

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
 王文珮（青溪國中）  
 英家銘（台北醫學大學）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第二十卷 第五期 目錄 (2017年5月)

- 詩數列車—數學詩教學設計分享
- 推薦《數學女孩秘密筆記：  
排列組合篇》

## 詩數列車—數學詩教學設計分享

蘇俊鴻

台北市北一女中

### 前言

筆者應邀分別在國文學科中心和數學學科中心分享這兩年嘗試發展的數學詩課程，意外地這個課程模組引起不小的迴響。因此，將講稿內容重新整理撰寫，希望能與更多的老師分享，在面臨 107 課綱即將上路的時刻，或能提供發展選修課程的參考。

近年來，數學普及的書寫策略，使得「數學敘事」成為數學教師用以增進學生多元理解的可行教學活動，簡言之，透過敘事的方式，讓學生能在脈絡中體驗相關的數學活動，進而增進對數學概念的理解。<sup>1</sup>事實上，數學詩的創作正是一種數學敘事的實作活動，透過創作的歷程，數學概念的運用，必能豐富學生對數學的多元理解。

本文預計分成四個部份：首先，簡略說明數學詩的意涵，方能引領讀者理解整個數學詩課程設計的核心。然而，談到筆者對於數學詩教學的想像，就不能不提及對多數人來說都非常陌生的詩人曹開(1929-1997)，透過他的生平簡介，希望能讓讀者理解數學詩如何成為他顛沛人生中重新定位的重要因素。接下來，則是介紹這套每週 2 節，共三週 6 節課的數學詩課程模組的設計概念，以及裏面的重要課程內容。最後，則是筆者實際課堂實施後的心得分享與教學建議。接下來，讓我們就從數學詩開始談起。

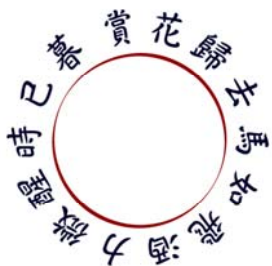
### 什麼是數學詩

十九世紀俄國著名女數學家柯瓦列夫斯卡婭(1850-1891)曾說過：「不能在心靈上作為一個詩人，就不能成為一位數學家。」說明了數學與詩的某種共通性：數學家利用公理

<sup>1</sup> 所謂「數學敘事」係指一種用以溝通或建構數學意義的敘事(narrative)，亦即透過比喻的引進，數學與敘事的結合，得以引發或促進學習者的數學理解。參見洪萬生(2016)。

系統，輔以符號，簡潔地描述數學真理；詩人運用精鍊的文字，創造出豐富意象，抒懷表達人間事。

然而，「數學詩」並非簡單的「數學+詩」，數學和詩如何相融呢？稍加爬梳，便發現前人有著不少嘗試。比如蘇東坡的好友秦少游所寫的重句詩，十四個字排成圓形，呈現出美感和詩趣：



賞花歸去馬如飛  
 去馬如飛酒力微  
 酒力微醒時已暮  
 醒時已暮賞花歸

或者是，宋代理學家邵雍(1011-1077)巧妙將數字一到十入詩，寫成一首通俗自然、適合兒童習算的蒙學詩《山村咏懷》：

一去二三里，煙村四五家，  
 亭台六七座，八九十枝花。

更甚者，直接將數學問題以詩文呈現，下面這首詩取自明代數學家程大位原著，清代數學家梅珏成(1681-1763)刪輯的《增刪算法統宗》(1760)：

三藏西天去取經，一去十萬八千里。  
 每日常行七十五，問公幾日得回程。

由上可見，何謂「數學詩」，自在人心，並無定論。到了現代，新詩更是讓數學與詩的融合表現更加多元自在。例如，詩人詹冰(1921-2004)的圖像詩《三角形》：<sup>2</sup>

【三角形】

詹冰

三邊三角  
 那只是  
 但邊邊相關  
 角角相呼相應  
 充滿朝氣和活力  
 富於積極性發展性  
 再有彈韌性變化無窮  
 角邊角邊角邊循環不息  
 你看色散七彩的稜鏡  
 你看埃及的金字塔  
 數學美學的精華  
 哲學的完美像  
 宇宙精神的  
 神聖象徵  
 哦妳的  
 三角形

<sup>2</sup> 詹冰，本名詹益川，台灣苗栗人，曾任藥師和中學理化老師。早期創作以日文為主，戰後才開始中文寫作，為「笠詩社」的發起人之一。

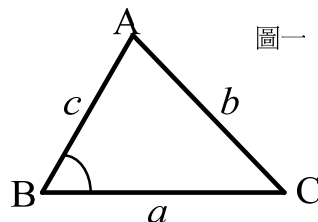
詩人由抽象的數學的三角形，到具體的光學三稜鏡、金字塔建築，最後歸結到完美的女體，涵蓋了數學、美學、哲學和宇宙，十足展現其聯想的功力。

不過，筆者更為喜歡的是張靜年在 2015 年北一女中舉辦數學詩徵選時所寫的作品《如果，可是》：<sup>3</sup>

可是不能把人心用 $\Sigma$ 相加  
 就團結一心  
 可是不能把壞人關進絕對值裡  
 出來後能保正  
 可是不能把所有的汙染乘以零  
 地球就變乾淨  
 可是不能把愛屋及烏用數學歸納法推廣  
 讓全世界相親相愛  
 可是不能把 1% 的財富和 99% 的貧窮相加除以二  
 貧富不均就消失  
 可是不能把你的長處我的短處他的稜角帶入餘弦公式  
 就求出你我他之間該維持的長度

該有多好  
 如果數學在現實中成立

要是數學能在現實中派上用場，也許她所看到人間許多不公不義之事，就能被一一解決。(老師也就不需要苦口婆心勸學生學習數學了!)更可貴的是，她讓許多原本冰冷的數學概念在這首詩中呈現出動人的溫度。比如說，詩中提及的餘弦公式，此一公式係指在一三角形中，若我們知道其中兩邊邊長和所夾的一角，便能求出第三邊的長度。如圖一所示，已知  $a$ 、 $c$  和  $\angle B$ ，則可求出  $b$ ，因為  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 。然而，現實生活中，我們卻無法將你的長處、我的短處和他的稜角直接量化帶入餘弦公式，就能知道你我他之間該維持的距離。作者點出了人際關係難以掌握的困境，也讓我們看見餘弦公式這麼有「人味」的詮釋和使用。當然，我也認為相比代入公式解題，靜年對於餘弦公式的理解是無庸置疑的。



正是這樣的啟發，促使我對數學詩下了這樣的定義：

<sup>3</sup> 張靜年當時是我的高三學生，目前就讀國立成大護理系二年級。

數學詩是指創作者能運用數學概念及其延伸變形，成為意象創造和情景互動的重要元素。同時，也能促進讀者對於數學概念的深刻理解。<sup>4</sup>

也因此，發展這個數學詩課程模組時，就是基於上述的看法，和志同道合的國文老師一起進行課程的教學設計，開始國文與數學跨領域的合作。並且，在資料的收集過程中，詩人曹開的數學詩作品，讓我對數學可以如何與一個人的人生互動有了更深的體認，進而也將曹開及其作品變成數學詩課程的一部份。作為一名詩人，曹開的名聲並不響亮，他出道非常的晚，一直到 59 歲參加「第九屆鹽分地帶文藝營」的文學獎，得到新詩創作第一名，才在詩壇得到注意。就讓我們一起了解數學詩人曹開的生平及其作品。

### 數學詩人曹開<sup>5</sup>

1929 年，曹開誕生於台中州員林郡(現今彰化縣員林)的普通家庭，家中經濟狀況並不寬裕。但曹開自身好學，一路從員林公學校，公學校高等科，到豐原商業專修學校畢業。接著，出於工作謀生的考量，他報考並考取台中師範學校公費生。看似順遂的人生，沒料到，二年後卻迎來最大的風暴，從此身陷其中。1949 年，剛就讀三年級的曹開被控涉入共黨叛亂活動鋸鐺入獄，1951 年轉到綠島服刑，直到 1959 年底刑期屆滿出獄，人生的黃金十年就在監牢中度過。然而，出獄後仍持續受到情治單位的監管騷擾，使得曹開心情難以安穩，一直過著低調且四處搬遷，屢屢更換工作的生活，直到利用獄中學來的醫學知識，在南部鄉下從事醫療行為，經濟狀況才逐漸好轉。後來，他一度移民到阿根廷，卻因風土民情的無法適應，又回到臺灣。最後，1997 年病逝高雄，享年 69 歲。

除了醫學知識外，曹開在獄中還自學數學，以及新詩創作。出獄後，持續不輟的新詩創作成為他苦悶精神上的重要依託，他的創作內容多元，大致可分為數學詩、獄中詩、科幻詩、醫事詩和抒情詩等。其中，最被推崇的是數學詩，曹開一生共創作約 1500 首新詩，數學詩佔有 278 首，開創了數學詩這個類型，因此常被稱為「數學詩人」。<sup>6</sup>

令人動容的是，曹開的數學詩創作真切地與他的人生際遇連結，「並非僅將一連串的數學符號組合而已，而是將人生當成數目，在內化、因式分解之後，再以文字表達出來。」例如，這首《小數點的詩感》：

我一再的認證  
我是人間方程式裡  
最卑微的小數點  
原無意投生在紛雜的函數中

<sup>4</sup> 需要申明的是，這個定義純屬個人，尚祈各位多多指教。

<sup>5</sup> 關於曹開的生平，主要參考王宗仁(2007)。

<sup>6</sup> 曹開鍾情數學詩的創作，有其特殊考量。他認為將大家陌生的數學語彙入詩，在獄中比較不會被羅織罪名，招致殺身之禍。

你不必介意  
更無需憐憫  
你堅持你的算法  
我維護我的向量

用四捨五入的定律  
把我歸納留存也不錯  
將我犧牲拋棄也無不對  
在這加減乘除的公式中

清算競爭激烈的世界裡  
我願承受無情的因式分解  
按公理消去  
彼此的恩怨

人人像數字  
終結都得奔向無窮的零域  
我將達觀的迎接  
—— 那盡頭的自由理想環！

曹開自稱「小數點」，如詩中所言，他認為自己是人間方程式中最卑微的小數點，並無意投身在紛雜的函數中。不過，既然碰上了，渺小的詩人仍能堅持真理，毫無畏懼加諸其身的各式「加減乘除」，將自己歸納留存或犧牲拋棄都可以。因為，無論如何的清算，他總能堅持自我的方向。更難能可貴的是，詩人還願意「按公理消去彼此的恩怨」，懷抱希望迎向盡頭的自由理想世界！展現出對於自身遭遇的豁達和對敵人的寬容。不難讓人看見：透過數學，讓曹開得以身心安頓，堅守理念，維護著那微小的自我尊嚴地存在。

同時，詩人也透過數學訴說他的政治觀察，下面這首《獨裁的數學公式》絕對是其中的代表作，一起來看看：

人間繁分式裡  
他構造一條倒函數  
成為： $\frac{1}{P-1}$   
P=People 代表人民  
在專制的公式裡  
盤鎮於最高層的寶座上  
傲視下界威風凜凜  
獨一無二就是至尊的象徵

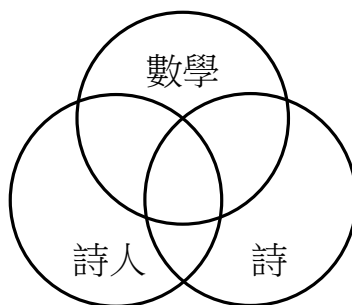
而當 P 值趨向無窮大  
他的價碼趨近零  
要是 P 值趨向極小  
他乃形成負面的數目

仔細想想：詩人所寫出這條代表獨裁者的數學公式  $\frac{1}{P-1}$  非常適切！既具象的表達出「萬人之上」的睥睨神情；卻又諷刺地點出寡頭獨裁的荒謬本質，想要享受權力，就要管理越多的人民，但人民愈多，擁有民主意識的人就愈強，獨裁的地位就益發難保。反之，管理的人民太少，那獨裁有何意義呢？其中的意義和這公式的數學意義完全貼合，是一首很值得數學老師在課堂分享的數學詩。

礙於篇幅的緣故，無法再列舉更多詩例，有興趣的讀者，強烈建議參閱曹開的詩集，更能感受曹開如何將人生感觸的層面與數學巧妙的結合，創作出一首首讓人回味再三的數學詩作。接下來，就來介紹我們所發展的數學詩課程模組。

### 數學詩模組課程內容

整個數學詩課程發展，大約歷經 2 年左右的時間，從找尋志同道合的國文老師協助指導，凝聚數學詩的共識，蒐集相關資料，到教學活動的設計，進行試教調整，最後的目標則是設計出數學老師也能進行教學的課程。數學詩課程由三個模組構成，每個模組都有 Part A 與 Part B 兩個流程，以每週 2 小時，共三週 6 小時教學活動設計。承上所述，課程以「數學」、「詩」及「詩人」為思考設計的面向，設計相關的文本討論及實作內容。



其中，「數學」面向旨在提供數學材料，引導學生認識、熟悉、討論及運用數學原理；「詩」面向旨在提供數學詩的古典及現代面貌，指引學生從詩創作的觀點探索數學概念的可能性和延伸；「詩人」面向則由文本出發，旨在提供人與數學、人與詩創作的關係，提升學生對數學的學習興趣與創意發想。

課程模組一設計次序為「數學→詩→詩人」，重點在於引導學生如何結合數學與文

字，從中展現創意。在 Part A「數學→詩」的單元裡，先以數學猜謎活動暖身，引導學生思考數學數字與文字結合的趣味，其次介紹對聯，以數學運算為材料的對聯，其中的數學趣味及文字嫁接該如何產生，引導學生從中思索數學名詞、四則運算及語文如何相接，進而掌握創作技巧。在 Part B「詩→詩人」的單元中，先以數學理趣開展問題，數學名詞或公式展現了什麼「理趣」？這樣的理趣若要透過文字加以傳達，在新詩創作中可以從何著手？希望引動學生思考這些問題。接著，透過「一行詩」的創作練習，讓學生以數學名詞為材料著手創作，從中觀察新詩創作的重要元素。

課程模組二設計次序為「詩人→數學→詩」。重點在引導學生如何閱讀數學詩，從中領略理趣，並且引導學生探討以數學為材料的詩創作能否發揮詩「言志(人的心志意向)」的傳統。在 Part A「詩人→數學」單元裡，以臺灣詩人曹開的詩作和生平介紹發端，引導學生思考：數學於一個行動受限的人，可以提供怎樣的想像空間及思考解放？藉著一個又一個的數學名詞，曹開如何自我提升，以療癒自己於生活中跌撞而生的千瘡百孔？數學思維如何對身陷囹圄的詩人是一種救贖自我的方法？而對於身陷升學壓力中的高中生而言，數學思維又可以發揮怎樣的功能？閱讀現代詩可以憑感覺，也可以輔以方法，在 Part B「數學→詩」這個單元裡，以鄭愁予的經典詩作《錯誤》為例，透過讀詩、賞詩方法的介紹，為學生提供賞析詩的面向，引導學生理解詩元素的重要，並覺察詩中所言何志。從而為模組三賞析數學詩準備。

課程模組三的設計次序為「詩→詩人→數學」，重點在引導學生如何結合數學與文字，從中展現創意。在 Part A「詩→詩人」的單元中，鼓勵學生以詩意的心靈感受生活，以詩意的敏銳結合數學。新詩是許多人無法進入理解的文學體裁，因此易讓學生產生隔閡，甚至拒之於千里之外，其實生活中處處是詩，只看我們如何捕捉、篩選及加以組織。這個單元中擇取高中生寫作的數學詩進行觀摩，在詩義及寫作手法上都較貼近於課堂中的學生，期能有效激勵學生發想及創作。在 Part B「詩人→數學」這個單元裡，主要在引導學生自行創作。鼓勵學生從「意象」的角度著手創作數學詩，藉由個人創作的二行詩、透過團體創作及修改的過程，讓學生在合作學習的狀況中完成一首數學詩，讓學生體驗數學與詩的結合及美妙。

至於課程教學實施的結果如何？容筆者說明如下。

### 心得分享與教學建議

承上所述，這個課程在高一的數學科特色課程實施過數次，一直還轉動修正的狀態，主要架構大致底定不變，但小細節總在試教後小修小改。學生剛脫離國中階段，對於新詩創作的接觸不多，對於數學詩更是未曾聽聞。但在經過三週的課程後，多數學生在事後的課程回饋中都表示對數學詩留下深刻的印象。就像某位同學寫道：

我覺得數學詩是一個很有趣的事物，是我從未接觸的領域。透過這門課了解到「啊！原來數學跟詩能這般巧妙地結合。」

至於筆者關於課程印象最深刻的部份，則是由國文老師進行教學，筆者在旁見習觀摩的首次課程。當國文老師進行模組三 Part A「詩→詩人」的單元，賞析學長姐的數學詩時，這些高一上的學生想要理解「數學歸納法」、「tan」、「極式」、「無窮等比級數」等等出現在詩中的數學名詞究竟是什麼意義？開始自發性地詢問筆者上述的數學概念，於是筆者只好在黑板上逐一介紹，使得整個課程因而中斷約 30 分鐘。事後，我和伙伴國文老師分享：在我二十多年的數學教學生涯中，那個時刻讓我第一次感受到學生發自內心主動地想要知道某些數學概念，這個經驗讓我非常感動，我想這是讓我持續想要在數學詩的課程上推動的重要原因吧！

當筆者實際進行數學詩課程教學後，我認為整個課程的安排對數學老師來說，沒有太多專業上的困難。事實上，學生在短短的三週課程後，大抵都能實作出數學詩，但通常都還非常的質樸，尚需琢磨再三。因此，沒有點評詩作的需要，只要多多鼓勵學生持續嘗試修改。換言之，經過數學詩的課程教學後，我們的目的，就是想在學生的心中埋下一顆數學詩的種子。

但是，也不能說這個課程全然沒有挑戰之處，就筆者的經驗來看，我認為整個課程對數學老師最困難的地方，應當是課程模組二以鄭愁予詩作《錯誤》進行現代詩的賞析介紹，此處課程真的是國文學科的專業領域，強烈建議此段課程務必多多準備。一個可行的方法，也是筆者所採取的策略：不妨找尋一位伙伴國文老師，以協同教學進行，幾次下來，透過在旁的觀摩學習，累積經驗值，厚植上場的準備。一回生二回熟，相信這個數學詩的課程就能得心應手。

## 結語

在本文中，筆者試圖說明數學詩創作將之課程化的可行性；國文科與數學科跨領域教學相互激盪的可能性。事實上，引發筆者關注數學詩的契機，是來自友校成功高中數學科舉辦多年的數學詩創作比賽。在嘗試性引進北一女舉辦校內高三學生數學詩創作比賽，也獲得不錯的學生作品。同時，也看到學生透過這樣的實作，展現出她們對於數學概念的理解—那些無法經由紙筆測驗得出口頭。因此，才會進一步嘗試將之課程化，落實成為數學科特色課程教學的部份內容。

上述的三個模組課程，正是想要落實數學詩課程的實作，相信透過課程內容、活動設計的解說，應能讓讀者的你有嘗試的衝動吧！或許你會認為這套課程看來更適合國文老師的教學，可能初看課程結構會是如此判斷，但是當深入到數學概念的詮釋和引導時，你將驚訝發現數學老師會更加適合帶領這個課程。

近年來，由於數學普及讀物和數學小說的風行，透過數學閱讀和敘事練習來增進學生多元理解的教學活動變得愈加可行。此外，閱讀和敘事的實作更可訓練學生分享與溝通的能力，作為敘事實作的數學詩創作正是將數學概念落實在溝通時意象表達的可能方式，還記得餘弦公式如何巧妙將你我他之間的關係串連起來嗎！



## 參考文獻

- 王宗仁(2007)，〈數字與人生的結合—曹開數學詩研究〉，《明道通識論叢》第三期。
- 洪萬生(2016)，〈數學敘事與普及閱讀〉，《高中數學學科中心電子報》第 116 期。
- 曹開著，呂興忠編(2005)，《小數點之歌》，台北：書林出版社。

## 誌謝

這個數學詩的模組課程發展，受到北一女中國文教師暨國文學科中心執行秘書陳麗明老師的大力協助，特此誌謝。

編者按：原文刊登於教育部高中數學學科中心數學電子報第 122 期。

## 推薦《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》

廖傑成

新北市立錦和高中

書名：《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》

作者：結誠浩

出版社：世茂出版社

譯者：陳朕疆

審訂：洪萬生

出版資料：323 頁，平裝本，定價新台幣 350 元

出版年月：2017 年 5 月 3 日

ISBN 碼：978-986-94562-2-7



日本数学会出版賞

近期《數學女孩》作品・新系列《數學女孩秘密筆記》排列組合篇  
請在多采多姿的排列組合世界・發現數學樂趣！

### 前言

日本數學科普大師結誠浩，又推出一本適合中小學生閱讀的《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》，真是令人開心！一接觸到本書書名，馬上就了解這次的主題要討論排列組合了。而此一離散數學的主題，恰好又是作者結誠浩的專業領域之一，因此，本書的出版想必有作者精心安排的鋪成，且讓我們沿著作者的腳步，一窺他針對排列組合的知識演示。

此外，我也打算順便將本書連結到 107 課綱，考察其內容如何可以有助於發揮這份課綱的精神。

## 內容提要

你知道什麼是 **Lazy Susan** 嗎？原來就是指中式餐廳會用到的圓盤桌子，這跟排列組合有什麼關係呢？原來作者要以環狀排列當作本書學習排列組合的起點呢！雖然目前台灣現行高中數學教材，已將環狀排列刪除了，但仔細想想，從學習排列組合的次序上，多半是先學習直線排列開始，之後才會有可能講到環狀排列。而這樣的安排似乎比較會在生活中去發想吧，就像去討論家人坐圓桌時的排列狀況，似乎總比討論家人爬山時，誰走先後來得有趣的多！

另外，怎麼說明巴斯卡三角形的數字皆是組合數呢？原來只要先將總數  $n=0$  與取數  $r=0$  的數字 **1** 先做好，再把兩端  $r=0$  與  $n=r$  的情況（也是 **1**）處理好，再將巴斯卡定理

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

證明完畢，就夠了。由巴斯卡定理過渡到巴斯卡三角，這一部分在課本上常常會呈現兩者之間僅是數字關係一樣，而較少提及它們可以這樣嚴密的論證。作者做這樣的安排，為這一特殊三角為何要冠上巴斯卡的名字，提供了一個恰當的解釋。

再來，你真的瞭解文氏圖嗎？

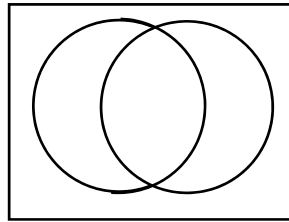


圖 1

如圖 1 所示，請問可以構造出多少個子集合呢？作者先是利用時鐘有 1 至 12 的整數特性去討論哪些是 2 的倍數？哪些是 3 的倍數？一路引導讀者，其中的邏輯概念：是 2 且是 3 的倍數、不是 2 也不是 3 的倍數等等問題。並以圖 1 的文氏圖詢問可以如何劃分其中的子集合，並以敘述或是集合表達法說明自己的發現。誠然，一開始若以這樣的題目來問學生，學生沒學過計數或是對數（ $\rho \times \sim$ ）數（ $\rho \times \backslash$ ）沒特別感興趣的，不是被嚇到，就是懶得計算；而熱愛算數的則馬上開始歸類計算。但如此一來，這樣的問題似乎就少了一些興味在裡頭了。作者安排集合表達式，並將「且」與「或」的運用，及笛摩根定理鋪成在這一問題中，慢慢地拉著用邏輯做成的魚餌，逐步引導讀者隨著書中女主角由梨的思路，將集合表達式與文氏圖的關係釐清，並捕獲計數方法與二進制及取捨原理這樣一條大魚。

最後兩章，則是作者將圓桌問題繼續延伸成握手問題，並從六人坐一桌推廣至  $n$  人坐一桌的握手問題。作者試著從規律中發現遞迴關係式，並從中闡述組合中重要的卡特蘭數 (Catalan Numbers)。不過在這裡，作者藉由書中的另一女主角蒂蒂，提出「不區分」就是看數目；「不重複」就是 at most one，最 (至)多一個；「至少一個」即 at least one

等的計數重要名詞，提醒讀者需得釐清所面對的問題意思。而最後作者安排另一個重要主題即第 2 類 Stirling 數，給有志於學習排列組合的讀者，做一個「跳躍性」的挑戰。

## 排列組合簡史<sup>7</sup>

世界上組合規則最早的紀錄由印度人給出，例如，在公元前六世紀，蘇斯魯塔〔Susruta〕的醫學論文中指出，從苦、酸、鹹、澀、甜和辣六種不同的味道中分別取 1, 2, 3, 4, 5, 6 種的組合方法有 63 種。即

$$C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 = 63$$

而第六世紀的瓦拉哈米希拉〔Varahamihira〕在其著作則給出了一個較大的組合數，若從 16 種成分中取 4 種組成一種香料，則有 1820 ( $= C_4^{16}$ ) 種。在他的著作中利用類似推導巴斯卡三角的方法，逐一得到這些組合數。

不過，在九世紀的馬哈維拉〔Mahāvīra〕給出了計算組合數的詳細方法，以現代的組合數表示，即是如下：

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

但是，他並沒有提出任何證明。他將這一法則利用在兩類問題，一是像前人一般計算調味品的組合數；另一個則是計算項鍊上寶石的組合數。

十二世紀的婆什迦羅二世〔Bhāskara II〕在瑪哈維拉〔Mahāvīra〕的基礎上進一步指出，這是一個普遍成立的法則，可用於計算詩歌中的音步變化、建築藝術中的開門變化、……、醫學中的調味組合問題。婆什迦羅〔Bhāskara〕也計算了  $n$  個元素的排列數是  $n!$ 。

## 107 課綱的排列組合

由於 107 課綱將於 108 年實施，故筆者將未來高中數學的排列組合學習內容列於下，供讀者參考：

- ※ 為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。
- ★ 須為教學內容，建議不列為評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。
- # 不必設置獨立的教學單元一起教完，融入適當課題，在合理的脈絡中教授。

<sup>7</sup>參考並重編 Victor J. Katz 的《數學史概論》。

編號	學習內容	學習內容補充
N-10-7	邏輯：認識命題及其否定，兩命題的或、且、推論關係，充分、必要、充要條件。★#	
D-10-1	集合：集合的窮舉與描述式定義，字集、空集、子集、交集、聯集、餘集，屬於和包含關係，文氏圖。★#	連結在區間與不等式解區域的經驗，適度銜接國中經驗，例如：以四邊形作為集合運算的範例。
D-10-3	有系統的計數：有系統的窮舉，樹狀圖，加法原理，乘法原理，取捨原理。直線排列與組合。	此處的排列與組合，以供應古典機率之所需為教學目標；應包含二項式展開作為組合的應用範例。

這份課綱大致上與 99 課綱的排列組合無太大的差異，除了邏輯與集合部分為 #，即不必設置獨立教學單元外，其他部分則沒有什麼不同。

### 利用本書安排數學小活動

1. 試著將 3 人做一圓桌的情形列出來。(在練習至 4 人、5 人情況)，討論圓桌一般化、項鍊情況。
2. 討論文氏圖分隔情況 2 個子集，與 3 個子集情形，(推論一般化)。
3. 圓桌握手情況，討論遞迴式，介紹卡特蘭數 (Catalan Numbers)。
4. 完成集合分割表，介紹第 2 類 Stirling 數

$n \begin{smallmatrix} r \\ \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2			0	0	0
3				0	0
4			6		0
5					

### 結語

本書提供了重新審視排列組合的視野，除了以環狀排列引起動機外，作者也從組合數開始介紹巴斯卡三角，再一步步討論邏輯概念、文氏圖，之後再延伸卡特蘭數與第 2 類 Stirling 數。而在書末，作者亦提供進階問題留待讀者挑戰。這種安排方式，似乎與日本江戶時期的特有數學文化和算中的遺題繼承有些類似，不知作者是否有這樣的意圖。但無論如何，正所謂「師父領進門，修行看個人」，作者除了給初學者有一些排列組合的概念外，對於有想要挑戰的讀者，亦安排了值得試試看的進階題。總之，本書老少咸宜，不論您是喜愛數學的還是對數學有一些畏懼感的，一起來感受數學女孩的魅力吧。

## 小更正

本書 114 頁與 115 頁介紹：

《是 2 的倍數》且《非 3 的倍數》的集合…的補集合。

書中的「我」解釋成

《非 2 的倍數》且《是 3 的倍數》的集合。

事實上，根據笛摩根定理應為「或」才對。即

《非 2 的倍數》「或」《是 3 的倍數》的集合。才對，供讀者參考。

## 數學小語

在每章的開頭與結尾，作者都獨具匠心地安插會心小語，串連整章的主題，筆者在此將其書寫於下，供讀者細細品味。另外將波利亞的解題思路列於之後。

第一章 排成一列，比較容易數

若沒有排成一列，是否算不出來呢？

第二章 若不想像具體事例，則容易受假象所蒙蔽

若不想像一般化狀況，則看不見夢幻情景

第三章 你我有何共同點？

你我有何相異點？

第四章 若我牽著你的手，那麼你也會牽著我的手

即使你放開我的手，我也不會放開你的手

第五章 為了繪製地圖，一起去看看這個世界吧

為了多了解這個世界，一起來繪製地圖吧

解題就像游泳，實際操作才會明白。而需要實際操作的技術，則需要模仿與練習才能牢記。波利亞(George Pólya)

仔細閱讀題目了嗎？

能試著舉一個例子嗎？(舉例說明，驗證自己是否理解)

能試著作圖嗎？  
能整理成表格嗎？  
能為未知事物命名嗎？  
是否考慮到所有狀況？沒有遺漏？  
有沒有類似的東西？  
會不會覺得「如果那樣就好了」？  
反過來想又會怎麼樣呢？  
如果數字太大，想想看數字小的情況怎麼樣？  
看極端的情形又怎麼樣？  
再重新仔細閱讀一次題目

### 參考資料

Katz, Victor J. *A History of Mathematics An Introduction 2<sup>nd</sup>*. Pearson, 2004。

結誠浩，《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》，世茂，台北，2017。

教育部，《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》(107 課綱)。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印備用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

#### 《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁、蘇之凡（木柵高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥、林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）