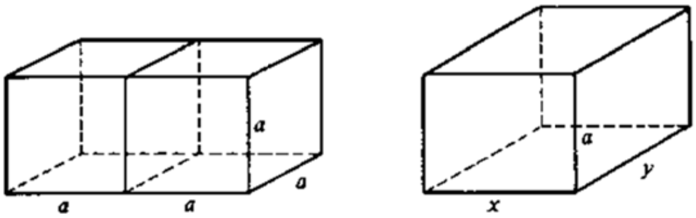
關於倍立方問題的來源，有一個傳說是這樣說的，克里特國王 **Minos** 要為他的兒子 **Glaucus** 建一座立方體形狀的墳墓。但是他聽說建好的墳墓只有每一邊 **100** 呎，他覺得太小了。 **"It must be doubled in size".** （體積必須是現在的兩倍）"，他要求建築者盡快將每一邊都加倍。很快地，數學家們就發現錯誤所在了，並且思索著解決之道。另一個傳說則是關於 **Delos** 這座小島的問題。所以倍立方的問題有時會稱為 **Delian problem**。傳說是這樣的，太陽神阿波羅藉著一位先知命令提洛島民，要將他的立方體形狀的祭壇體積加倍，並且保持形狀。他們作不出來，就將這個問題拿去問柏拉圖，柏拉圖這位聰明的哲學家與數學家，很有哲理地告訴他們說，阿波羅給出這個命令，不是因為他要一個兩倍大小的祭壇，而是他要藉著這個苦差事，來強調數學的重要性。

將一個邊長為 **a** 的正立方體體積加倍，即是要作出一新的正立方體之邊長 **x**，滿足 $x^3 = 2a^3$。這個問題被希波克拉提斯（**Hippocrates,** 西元前約 **470 – 410**）歸結為作出兩線段長 **a** 與 **2a** 的兩個連續比例中項。也就是說，要作出兩線段 **x, y** 滿足

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

x 即為所要求的新正立方體的邊長。希波克拉提斯如何想出這個倍立方問題的兩個比例中項解法，並沒有詳細的史料記載。據推測，他可能是這樣想的：將兩個邊長為 **a** 的正立方體放在一起，成為一個立方體長寬高分別為 **2a, a, a**，體積為 **2a³**；想向將這個立體拉整一下，使其成為高維持為 **a**，長寬分別為 **x, y** 的立方體，因為體積要維持一樣，所以 $xy = 2a^2$，從中可發現 $\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$；再將立方體拉整成長為 **x**，寬與高亦為 **x** 的立方體。

同樣，體積要維持一樣，所以$x^2 = ay$，或$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$。故，$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$。



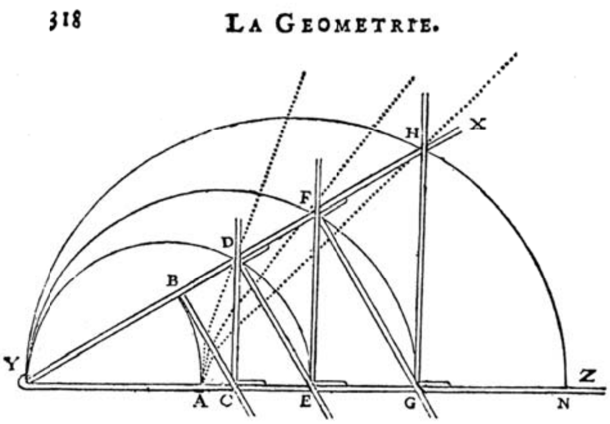
希波克拉提斯的發現並沒有解決倍立方的問題，只是將問題轉換成另一形式而已。但是如何作出兩個比例中項 **x** 與 **y** 呢？

笛卡兒的比例中項作圖器

既然倍立方問題的解決需要用到比例中項，那我們就先來看看如何做出兩個數的比例中項。笛卡兒在他的《幾何學》（***La géométrie***）中曾經設計了一個比例中項作圖器，見下圖一。在《幾何學》卷二〈曲線之特性〉（**On the nature of curved lines**） 中，笛卡兒認為只要再加上了一條「公設」，就可使許多機械作圖成為可接受的作圖方式：

> **兩條或兩條以上的直線可以以一條在另一條上面移動，並由它們的交點決定出其他曲線。**

接著他舉例說明如何用圖一的這個作圖機器作出包含兩個變量的高次曲線。雖然書中沒有明說，但是以笛卡兒對尺規作圖的熟悉，以及這一卷開頭提到的牽涉到圓錐曲線的幾何作圖問題，有可能他設計這個比例中項作圖器的靈感，是來自於倍立方問題。



圖一
出自 *The geometry of Rene Descartes*(1954)

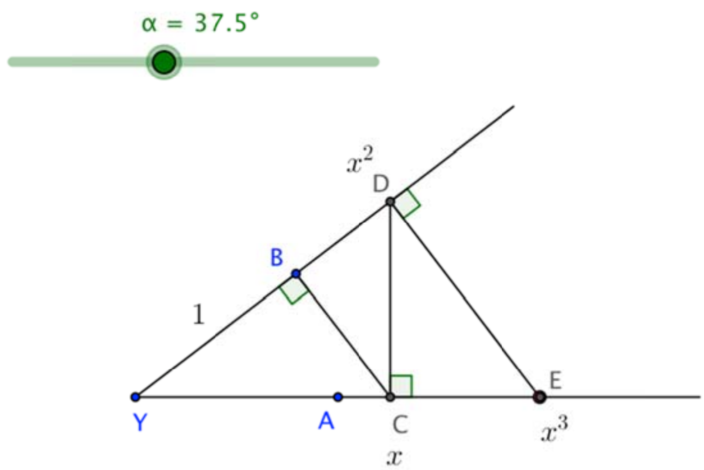
這個裝置由幾根木棒組成，其中木棒 **YZ** 與木棒 **YX** 在 **Y** 點連結，使得 **YX** 可以往上旋轉，並在木棒 **YX** 上的一點 **B** 處連接一根垂直的木棒。在笛卡兒的書中並沒有詳細說明運作方式，不過從書中的說明與圖形看來，操作方式可能如下：

(1) 先將 YX 與 YZ 重合，得出 YZ 上與 B 點重合的一點 A 後，將 YX 旋轉拉出一個角度，可得 YB=YA，並使得在 B 點上與 YX 垂直的木棒交 YZ 於 C 點；
(2) 在 C 點處放置一個矩形曲尺，以作出過 C 點與 YZ 垂直的直線，並交 YX 於 D 點；
(3) 在 D 點處放置一個矩形曲尺，以作出過 D 點與 YX 垂直的直線，並交 YZ 於 E 點；
(4) 重複 2 與 3 的動作，分別作出 F、G、H 點

首先，為何這個作圖器可以做出比例中項？

因為 $\angle YBC = \angle YCD = 90^0$，且 $\angle BYC = \angle CYD$，所以ΔYBC~ΔYCD，因此 **YB：YC=YC：YD**，故 $YC^2 = YB \cdot YD$，亦即 $\overline{YC}$ 為 $\overline{YB}$ 與 $\overline{YD}$ 的比例中項。同時，如果我們將這個程序繼續下去，將可得到一個首項為 $\overline{YB}$，公比為 $\overline{YC}$ 的等比數列。

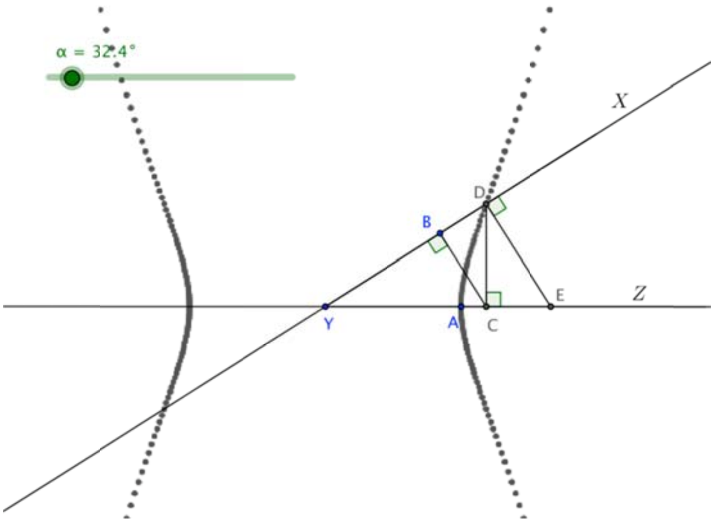
接著，這個作圖器如何解決倍立方問題呢？當 **YB=1** 時，先在木棒 **YZ** 上找到一點 **P** 使得 $\overline{YP}$ **=2**，並依序找出 **C**、**D**、**E** 點，同時調整木棒 **YX** 的旋轉角度，讓 **E** 點與 **P** 點重合，亦即得出 $\overline{YE}$ **=2**（見下圖二）。由於ΔYBC~ΔYCD~ΔYDE，因此 $\dfrac{YB}{YC} = \dfrac{YC}{YD} = \dfrac{YD}{YE}$，當 $\overline{YB}$ **=1**，$\overline{YC} = x$ 時，$\overline{YD} = x^2$，$\overline{YE} = x^3$，所以若 $\overline{YE}$ **=2**，則 $x^3 = 2$，也就是可作出 $\overline{YC} = \sqrt[3]{2}$，因此得以解決倍立方問題。



圖二：GeoGebra 軟體模擬的作圖器過程，可以發現只要讓 YX 旋轉 37.5^0 即可。

不過，笛卡兒的目標不在解決倍立方問題，而是高次曲線的作圖。當我們以 **Y** 為原點，**YZ** 為 **x** 軸時，並設 $\overline{YB} = a$，**D** 點座標為**(x, y)**，笛卡兒告訴我們，利用相似形即可得 **D** 點的軌跡方程式為 $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$；如果同樣的程序繼續作下去，可得 **F** 點的軌跡

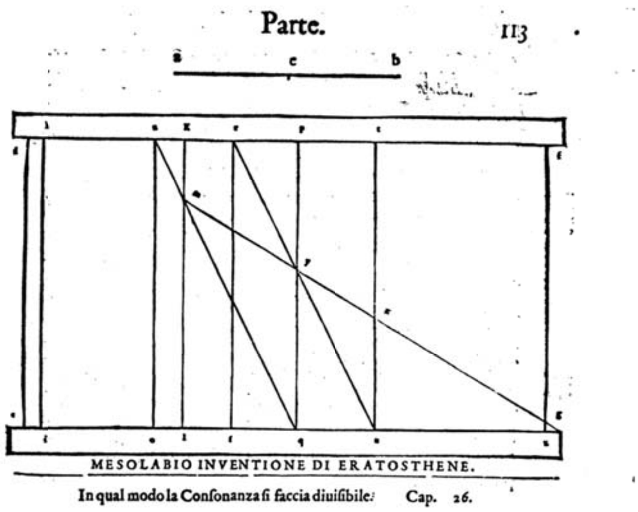
方程式為 $x^8 = a^2(x^2+y^2)^3$。下圖三為 **GeoGebra** 軟體模擬作圖器的操作情形，當 **YX** 旋轉不同角度時，可得動點 **D** 的軌跡圖形，由下面的模擬軌跡圖形也可發現，笛卡兒在圖一中，過 **A** 點所畫出的點點虛線痕跡應該就是 **D** 點、**F** 點或 **H** 點的軌跡。



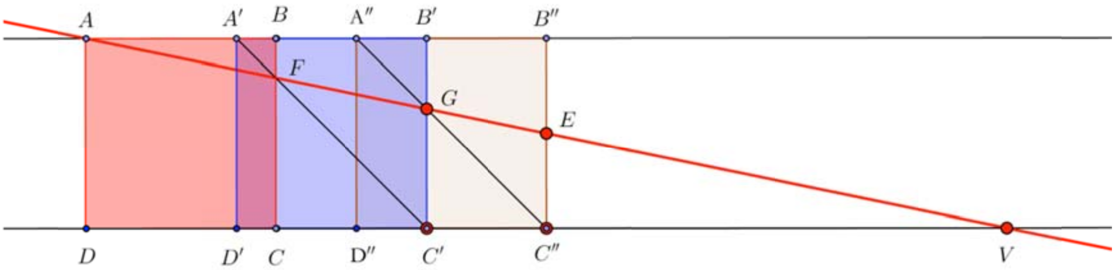
圖三

立方根作圖器與十二平均律

倍立方的問題雖然不能僅靠尺規作圖解決，然而脫去了尺規作圖的限制之後，問題是可解的，數學史家 **I. Thomas** 就在他的 ***Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Volume 1*** 終究蒐羅了古希臘時期包含柏拉圖等的七種作法。其中一類解法為只要能在 **1** 與 **2** 之間，找出兩項使其成等比數列，就可解決倍立方的問題。而要使兩數成比例，一個可行的途徑就是利用相似形，因此尺規作圖無法作出的解，卻可由其他機械作圖裝置作出。如圖四，伊拉托斯尼斯（**Eratosthenes,** 約西元前 **276 – 194**）稱這個作圖器為 **mesolabio**，它可以連續作出兩個比例中項。雖然詳細的操作手冊沒有流傳下來，不過，從圖片與數學原理來看，大致可以了解它是如何運作的。作圖器中有三個大小相同的正方形（其實只要矩形就可以）木框 **ABCD**、**A’B’C’D’**與 **A”B”C”D”**依序疊放（**ABCD** 在最上面），它們的上緣與下緣皆與橫木靠齊，讓正方形在兩個橫木之間移動，先將第一個正方形 **ABCD** 貼齊最左邊，其左上的頂點為 **A**，另一個正方形 **A”B”C”D”**貼齊最右邊，記下最右邊的豎邊 **B”C”**的中點位置為 **E**，以直線連接 **AE**，並與 $\overleftrightarrow{DC''}$ 交於 **V** 點，且與 **A”B”C”D”**的對角線 $\overline{A''C''}$ 交於 **G** 點。接著移動第二個正方形 **A’B’C’D’**，使得 $\overline{B'C'}$ 邊與 $\overleftrightarrow{AV}$ 亦交於 **G** 點，此時 **A’B’C’D’**的對角線 $\overline{A'C'}$ 交 $\overleftrightarrow{AV}$ 於 **F** 點，如圖四。



圖四（上）：出現在 Zarlino 的 *Le istitutioni harmoniche*(1573)一書中的 mesolabio 作圖器



圖四（下）：作圖器 mesolabio 的 GeoGebra 模擬。

在圖四（下）中，令 $\overline{AD}$=**2**，那麼 $\overline{EC''}$=**1**，再設 $\overline{GC'}=x$ ，$\overline{FC}=y$ 利用相似形可得，

$$\frac{AD}{FC}=\frac{FC}{GC'}=\frac{GC'}{EC''}，即 \frac{2}{y}=\frac{y}{x}=\frac{x}{1}，$$

因此可得 $x^2=y$ ， $y^2=2x$ ，即 $x^3=2$ ， $x=\overline{GC'}=\sqrt[3]{2}$ 。

事實上，在 **mesolabio** 作圖器中，只要矩形即可，其數學原理為利用矩形的直角形成直角三角形，再利用對角線形成平行線，以作出一系列的相似三角形，因此，如果把這樣的矩形（或相似的直角三角形）增加個數，就可做出以 $\overline{EC''}$ 為首項，$\overline{GC'}$ 為公比的等比數列。所以，當我們控制第一項 $\overline{EC''}$=**1**，最後一項 $\overline{AD}$=**2**，公比 $\overline{GC'}=x$ 時，如果在中間插入 **11** 項，就可得 $x^{12}=2$ ，亦即可造出在十二平均律中使用的一個半音之弦長。

吾人的耳朵可以聽見聲音的頻率為 **20Hz~20,000Hz** 之間，我們為了互相溝通，必須在這一段相差 **1000** 倍的頻率之間取上名字，即是音階 **Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si** 之類的名字，不過，哪段頻率要叫甚麼音階可不是隨便亂取的。簡單實驗可以發現，同樣的音階（**Note**）（不同音高 **pitch**）會在一段頻率之後重複出現，因此，若將 **C**（**Do**）的頻率

訂為 **k**，高八度 **C** 的頻率會是 **2k**，我們只要考慮在 **k** 與 **2k** 之間怎麼訂出各個音階即可。傳說畢達哥拉斯某天經過一間打鐵舖時，聽到叮叮噹噹相當悅耳的打鐵聲音，往店鋪內一望，發現有 **4** 位師父各拿著重量不同的鐵鎚在敲打，細問之下發現鐵槌的重量比恰好是 **12：9：8：6**，而且他發現當兩個鐵鎚的重量比是 **12：6** 或 **12：9** 或 **12：8** 時，一起敲打所發出來的聲音聽起來會相當和諧。他回去之後，利用了當時的樂器單弦琴（**Monochord**）的弦長做了個實驗，結果發現：

(1) 兩個聲音能夠聽起來和諧悅耳，跟兩弦的長呈簡單整數比有關；
(2) 兩音弦長度比是 **4：3** 或 **3：2** 或 **2：1** 時，兩個音是和諧的。

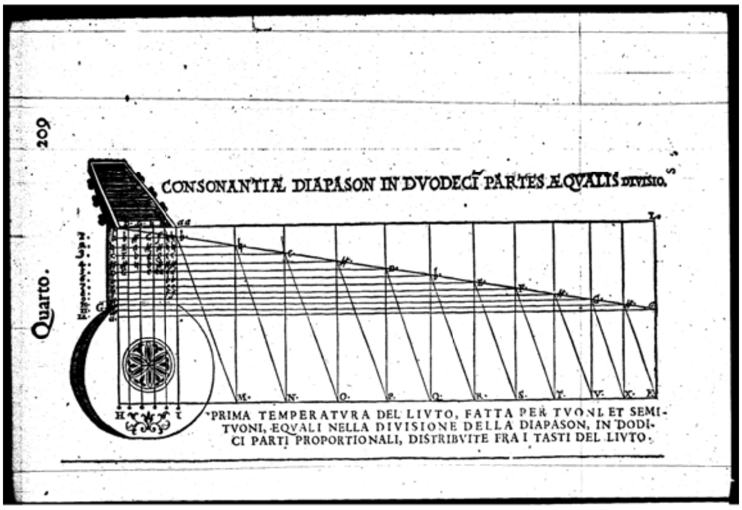
若以現代音樂的理論來說，它們的音程分別是四度、五度和八度。依照畢達哥拉斯所提出的整數比所定出來的音階，稱為畢達哥拉斯音階（**Pythagorean scale**）。物理學告訴我們，聲音發出的頻率和弦長成反比，也就是說，弦長越長，發出的聲音越低，如果發出 **Do** 的音弦長為 **2**，高八度的 **Do** 弦長為 **1**，畢氏音階的中間幾個音階的弦長會形成簡單整數比。

圖五：中世紀的一個木刻畫，圖中畫出了各個音階之間的比例關係

畢達哥拉斯音階本來只有七個音，這七個音沿用了一段的時間，不過不可能七個音之間的弦長比都是「簡單」整數比，在樂器製作上會有些音聽起來會特別「不和諧」。音樂學家忍耐了一段時間之後決定要改革，他們沿用畢達哥拉斯的方法定 **12** 個音，不同的調音方式有不同的比例關係，這些方法一直沿用到 **1510** 年左右。因為有某些不協調音的存在，音樂學家開始調整比例，因而出現所謂平均律（**well temperament**）的調音方式，意指不論彈各種組合、各種調，都不會嚴重不協和的音律系統。現在我們使用

的系統稱為等律（**equal temperament**），亦稱作十二平均律，即將一個八度間的聲音頻率平均分成 **12** 等分，定義出 **12** 個音階。也就是說，若將 **C** 的頻率訂為 **k**（國際標準音高為 **440Hz**），高八度 **C** 的頻率會是 **2k**，而與 **C** 差一個半音的音階弦長即為 $\sqrt[12]{2}$ **k**= $2^{\frac{1}{12}}$ **k**。

圖六出自十六世紀的義大利音樂理論學家與作曲家札里諾（**Gioseffo Zarlino, 1517–1590**）於 **1588** 年出版的著作 ***Sopplimenti Musicali***。札里諾是第一個以數學方式推算當時流行的音樂調式間的音階週期比例關係之人，並以不同於畢氏音階的比例關係創造純律理論。雖然從札里諾書裡的這張圖看來，他似乎已經知道關於滿足十二個半音之間的比例關係之弦長如何找出，然而從歷史上的紀載來看，他只求出音階之間的約略比例而已，在樂器製作上還是有一定難度。十二平均律理論的突破點在於 $\sqrt[12]{2}$ 的正確計算與應用，一直到十六世紀晚期，弗蘭德（**Flanders**，現為比利時的一部分）數學家兼工程學家史蒂芬（**Simon Stevin, 1548–1620**）在一份沒有出版的手稿中記載了 $\sqrt[12]{2}$ 的算法，[4]啟發了義大利音樂學家伽俐萊（**Vincenzo Galilei**），十二平均律的音樂理論才有了一些突破。有趣的是，伽俐萊這位音樂學家曾是札里諾的學生，更是大名鼎鼎的伽利略的父親。



圖六

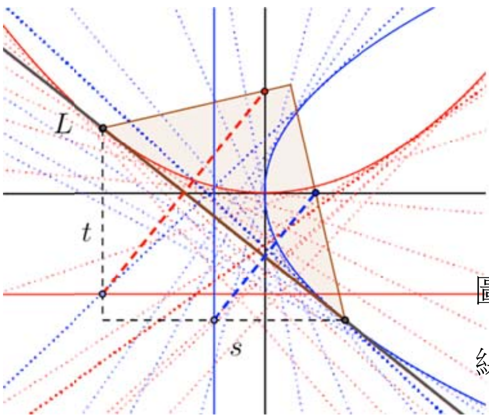
摺紙方法解決倍立方問題

接下來，我們用另一種方法來解決倍立方問題。從上述說明可以知道，倍立方問題的解決，關鍵問題在於求出兩個比例中項 **x** 與 **y**，滿足 $\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2}$，亦即 **x** 與 **y** 滿足 $C_1: x^2 = y$ ，$C_2: y^2 = 2x$ 這兩個拋物線。考慮這兩個拋物線的公切線 $L: y = ax + b$ ，設 **L**

[4] 史帝芬最廣為人知的數學貢獻即是小數點的使用與推廣。在關於十二平均律的計算上，由於他使用之正確位數的不足，在某些弦長的尺寸上還是有些許的誤差。這份手稿寫於大約 1605 年，直到 1884 年才出版。

與 C_1 相切於 $P(x_1,y_1)$，且與 C_2 相切於 $Q(x_2,y_2)$。從 C_1 的角度來看，過 $P(x_1,y_1)$ 的切線為 $xx_1=\frac{1}{2}(y+y_1)$，即 $y=2x_1\cdot x-y_1$，與 **L** 比較係數，可知 $a=2x_1$，$b=-y_1$，但 $x_1^{\ 2}=y_1$，因此可得 $b=-\frac{a^2}{4}$。又從 C_2 的角度來看，過 $Q(x_2,y_2)$ 的切線為 $yy_2=(x+x_2)$，即 $y=\frac{1}{y_2}\cdot x+\frac{x_2}{y_2}$，與 **L** 比較係數，可知 $a=\frac{1}{y_2}$，$b=\frac{x_2}{y_2}$，但 $y_2^{\ 2}=2x_2$，因此可得 $b=\frac{1}{2a}$，但 $b=-\frac{a^2}{4}$，故 $a^3=-2$，其中 a 為公切線的斜率，「−」表示方向，因此公切線 **L** 的斜率即是 $-\sqrt[3]{2}$，也就是說，只要找出公切線，計算它的斜率即可作出 $\sqrt[3]{2}$。

理論說明完畢，接下來就要考慮怎麼用摺紙的方式摺出兩個拋物線和它們的公切線。利用拋物線一點到焦點與準線等距的定義方式可摺出拋物線的包絡線，因而得出拋物線的曲線痕跡，其摺紙方式在網路上已相當盛行，在此省略不提，不過需要注意的是，需要預先想好座標軸的位置，以及計算焦距及各自焦點與準線的位置。摺出兩個拋物線之後，依同樣的方式考慮一條直線摺痕，讓兩條準線上各有一點同時對準各自的焦點，這條直線摺痕就是公切線。圖七為 **GeoGebra** 模擬摺紙過程摺出的結果。



圖七：L 為兩個拋物線之公切線，其斜率為 $-\frac{t}{s}=-\sqrt[3]{2}$

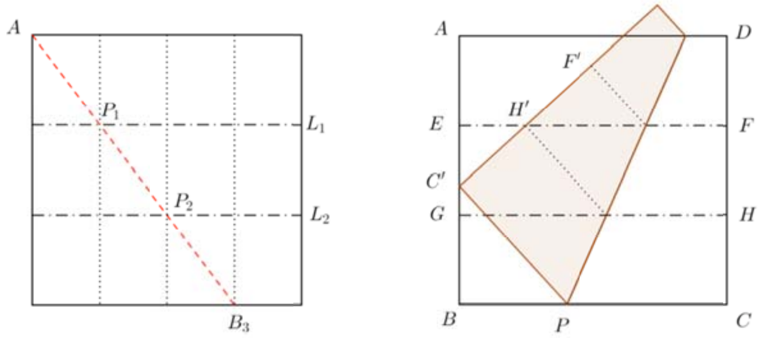
利用摺紙的方式摺出 $\sqrt[3]{2}$ 還有另一種方法，只要先將一張正方形 **ABCD** 的紙三等份，如圖八，接著將 **C** 點往上摺，讓 **C** 點落到 **AB** 邊上（**C'** 點），且 **H** 點落在 **EF** 邊上（**H'** 點），那麼，這個 **C'** 點就會把 $\overline{AB}$ 邊分成 $\sqrt[3]{2}$ ：**1** 的比例，亦即 $\overline{AC'}=\sqrt[3]{2}\,\overline{C'B}$。因為

設 $\overline{AC'}=a$，$\overline{C'B}=b$，$\overline{BP}=c$　那麼 $\overline{PC}=\overline{PC'}=a+b-c$，

在直角 Δ**BPC'** 中，可得 $b^2+c^2=(a+b-c)^2$，展開整理可得 $c=\frac{a^2+2ab}{2(a+b)}$

而在 Δ**EC'H'** 中，$\overline{C'H'}=\frac{a+b}{3}$，$\overline{EC'}=a-\frac{a+b}{3}=\frac{2a-b}{3}$

因為ΔBPC'~ΔEC'H'（AA 相似），所以，此$\dfrac{PC'}{BP}=\dfrac{C'H'}{EC'}$即$\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a+b}{2a-b}$，但$c=\dfrac{a^2+2ab}{2(a+b)}$，代入可得$\dfrac{a+b}{2a-b}=\dfrac{a^2+2ab+ab^2}{a^2+2ab}$，整理即可得$a^3=2b^3$，亦即$\overline{AC'}=\sqrt[3]{2}\overline{C'B}$。



圖八（左）：
利用平行線截比例線段將正方形邊長三等份：
① 先將一邊摺四等分
② 連 AB_3，與四等分摺線分別交於 P_1、P_2
③ 分別過 P_1、P_2，摺出平行線 L_1、L_2，即可將邊長三等份

在尺規作圖的規範下看作圖問題，自有其趣味存在；然而解除限制之後，數學的多元性就天馬行空地蹦發了出來。原來倍立方問題不只是立體體積加倍的問題而已，問題解決的想法、過程都可以應用在各個領域。從倍立方問題的作圖解法，不只看到數學知識彼此間的豐富串聯，也看到數學帶出來的這個世界的多元樣貌。

參考文獻

磯田正美等編著（2009），《曲線の事典》，東京：共立出版株式會社。

Calinger, R. ed. (1995). *Classics of Mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bunt, Lucas N. H. *et al* eds. (1988), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. N. Y.: Dover Publications, Inc.

Thomas, I. (1939), *SelectionsIllustrating the History of Greek Mathematics, Volume 1*. Cambridge: Harvard University Press.

Heath(1896), Apollonius of Peega, Treatise on Conic Sections. Cambridge University Press.

***The geometry of Rene Descartes*, translated by D. E. Smith and M. Latham(1954). New York: Dover Publications, Inc.**

Gioseffo Zarlino's *Sopplimenti Musicali*, 電子書見 https://archive.org/details/imslp-musicali-zarlino-gioseffo

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁、蘇之凡（木柵高工）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）