HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二卷 第六期 目錄(1999 年 6 月)

HPM 隨筆（三）：數學哲學與數學史

洪萬生
臺灣師範大學數學系教授

「數學哲學」（philosophy of mathematics）當然與「數學史」（history of mathematics）有關！它們的關聯受到矚目，大概可以追朔到七十年代。當時數學哲學家 Imre Lakatos 追隨 Karl Popper，開始注意到被邏輯實證論（logical positivism）所忽略的「發現的脈絡」（context of discovery）對知識成長的重要性，遂將數學史結合到數學哲學的研究之中。此外，Lakatos 也十分關心數學教育，他希望數學史融入數學哲學所引出的「擬經驗論」（quasi-empiricism）觀點，最終可以對數學教育作出貢獻。

首先，且讓我們就「數學哲學」與「數學史」各自的學術目的來討論。為了達到此一目的，學術研究的對象與方法，就會逐漸地形成它們的獨特性，也因而劃定了該學門的邊界。這種「各自為政」的狀態，當然也成就了各自學門的自主性（autonomy），從而為各自學門的知識本位（knowledge status / claim）訂下了互異的規範。譬如數學與物理學的邊界十分清楚，所以，「數學真理」（mathematical truth）與「物理真理」（physical truth）當然不同，而區別它們的的方法自然也就容易被凸顯出來了。於是，利用方法論的判準來劃分學門的邊界，就被認為是一種極自然的考慮。譬如說吧，邏輯實證論者，就將非形而上的知識分成經驗的（empirical）與形式的（formal），前者包括了科學（自然的與社會的）與人文學，後者則包括了數學與邏輯。對它們而言，數學與物理學當然不同，因為在「核證的脈絡」（context of justification）中，前者所使用的方法 -- 依據假設的一種演繹過程，就不同於後者之仰賴觀察、實驗等經驗手段。不過，這種分類法則目前已經受到很大的質疑。在數學的知識活動中，或許它的「發生」（genesis）過程所蘊含的動態面向與經驗成分，也會影響它的知識本位，職是之故，擬經驗論者如 Lakatos 所開出數學知識之經驗關懷，其中企圖含攝數學知識的演化過程（亦即數學史之關懷所在），當然很容易理解了。

然而，照傳統的知識分類來說，歷史與哲學畢竟不同。如何面對哲學本體論問題受到它的歷史演化因素的滲透，比方數學物元（mathematical entities or objects）如函數（function） 的本質，大概是純哲學研究再也無法迴避的問題了。或許這也促成 Lakatos 改寫康德（I. Kant）並廣被傳頌的一句話：「數學史一旦缺少了哲學的引導，便是盲目的；至於數學哲學，要是對數學史中最引人遐思的現象不

理不睬，那麼，它便是空洞的。」(the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy has become blind, while the philosophy of mathematics turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, has become empty.）[引自 Ernest 1991, pp. 24-25] 基於這種歷史關懷，我們可以對照數學哲學的傳統問題。嚴格來說，它是傳統知識論（epistemology）的特例，主要關懷下列問題：數學知識的基礎何在？數學真理的本質為何？又是哪些條件刻劃了數學真理？它們的結論之核證又是什麼？數學真理何以是必然的真理（necessary truth）?[Ernest 1991, p. 3] 現在，如果要在數學哲學問題討論中為數學史留下一個位置，那麼，問題意識或許可以指向：

（1） 數學知識：它的本質，核證與發生（genesis）

（2） 數學物元或對象：它的本質與起源（origin）

（3） 數學的應用：它在科學，技術與其他領域中的效用（effectiveness）

（4） 數學的實際運作（mathematical practice）：數學家的知識活動，包括現在與過去。[Ernest 1991, p. 27]

Ernest 利用以上述判準，來映照數學哲學中的學派如邏輯學派，直觀學派，形式學派，柏拉圖主義（Platonism，代表人物如 Frege），約定主義（conventionism，代表人物如 Wittgenstein），（樸素）經驗論（"naive" empiricism，如 Mill）以及擬經驗論，一一檢視它們各自主張及論述的不足[Ernest 1991, pp. 23-24]，接著，他針對社會建構主義（social constructivism）作為一種新的數學哲學之可能性，提出深入的討論，尤其著重相關的主觀知識（subjective knowledge）與客觀知識（objective knowledge）之反省。最後，Ernest 結合了數學史，數學社會學與數學心理學，提出數學的社會建構主義式之後設理論（social consturctivist meta-theory of mathematics），來取代傳統的數學哲學。[Ernest 1991, pp. 42-108]

關於 Ernest (1991)一書中的相關討論，我們希望將來提供專文討論。在此只想指出，不管是擬經驗論也好，社會建構主義也好，乃至於數學的社會建構式之後設理論，都十分強調數學知識的經驗成分，也因此，數學史對這些新的數學哲學主張之論述，乃成為不可或缺。

數學知識活動固然有哲學問題，當然也有歷史問題，它貫穿了知識演化的縱軸。這也就是說，歷史一定跟時間有關，它用一個時間的維度，將這些知識活動填進去。從傳統的知識論觀點來看，數學知識是永恆不變（eternal or timeless）的東西，它在宇宙誕生時也就被創造好擺在那兒，然後就等著我們去發現。因此，如果歷史知識是關於變化（change）的一種學問，那麼，數學史所為何事，就很值得我們推敲了，因為數學知識要是與時間無關，那麼，它的本質自然就沒有歷史問題了。如此一來，數學史的研究，比如研究函數的歷史，首要任務無非是確立函數的定義（definition），以便說服我們自己「它」的確貼近函數（概念）的本質，然後，以此種終極關懷為唯一目的，歷史上凡是朝此一方向前進的數學研究成果，就都是函數史（the history of function）的恰當內容。於是，數學史就變成揭示造物主偉大 -- 因為祂創造了偉大的數學 -- 的一項神聖「理性重建」（rational reconstruction）工程了。從而，數學史研究就淪落成為數學大師造廟的一種學術活動，主要任務莫非是為那些大師的經典作註腳。

當然，從這樣的觀點來看，數學史的研究也算是對數學知識活動的一種意義賦予（sense making）。不過，在這種情況下，「數學」與「數學史」這兩者的知識活動好像沒有太大的差別，它們都是目的論式的揭示（teleological revealation），亦即它們都亦步亦趨地走向造物主所規劃好的最後真理之途徑上。數學史家想要從這樣的先天設限中解放出來，必須面對柏拉圖（Plato）對數學所做的先天設限，然後在學習如何去問恰當的歷史問題。

根據柏拉圖的看法，數學知識是存在於理想世界（ideal world）的一些「形式」（form）或「理念」（idea），譬如三角形就是一個形式，它在吾人的肉體所生存的物質世界（material world）是沒有指涉物或參考物（referent）的，亦即一塊三角形狀的餅乾並不是「三角形」所指涉的物質（referred matter）。基於此一假設，學習當然是一個「再發現」（re-discovery）的過程。說得更明確一點，柏拉圖認為吾人生而有知，學習是一個吾人的靈魂（soul）喚醒或收集（recollect）本有記憶（memory）的過程。柏拉圖曾安排蘇格拉底（Socrates）與米諾（Meno）家一位奴隸男孩的對話，以「求作一個正方形使其面積是已知正方形面積的兩倍」為例，說明未受過教育的男孩可不學而能，至於教師（蘇格拉底）的角色，則只是引導或啟發而已。（參見柏拉圖的對話錄【米諾】（Meno））在此一脈絡中，柏拉圖顯然呼應了蘇格拉底的產婆式教學法，產婆（比喻教師）只是協助產婦（比喻學生）生出嬰兒（知識），她並不是知識的傳送者。

不過，如何喚醒孩童本有的知識，柏拉圖並沒有提供可行的方法。誠然，數學的訓練，無非是協助吾人擺脫物質世界的糾纏，而將靈魂或心靈（mind）（對柏拉圖而言，這兩個名詞通用）提升到理想世界，去把握永恆不變的形式或理念。然而，如何達到此一目的，柏拉圖並沒有提供任何經驗手段。相對地，亞里斯多德就務實多了，他認為吾人經驗可及的一塊三角形餅乾（亦即「物質」）內蘊了三角形的「形式」，因而，吾人心靈通過與三角形餅乾之類的物質之互動，應該有可能領會或理解三角形這一形式或理念的。其實，亞里斯多德也認為三角形這種數學「物元」（mathematical objects）是從三角形餅乾這樣的「物質」抽象而來，對於「物元」與「物質」兩者的關係，他尤其說得極為明白：「當我們考慮數學物元時，我們是將它們看成好像與其物質分離，雖然事實上並非如此。」[引自 Heath 1980, p. 11]

上述亞里斯多德的數學認識論，建立在他的本體論假設上。他認為數學知識是介於形上學（meta-physics）[或第一原理（the first principles）]與物質世界（或物理世界，physical world）之間的橋樑，換句話說，數學溝通了柏拉圖的形式與物質。儘管亞里斯多德將數學的本體論地位（ontological status）紓尊降貴了下來，但是數學因而可與吾人經驗結合，也為凡夫俗子可以學習數學打通一條途徑。從這個觀點來看，歐幾里得在【幾何原本】第一冊中為「直線」定義（Definition 4）提供工匠經驗的比喻，意在模仿亞里斯多德的認知方法，殆無疑問。[Heath 1956 vol. 1, p. 153] 迥異於柏拉圖，亞里斯多德重視物理世界及其蘊含的數學知識，大大地強調了數學知識的經驗成分，同時也暗示我們在教育的過程中，學習者主體以經驗手段接觸客體，從而對客體所蘊藏的數學物元有所發明。換言之，對亞里斯多德而言，學習比較像是一個再發明（re-inventing）的過程。這是古希臘數學哲學對於現代數學教育最有貢獻的一個主張，值得我們深入研究。

從上述柏拉圖與 亞里斯多德的對比，可見數學哲學的立場，不只影響數學知識的認知方式，同時此一立場對經驗知識的重視程度，也決定了知識活動的歷史面向之可能性。由此看來，亞里斯多德

的觀點，為數學史與數學哲學的結合，預留了比較大的空間。所以，我們必須注意：並不是所有的數學哲學立場都為數學史留下位置！如果一味地認為數學概念是一種先驗的（先於經驗，a priori）柏拉圖形式（Platonic form），那麼，不只是數學史的研究走不出為數學大師作註腳的窠臼，數學史與數學哲學因結合而互惠的期待，也會完全落空！尤其是今日主導數學史學的社會史取向（socio-historical approach），由於浸潤了數學與社會互動的豐富面貌，也會跟那種狹隘的數學哲學論述，絲毫沒有任何交集。

儘管如此，數學哲學與數學史畢竟是彼此獨立的學門（discipline），它們各自擁有亟待完成的學術目標。而且，它們各自研究成果之深化，也一定會對數學教育研究，帶來深遠的影響與助益。我們固然不能期待數學哲學家對數學史一定深情款款，同理，也不能要求數學史家必須懷抱普適的的哲學思考。如果，數學教育研究者與工作者在選擇了適當的哲學立場之後，發現數學哲學與數學史的結合，是必須優先面對的問題時，那麼，除了親自「下海」去研讀這兩門學問的基本知識之外，大概就別無他途了。

參考文獻

1. Brown, Harold 1977. Perception,Theory and Commitment: The Newphilosophy of Science. Precedent Publishing, Inc.
2. Ernest, Paul 1991. The Philosophy of Mathematics Education. London: The Falmer Press.
3. Heath Thomas 1956. The Thirteen Books of Euclid’s Elements. New York: Dover Publishing Co.
4. Heath, Thomas 1980. Mathematics in Aristotle. New York & London: Carland Publishing, INC.
5. Hempel, Carl 1966. Philosophy of Science. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
6. Maziarz, Edward A., Thomas Greenwood 1968. Greek Mathematical Philosophy. New York: Frederick Ungar Publishing Co.
7. Tymoczko, Thomas ed., 1986. New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology. Boston: Birkauser, Inc.

埃及和印度的乘法

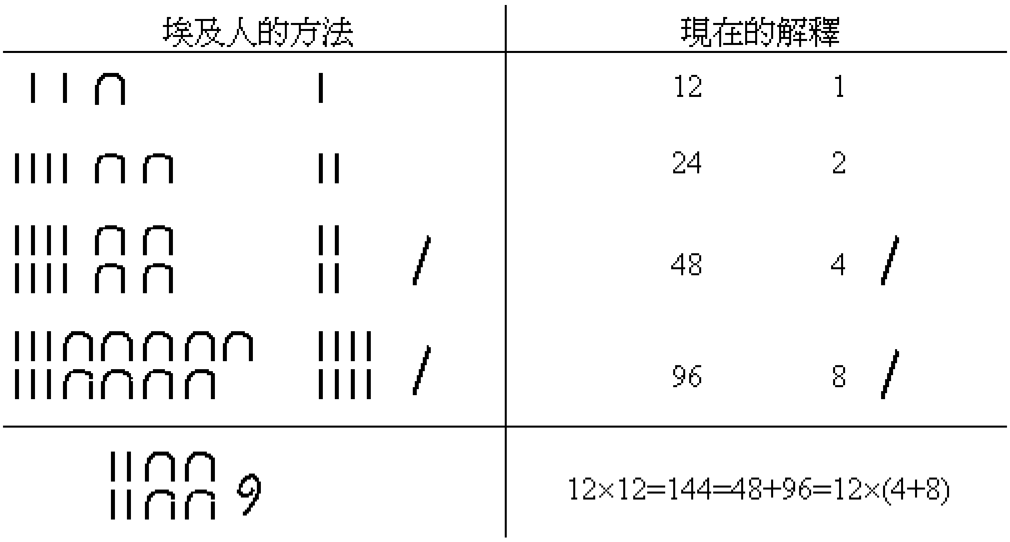
林倉億老師

長安國中

以下介紹了古代埃及和印度各兩種數的乘法，僅管第二種乘法優於第一種，但並未完全取代之，而是視情況採取不同的方法，這與我們今天有一些所謂〝速算法〞的情形相同。筆者深深認為，一種新算法的提出，代表該民族在數的性質的探索上，開啟了嶄新的一頁，而新的方法無論是在生活、政治甚至文化上都有深遠的影響。相對地，每當一個人學會了一種新算法，代表拓展了自己對數的視野，對數的感覺也會有更進一步的提升，而這也是台灣莘莘學子十分欠缺的。

埃及

例一：$12\times12=144$



此法便是古埃及人最常用的方法，本質上是利用加倍與加法這兩種運算來做乘法，操作者只要明瞭符號所代表的意義及逢十進一的規則，就能輕鬆的算出答案。除了採取加倍外，埃及人有時候也會採取乘 10 倍，這只是將符號改為大一級的符號即可，例如：

甚至再將符號數減半即可得到乘 5 倍！

例二：$83\times154=12782$

埃及人的方法	現在的解釋
83 154 / 41 308 / 20 616 10 1232 5 2464 / 2 4928 1 9856 /	83×154 $=(41\times2+1)\times154$ $=41\times308+154$ $=(20\times2+1)\times308+154$ $=20\times616+308+154$ $=10\times1232+308+154$ $=5\times2464+308+154$ $=(2\times2+1)\times2464+308+154$
83×154 $=154+308+2464+9856$ $=12782$	$=2\times4928+2464+308+154$ $=9856+2464+308+154$ $=12782$

例二便是另一種埃及人做乘法的方式：右邊加倍，左邊減半(若有餘數則捨去不計)，若左邊的數是奇數，則將其右邊的數相加。

一般常用代數的分配律來看待此法，筆者卻認為這樣將失其原味！嚴格來說，當時的埃及人只會做加法，其乘法可說是另一種加法，所以用乘法對加法的分配律來解釋並不恰當。在考量埃及人的記數法後，筆者認為應採取下面的解釋較為適當：

埃及人的方法	解釋(為方便起見採實物解釋)
83 154 /	有 83 堆穀物，每堆有 154 單位
41 308 /	每兩堆併成一堆，則有 308 單位的 41 堆，154 單位的 1 堆(以後合併排除此堆)
20 616	每兩堆併成一堆，則有 616 單位的 20 堆，308 單位的 1 堆(以後合併排除此堆)
10 1232	每兩堆併成一堆，則有 1232 單位的 20 堆
5 2464 /	每兩堆併成一堆，則有 2464 單位的 5 堆
2 4928	每兩堆併成一堆，則有 4928 單位的 2 堆，2464 單位的 1 堆(以後合併排除此堆)
1 9856 /	每兩堆併成一堆，則有 9856 單位的 1 堆
83×154 $=154+308+2464+9856$ $=12782$	最終有 154、308、2464、9856 單位各一堆，故共以穀物 154+308+2464+9856=12782 單位

埃及乘法在教學上的應用

筆者曾在教乘法對加法分配律時(國一)引入上述兩種古埃及人的乘法，並以糖果取代穀物來解釋例二，結果學生反應相當熱烈，不但十分佩服古埃及人的智慧，也不再覺得分配律只是一種詰屈聱牙的口訣。

印度

例一：$88 \times 96 = 8448$

印度人的方法		現在的解釋	
數字	虧數	數字	虧數
88 96	12 4	$X-a$ $X-b$	a b
84	48	$X-a-b$	ab
因此得 $88 \times 96 = 8448$		$(X-a)(X-b) = X^2 - aX - bX + ab$ $= X(X-a-b) + ab$ $= 88 \times 96 = (100-12)(100-4)$ $= 100(100-12-4) + 4 \times 12$ $= 8400 + 48$ $= 8448$	

例二：$1038 \times 1006 = 1044228$

印度人的方法		現在的解釋	
數字	盈數	數字	盈數
1038 1006	38 6	$X+a$ $X+b$	a b
1044	228	$X+a+b$	ab
因此得 $1038 \times 1006 = 1044228$		$(X+a)(X+b) = X^2 + aX + bX + ab$ 1038×1006 $= (1000+38)(1000+6)$ $= 1000(1000+38+6) + 38 \times 6$ $= 1044000 + 228$ $= 1044228$	

例三：$128 \times 89 = 11392$

印度人的方法		現在的解釋	
數字	盈數；虧數	數字	盈數；虧數
128 89	28 11	$X+a$ $X-b$	a b
117	308	$X+a-b$	ab
$117-4$	$400-308$	$X+a-b-N$	$N \times X - ab$
113	92		
因此得 $128 \times 89 = 11392$		$(X+a)(X-b) = X(X+a-b) - ab$ $128 \times 89 = (100+28)(100-11)$ $= 100(100+28-11) - 28 \times 11$ $= 11700 - 308$ $= 11392$	

讀者會發現，一旦相乘的兩數並不靠近10^n（例如 47×43），或者位數不同（例如147×43）時，利用此種算法便不會比較簡便，所以印度人有另一種算法。

例四：$136\times53=7208$

1		3		6
0		5		3
0	[0+5]	[0+3+15]	[30+9]	[18]
[0]	[5]	[18]	[39]	[18]
	7	2	0	8

此法可以說是我們現今所用直式乘法的前身了！

印度乘法在教學上的應用

在乘法公式的單元裡，我們往往會〝利誘〞學生，說乘法公式可以幫助我們快速地做乘法，不過學生（甚至我們本身）往往都會覺得，乘法公式似乎只對這一單元的題目（特別設計過的）才有用，至於在其他單元或是在日常生活中，就可遇不可求了。筆者相信，若能適當地引入第一種方法，對學生的〝利誘〞效果將更為顯著，再輔以一些印度數學史的簡介，或是一些印度數學史的趣味小故事，如此學生便不再覺得乘法公式只是一個冷冰冰的代數式，而會更多了一種文化上的視野，由此必能激起學生對乘法公式的興趣，進而獲得更好的學習效果。

埃及與印度乘法的比較

以現今的眼光來看，當然會覺得古印度的乘法優於古埃及的乘法，不過由於兩者的年代與發展背景並不相同，所以孰優孰劣的比較並不公平，也沒有什麼積極的意義。不過我們可以看出，印度乘法最主要的優勢來自於印度的記數制度已經發展到了位值制，這可以說是人類文明的一大進步，印度阿拉伯數碼及位值制在傳入歐洲後，無論在數學發展上或是社會、文化、政經等各方面都產生了巨大的質變，至今我們仍深受其影響。

結語

數學史在課堂上的使用除了講故事外，介紹一些古代的方法或想法也是不錯的一種方式，縱使那些方法(相較於現今數學而言)是較不進步的，甚至是荒誕的，但只要能適當地引入、安排，激起學生的思考，培養學生的文化視野、關懷，對於學習都有正面積極的裨益。

筆者原本還打算與讀者分享中國古代如何用算籌做乘法，不過限於篇幅，無法完成此計劃，這部

分相當值得一窺究竟，有興趣的讀者可以參看李儼、杜石然著的《中國古代數學簡史》，九章出版社，若能透過此刊物與大家分享，那就再好不過了！

參考資料

1. Joseph, G.: 1991, The Crest of The Peacock: Non-European Roots of Mathematics, England: Penguin Books.
2. Bunt, L. N. H. et al. : 1988, The Historical Roots of Elementary mathematics. New York: Dover Publications, Inc.

對數隨筆

洪誌陽老師

竹北高中

三月下旬參加了學校的一場實習生的教學觀摩會，上課內容是對數的首數與尾數的應用。他的處理很“標準”，是利用課本的例子：估算 2^{30} 是幾位數及最前面一位數字是多少來做討論的。處理很簡單，只要將其取對數即可：

$$\log 2^{30} = 30\log 2 = 30\times 0.3010 = 9.030$$

因為首數是 9，所以 2^{30} 與 10^{9} 同級，是十位數。而尾數 0.030 介於 $0=\log 1$ 與 $0.3010=\log 2$ 之間，所以最前面一個數字是 1。其實我們可以知道的更多。利用課本後面的對數表可知

$$\log 1.07 = 0.0294 < 0.030 < 0.0334 = \log 1.08$$

所以 2^{30} 大約是 $1.07...\times 10^{9}$。

不過大部分我們都沒有處理誤差的問題。譬如說，上列的估計值前三位都對嗎？似乎就沒有一定的把握(當然在這個例子中是正確的)。我們其實很容易找到例子是首位數字(甚至連位數都)會發生問題。例如：2^{1000}

$$\log 2^{1000} = 1000\log 2 = 301$$

的尾數竟然是 0，當然不可能。這很明顯是因為我們使用的 0.3010 只是 log2 的四位近似。以我自己的經驗而言，學生對誤差的意義是不重視的，雖然我們很容易舉例子讓他們相信(註一)。我們在教學的過程中，若能在這裡舉些例子讓學生思考產生衝突，再讓他們自己解決，應該是一個機會讓他們體會在做估算時，誤差控制的重要性。

這裡還有一個問題，其實學生不見得有興趣去估算 2^{30}。我們要如何給予這個例子動機化？在這裡我倒覺得 2^{64} 比 2^{30} 好，因為至少我們在第一冊講過一些關於 2^{64} 的故事(雖然它比 2^{30} 難算)。利用折紙來舉例也很好：

假設一張報紙厚 0.01 公分，請問對折 12 次後多厚？(註二)

我只是想說，學數學的人會自然認為數學問題是有意義的；但對一般人而言，吸引力不見得很大。佛經上講：先以欲勾牽，後令入佛智。教學亦然，以適當的情境或問題引入討論，是數學老師要時時記在心上的。

從歷史來看，對數的出現是為了簡化計算的，甚至在這個世紀初，對數尺仍然是重要的計算工具。

基礎數學的提法是定義對數之後，先講運算性質，再用函數的觀點切入討論，然後再講對數表。這種講法當然是數學家們心中的理想邏輯順序。不過邏輯上的為什麼常常不是心理上的為什麼。對一個學習者而言，一個真實或擬真實(註三) 的情境，常常對他們的啟發更大。例如我們可以先造一個簡單的對數表：

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}	2^{9}	2^{10}
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

先利用它計算32×64，$\frac{1}{8}\times 512$等，再問$3\times 25=$？，自然而然會提出 3 是 2 的幾次方 (a是b的幾次方) 的問題。這樣可以讓對數定義的提出變的很合理。

對數的出現背景介紹，對學生學習也有正面的幫助。當時航海、商業、天文等方面的計算需求，導致了對數的出現，而它的想法是很樸素的(就是上面那張對數表)。甚至可以提及 Napier 處理的基本想法、缺點，及 Briggs 常用對數表的處理(註四)。第一張對數表花了 Napier 二十年，誰能不被震撼？這其實是一個很好的典範，學生可以從中學到，一套似乎繁瑣的理論，起源的想法是那麼簡單；而且一個想法的完成，是要堅持與毅力的。

對數還有一個很重要的應用，可以用 Kepler 行星運動定律的發現來說明。以前學物理時，看到、聽到的都是說 Kepler 透過數據觀察而發現了第三行星運動定律。我一直覺得他很厲害，竟然能從那些數據中看出。例如下表為太陽系九大行星的軌道半徑與週期一覽表(取地球的軌道半徑與週期均為 1)：

T	0.24	0.62	1	1.88	11.86	29.46	84	164.8	247.7
R	0.46	0.72	1	1.64	5.36	9.91	19.2	30.1	39.5

想從表中看出$T^2\propto R^3$是不容易的。不過對會使用對數座標軸的人而言就比較簡單了。

$\log T$	-0.62	-0.21	0	0.27	1.07	1.47	1.92	2.22	2.39
$\log R$	-0.34	-0.14	0	0.21	0.73	1	1.29	1.47	1.69

我們可以較容易的觀察到大約$2\log T=3\log R$(註五)。你瞧，學了對數還蠻有用的，不是嗎？

以上所述，只是一些雜感和個人意見。我只是覺得，教學生會解類似下面的問題不是很有趣罷了。

設x,y為自然數，$\log x$與$\log y$之首數均為 1，$\log x$之尾數為$\log y$尾數之 3 倍，求$x,y=$？

註一：我常舉的例子是電影阿波羅十三回航時，航道角度的誤差只要一點點就會讓他們回不了地球。

註二：也許有人會說這個提法學生一樣可能沒興趣，但至少比原來冰冷的問題好許多。而且這個問題的趣味性很高，事實上不太可能折 12 次。一般而言 7、8 次就很難了。而理由還可以丟給學生自己去想呢！

註三：我指的是真實的或虛構的(歷史)情境。

註四：當然不是詳談，但是像 Napier 最初找的底：$1-10^{-7}$ 及 Briggs 後來採用的底：10，想法上都相當自然、簡單。

註五：我不知道 Kepler 是如何發現這個定律的，只是想說這種指數的關係式，透過適當的選用對數座標軸(也可以取 X ，$\log Y$ 或 Y ，$\log X$) ，會變得相當容易觀察。另外，這兩個表是從曹亮吉老師那兒抄下來的。

新書櫥窗：享受π的樂趣

洪萬生教授

台師大數學系

書名：The Joy of π 神奇的π

作者：大衛. 布拉特納 譯者：潘恩典

出版：商周出版社 出版資料：1999 年 5 月初版，117 頁，定價 260 元。

一九九八年八月三十日【自由時報】登載了一則中央社發自渥太華的新聞，說圓周率（圓周長除以直徑）3.141592×「永遠除不盡」的神話，已經被加拿大的一位年僅十七歲的數學天才柏熙瓦打破了，理由是「他利用二進位算法，發現圓周率的第五兆位個小數就是零。」後來，柏熙瓦發現媒體報導錯誤，即提出澄清說明，而【自由時報】也跟著在同年十一月十一日登載中央社的新聞電文，結束了這一場國內外新聞媒體因為「數學無知」而造成的烏龍事件。

圓周率π究竟是怎樣的數目？這對絕大多數的人而言，大概無關緊要。即使將「真正地認識」π當成「數學素養」（mathematical literacy）的指標，看來也不切實際。不過，中小學數學教師如何談論這個新聞事件，倒成了我們十分關心的問題。事實上，由於這個π在日常生活經驗中幾乎無所不在，但它的「性格」又表現得十足神秘，因此，從廣義的教育觀點來說，中小學教師也好，數學教授也好，乃至於科學文的化工作者也好，都值得參與有關π的知識活動。

然則我們究竟如何參與呢？或許閱讀相關的科（數）學普及讀物，尤其是那些洋溢著科（數）學人文氣息的著作，也不失為一條可行的途徑。事實上，將「數學史」融入數學普及論述，是我年少時所立下的志業。這些年，雖然無暇兼顧這一方面的工作，但是只要遇到同好者著作，總是見獵心喜，心嚮往之。前年（1997）年底，我前往美國新奧爾良（New Orleans）開會，在舊金山國際機場轉機時購得本書。在仔細閱讀過一些章節之後，發現它的內容不僅豐富多樣、趣味盎然，而且平易近人、老少咸宜，實在是不可多得的一本數學普及讀物。相信它對於圓周率π這個數目，一定會有很深刻的印象。