

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第二卷 第十期 目錄(1999 年 10 月)

- ☐ 數學家傳記的教育意義與價值
- ☐ 管窺集：反證法論證原理的探究性教學
- ☐ 心得分享：閱讀 VICTOR J.KATZ
《在數學教學中使用數學史的一些要領》(Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics)

數學家傳記的教育意義與價值

洪萬生教授

台師大學數學系

在集集大地震之後，動筆寫這一篇非關震災的文章，真有不知從何說起之感。這幾天在網路上看到一些「眼觀鼻，鼻觀心，圓滿自足」的「自了漢」大放厥詞，內心的沈重與悲憤尤其不可言喻。不過，與其悲慟拭淚，不如投注救災。無論如何，艱苦的重建之路才要開始，所以，繼續我們原先的學術志業，大概也是吾輩責無旁貸的「天職」吧。

既然如此，還是讓我們回到 HPM 這個主題上吧！筆者曾經為文（見「HPM 隨筆（一）」，【HPM 台北通訊】第一卷第一期）說明數學教師在課堂上運用數學史的三個層次，其中第一個就是「說故事」！然則究竟怎麼「說」呢？筆者認為史實的「求真」固然重要，但是由於我們的目的在於數學的教與學成效，所以，只要能夠提振學生的士氣與興趣，就已經達到初步的目的了。當然，學生如果因此而得到人格與認知兩方面的啟發，那麼，數學史的運用價值就更高了。此外，如果可以在引入傳記的脈絡中，「從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想」，那就更是「善莫大焉」了。至於傳記如何具體地「融入」教學過程之中，筆者在也提供了一些建議，請參考拙文「HPM 隨筆（二）：數學史與數學的教與學」（刊【HPM 台北通訊】第二卷第四期）。

底下，我們介紹四篇閱讀心得，四位作者的抒發對象都是 Helena Pycior 的 “Biography in the Mathematics Classroom” (Ivor Grattan-Guinness ed. (1987), History in Mathematics Education. Paris: Berlin, pp. 170-186)。由於 Pycior 是任教於歷史系的專業數學史家，因此，對於「傳記」如何引進數學教室，難免比較求全。其實，要是她有機會走進數學課堂實際參與教學，她對「傳記」如何利用說不定會有「另類」的反省。換言之，一旦數學史家有了教學關懷之後，他（她）們對於數學史如何「融入」數學的教與學，或許會變得比較從容與自在才是。

“Biography in the Mathematics Classroom” 讀後心得

台師大數學系碩士班研究生 林倉億

“If they are just repeating favourite anecdotes, they are not using biography:”，我認為對許多人而言，這句話是本篇文章中衝擊最大的一句。許多數學教師常常在課堂爭使用數學家的軼事，並且深信這般對學生學習數學有莫大的幫助，因而增強了不少教好數學的自信；然而，這句話卻會迫使他們去思考更進一步的問題，也是數學史家 Helena Pycior 強調的三方面：使用的目的、隨著目的選擇相關層次的傳記、時時吸收最新的傳記資料。

從 Pycior 在文中不憚其煩、苦口婆心的解說中，我們可以強烈感受到，她極力將傳記的使用目的，從娛樂提升到更高層級—紀念價值(commemoration)與數學的人性化(humanizing)。對後者的效果與使用更是諄諄善誘，在學生普遍畏懼、討厭數學的情勢下，將數學或數學家人性化將有助於縮小學生對數學的距離感，更進一步地可讓學生心中無數的挫折感得到一種抒發，就如洪老師舉過的例子：天縱英明的康熙對符號代數都是一頭霧水，在學生對自己的挫折感到釋然後，教師再要來引導他學習就會較容易了。

Pycior 也提醒教師切勿將數學家塑造成聖人，或者是利用數學家來做道德教化，不過我覺得她所提的理由有點牽強，例如如此做會面臨到“一個好的數學家應該是如何？”這樣的問題，一直未談到問題核心。我認為傳記的使用，除了幫助學生學習數學外，還可讓學生在成長方面(指的是對事物的洞察力、包容力與創造力)得到啟發，這啟發主要來自於學生內省自覺的，而不是教師一味的要求學生屈從道德教條(例如做人應該如何如何，不可以如何如何等)。

本文前半部都在論述一個好傳記所應俱有的條件，它除了讓我們知道如何挑選傳記或看傳記時應該注意那些細節，更深的含意是希望每一位要使用傳記輔助教學的教師，在內容的挑選與編排上都能夠謹慎以對，以一個好的傳記家來期許自己。

傳記在數學課堂上的使用

台師大數學系碩士班研究生 陳鳳珠

傳記和軼事的相關材料是許多數學課程中的標準內容，但該如何使用傳記史料和舉數學上的例子作說明一樣，要小心注意才是。

由 Helena Pycior (1987) 的“Biography in the Mathematics Classroom”文中可知，在數學課程中適切地使用傳記有三大要點：(1) 傳記中不可以完全是軼事（亦即毫無根據的說法）；(2) 不可扭曲傳記主角生平且加入虛構情節；(3) 須根據現代已校訂的科學傳記做出發點。其中特別要注意的是，將軼事蒐集起來並非就等於傳記。對於軼事和傳記部分的選擇，與在數學課堂中融入傳記的目標是很有關係的。在數學課堂中融入傳記的目標，從「娛樂效果」到對未來數學家建立「角色模範」的範圍是相當廣泛的，所以如何去調配其中的比例，顯然足以試驗教師的智慧與用心。

將傳記融入於數學課堂時，作者強調一部好的傳記必須賦予歷史人性化的一面，因為大多數的人感興趣的是他人如何和自己相似的部分。如果傳記賦予「往日」一般，也賦予數學人性化的一面，那麼學生將不只可以體會到那些偉大的數學家一如常人，更重要的是普通的平凡人也可以成為偉大的數

學家。譬如：在中國數學史上鼎鼎大名的康熙皇帝，就在符號代數的學習過程中，表現了類似今日國中學生茫然不知的模樣，這樣的學習經驗便可以啟發學生的一些同理感受，也因此可降低學生的學習挫折感。傳記也可能對學生人格發展有些影響，因為藉由對於不同文化所建立的人類知識的模仿，傳記可以延伸學生的生命經驗。

不過，傳記內容的層次應和課程目標做結合。例如將軼事作為主要內容以達到娛樂的效果，但卻須相當注意其內容的真實性，避免過於誇大不實，否則容易讓學生覺得不易接近，甚至會認為那些數學家超乎常人而影響自信。然而具有人性化的數學，需要的是好的傳記，其中必須以人性化的角度去探索與說明數學家的活動。建立著名數學家成為學生的角色模範的目標，對數學教師而言更是責無旁貸。當然「時間」在數學課程中，是另一個必須面對的因素，教師必須視課堂中所能利用的時間，加以調整傳記的內容和多寡。

最后，那該如何去評量傳記在數學課程中所得到的效果呢？自然是從目標的分析開始，第一步是列出課堂中所要使用傳記與軼事的材料；接著，評估在教學中是否達成。在此情形之下，仔細檢視教師所使用於課堂中的傳記和軼事的資料，不但提供了善用課堂時間的機會，更能了解教師本身在教學過程和對於數學家所遺漏或漠視的部分。在實際的教學演練之後，教師應確定學生對所呈現目標的接受性；教學效果是否符合原本計劃的目標；與是否教學情境的不適合和須調整或改變目標與層次。總而言之，細查所準備的傳記材料；決定目標；配合傳記不同層次的內容；並根據最近的傳記內容加以更新，才能確使傳記內容融入數學課程中，達到實際的效用。

試析〈Biography in the Mathematics Classroom〉一文

新店高中 蘇俊鴻老師

PYCIOR 在本文中試圖討論傳記在數學課堂上使用的指導方針；什麼樣的傳記才是“好”傳記？何謂“完善”的科學傳記(Complete scientific biography)？在課堂使用傳記的目的為何？最後，作者更希望教師能重新檢視自己在課堂上使用傳記的情形。

對作者 PYCIOR 而言，一本“好”的傳記必須滿足三個條件：獨特的(individual)、真實性(truthfulness)及藝術性(artistry)。由於傳記是針對傳主個人生活及成就的再呈現，所以它是獨特的；呈現的原則是真實的，寫作者不能摻入個人的情感與價值判斷；必須在有限篇幅內將眾多資料適當剪裁，去蕪存菁，因此它是藝術的。然而“完善”的科學傳記作品，除了是一本“好”的傳記外，也必須能將科學家的科學工作的偉大貢獻與其個人特質、平時生活點滴等結合。更甚者，也必須留意當時外在環境對科學家的影響。通常這些非科學因素與科學的互動是相當複雜且糾葛，對傳記寫作而言，是一項重大挑戰。

PYCIOR 在文中最重要的一點是提醒數學教師在使用傳記來幫助教學進行時，必須清楚地掌握使用時“目標”。一般而言，使用傳記的目的不外乎為了增進上課的趣味性；或是透過對數學家的生平了解，對學習者人格上的激勵；或是對學習材料的再“體驗”與省察。根據教師對“目標”的設定，來決定選擇傳記材料的多寡與內容呈現的層次。此外，PYCIOR 卻有著傳記材料使用的執著與禁忌：？傳記絕不可只是軼聞；？絕不可扭曲傳記的內容；？要隨時更新傳記材料，保持其準確性。這當然是

PYCIOR 本身對真實性要求的落實，但是否如此嚴格，倒有值得商榷與轉圜的空間。譬如對「軼聞」的使用，在無傷大雅，且能增進對學習材料了解的情形下，何妨一用！

Biography in the Mathematics Classroom 心得報告

台師大數學系 謝佳叡助教

傳記，難寫；數學家傳記更是難寫

傳記，難讀；數學家傳記更是難讀

想要在數學課堂上使用傳記，更是難上加難

傳記難寫，難在若是「自傳」，雖直接擁有些事蹟資料，卻常拋不開個人主觀好惡，下筆常有偏頗。而能留傳者又常是有成之人，所記之事自然頗具公信，一旦有偏則影響深遠。例如物理學家理查·費曼 (Richard Feynman, 1918-1988) 自傳式的書籍「別鬧了，費曼先生！(Surely You're Joking, Mr. Feynman)」一出版即成暢銷書，受歡迎的原因，想必不是基於人們樂於探索其背後的物理定律，而是費曼趣味盎然的溝通方式，及令人聞之大呼過癮的事蹟，然而知識層面的結果是真(如發現某個定理、現象等事實)，其間的過程難免加油添醋，捨陋揚善。

相反的，若是他述傳記，對資料的收集、調查、安排得費許多工夫，對於傳記人物的內心及隱私僅能透過訪談、私交、書信，更得加入自己的想法及臆測，加得多了則失去原貌，荒腔走板；少了又千瘡百孔，失了傳記應有的生命力。「自傳」有失公允，「他傳」亦失公允；前者失之主動，後者失之被動，故云：「傳記，難寫！」

數學家傳記更是難上一層。倘是「自傳」，不論是否這些數學家都擁有好的文學素養足以為己傳，當埋在浩瀚的數學領域中怕也不得閒，真理的探索是無止境的，且越是探索自然科學越是覺得自身之渺小，我想這是數學家(或是科學家)很少留有自傳的原因了。若是「他傳」而作者不懂點數學者，自然難有深刻的數學家傳記，等到擁有足夠的數學能力，豈不也埋入這個學門，如非特殊原因也就難得空閒為他人做傳了。

恰有能力也有時間記傳者，還得面對一些問題，大部份數學家除了數學知識的創作外，也都會有伴隨著吸引人的生平軼事，但他們是否會如處理數學般的細心態度去面對這些材料？是否也該如此？且傳記的層次、標的要放在何處？人為主或是數學知識為主？科普取向或是專業取向？紀念性質或是娛樂性？所有這些問題都必須考量，而這些往往難以兼顧。如重於數學知識本身則必過於生硬嚴肅，令人難以接近；如重於數學家軼事，則必不夠深刻，流於風花雪月而失去數學精神，在此一關聯下，數學史的本身應不是唯一目的，終究必須歸於數學知識。正因如此，坊間書局要找尋數學家傳記並非易事，不然就如「現代數學的巨星—希爾伯特的故事」(儲家康著 凡異出版社 1998.10)，全書著重於數學故事，閒暇讀之自有趣味，若當成做學問的參考用書顯然「不對門路」。

傳記，是史料，是文學，也是理性創作！因為是史料，故要「真」，不可虛偽造假，即使有臆測、評論也都得建立在有憑據上。傳記也是文學作品，而文學是藝術之一，是藝術就要講究「美」，用字遣詞要美，段落結構也要美，更要有令人感動之美。作者將傳記主角的事蹟透過文字型式傳達於讀者，沒有好的寫作能力是無法引起讀者共鳴的。此外傳記也是理性創作，除了提供大量的知識外，也藉由

這些卓越的人物來興起積極作用、提昇文化素養，開拓人生視野，無論藉以憑弔或鑑古知今都出於「善」。傳記材料的安排以時間為主軸，人物事蹟為橫軸，不可倒果為因、亂了始末，故傳記寫作非得理性不可。而讀者要從一本傳記中辨別史料的真偽、領略傳記人物的貢獻、瞭解傳記中作者欲表達的重點，更要懂得賞析而有自己想法，故曰：「傳記，難讀！」

數學家傳記難讀之處又更甚了。若說傳記材料的安排以時間為主軸，人物事蹟為橫軸，則數學家傳記又得加入數學知識一軸，使得廣度及深度都遠勝其他。數學家主要的貢獻在於抽象的創作及實際的應用，沒有論文、數學式子何以感受數學家的創作精髓；但加入論文、數學式子又讓多數人望而卻步。例如在讀到

牛頓（Isaac Newton）對數學的貢獻只停留在和萊布尼茲優先權的爭奪，而不去看他對微積分或對分析的其他方面（如無窮級數和二項式展開），那麼從數學家的角度看來，牛頓算是「缺席」了。

將數學家傳記應用於課堂上，不一定是指教師們必需去選定一本傳記當做教材，而是充實教師本身在這方面的素養，以因應不同的需求及目的，隨時隨地可以提供這一方面的知識。運用一定比例的傳記於課堂中，不但可以讓學生產生學習動機，還可在嚴肅的數學領域中有些餘興時間，而這些數學家努力的歷程、挫折的克服，也提供學生一個仿效及借鏡的對象，這也是教師手冊中較以往加入更多相關的參考資料、以及越來越多有關 HPM 研究的原因了。

數學史並未被納入國內當前的數學課程中，數學家傳記就更不用說了（除了少數如高斯處理級數之類的小故事）。這使得在「單元式」的教學中，想要結合數學史的使用，除了教師本身要培養一定的數學史素養外，更需有高度技巧。此外，如教學時間有限、課程進度的壓力，使得教師要在數學課堂上使用數學史或傳記，並不容易。說個不怕人笑的例子，既使到了大二，筆者對高斯的認識仍維持在那個「級數的故事」及「高斯符號」（簡直滄海一粟），但隨即便發現，其實如此之人比比皆是。說起來頗令人感嘆，讓現階段中學生隨便說幾個音樂家、畫家、作家、詩人、甚至物理學家、化學家，不能舉出三五個的也不至於一點印象也沒有，唯獨數學家，告訴他們或許還不認識呢！這對一門老是宣稱科學之母的學科無謂是一種諷刺吧？

管窺集：反證法論證原理的探究性教學

唐書志老師

百齡中學

本期引介——

反證法論證原理的探究性教學

林福來、鄭英豪作

1997，科學教育學刊第五卷第四期，pp.557-589

一、前言

這裡所要引介給各位的，是林福來與鄭英豪兩位先生於民國 86 年發表在科學教育學刊（中華民國科學教育學會出版）裡的論文。基於下列三項理由，筆者以為這會是一篇有趣而又富啟發性的文章。

首先，今年入學的高中新生，開始全面使用根據 84 年高中數學課程標準編寫的數學課本做為數學科主要學習內容，其中「邏輯」的教材地位被大大突顯出來，「反證法」這個主題被視為學習的主體，也是學習「邏輯概念」時的一項學習焦點。使得數學教師更有必要瞭解反證法的教學。

其次，林福來與鄭英豪在論文中既簡介「反證法的原理與其時代意義」，也對中學學生（包括國中學生與高中學生）「反證法的學習情況與學習問題」進行描述，這些內容對欲瞭解更多相關數學脈絡背景或學生學習概況的數學教師而言，不啻是較為精鍊與實際的整理和入門。

例如文中提到：林福來（1994, 1995）曾調查國內高二學生對於反證法的瞭解，發現學生們的瞭解顯示兩種層面，一種展現的是「否定敘述」的能力，一種則是展現對於反證法程序的瞭解，兩種層面又各有發展的層次。在否定敘述的層面上，層次發展順序為

層次 1：能否定無量詞與量詞為「存在」的敘述。

層次 2：能否定量詞為「所有」的敘述。

層次 3：能否定量詞為「唯一存在」的敘述。

在反證法程序的層面上，各層次發展順序則是

層次 1：能否定無量詞與量詞為「存在」的敘述。

層次 2：瞭解反證法的證明格式（否定結論，推得矛盾）。

層次 3：能辨識對偶命題。

這些層次的發展都是以高層次包含低層次的方式表現。藉由這些結果，我們不但看到學生否定語句的能力獨立發展，而且發現學生在養成直接填否定詞的能力後，便可學習反證法的格式。但學生瞭解反證法的格式並不代表他們瞭解反證法的論證原理，而是待能「辨識對偶命題」，能「瞭解對偶命題等價」後才有機會明白箇中道理。這些研究成果，可以做為數學教師們極佳的教學參考。

最後，這篇論文還特別將反證法的邏輯形式同「生活中的論證」、「生活情境裡的命題」比較，並且分析生活命題的思維特質，詮釋學生用來思考生活命題的思維常會產生異於邏輯規則的情況；進一步還提出克服思維障礙、發展邏輯思維的教學假設，同時據以發展教案進行探究性教學。本來，如何將傳授給學生的數學知識，和學習者的既有生活經驗、固有思維模式連繫起來，一直是中學數學教師想要達成卻又不容易做好的事，多數參考書籍只能提供數學範例與習題，或者僅僅建議理想中（或教學經驗中較佳）的教材和教法，教師對學生學習特性及教材內容的許多觀察判斷又往往欠缺同其他人交流印證的機會，尤其不易找到學理上的依據和最新的相關學術討論（「討論」一詞強調的是交流和辯證）。透過這篇論文，教師一方面可以較為深入、細膩地看到學生學習反證法時展現的若干學習特性，思考教材內容（反證法）在生活與數學架構裡的地位，另一方面也應該能激勵自己釐清教案安排的來龍去脈，進一步反思數學教師可以做與必須做的要務。

舉例來說，Anna Sfard（一位以研究代數思維著稱的以色列女性數學教育專家）曾說過許多數學概念的起源是「運算性」的，經過許多運算經驗，使得運算的概念可以累積壓縮成某種看似靜態的結構。像是奇數的概念，在剛開始時也許只是無法平分的操作或除以 2 有餘數的計算，然後才發展成可以表徵為偶數加 1 的數（或可以表徵為 2 的倍數加 1 的數），於是奇數成為一個能獨立運作的主體「物件」（object），而非依附於其他用途的運算過程。恰好在數學證明的問題中，被關注的主體常常是較為抽象的數值關係，證明者須將某些「數值關係」看成「物件」才能進行證明，學生也要先對這些數值關係有結構性的瞭解，同時配以具結構的思維操作。根據文獻，數學教師最好能適時提供運算性的觀察或操作經驗，以幫助學生順利地將運算性思維轉換為結構性思維，而這些事情常是我們在「反證法」教學（甚至是一般「證明」教學）中輕忽或思之不得其法的。

二、論文摘要

由於這篇論文的焦點是放在「探究性教學」的研究成果上，作者於研究中特別針對教學假設：「將生活情境中命題的真偽關係符號化，利用符號規則推理再轉譯回生活命題，可增進學生對反證法論證原理的瞭解」發展教案進行「探究性教學」。

「探究性教學」時，著重觀察當下學生的學習反應，主要是根據教師在教學中的觀察紀錄來進行。研究對象為五專商科一年級學生 47 人與五專工科一年級學生 23 人，研究中的教學活動共約三節課（150 分鐘）。最後佐以教學後一個月的延後測，對照具代表性的高二學生對反證法的瞭解狀況，評估研究對象的學習成果。

教學過程的觀察紀錄顯示：在教師導引與學生的小組討論中，學生確可發現對偶命題等價並加以符號化，而在求等價命題方面，將原命題符號化再輔以符號規則是成功的關鍵步驟，教學假設獲得支持。延後測結果又顯示：實驗班學生有 19% 的學生能辨識對偶命題等價，相對於參照組裡已學過反證法高二學生之 4.5% 高。

三、感想

1. 數學教師可以進行第一手的觀察與探究。

或許有人會問：上述教學假設的驗證結果是否真地符合所有數學教師的教學實況？背景互異的學生在同一數學主題上的學習究竟有何差異？為何有所差異？這些差異對於不同學習階段的數學教師又有什麼意義與啟示呢？的確，教育學者大都認為「教育既是兼容認知意義、價值意涵，以及行動實踐的複合概念，同時也是意指教人成人的實踐活動」，「兼具理論與實際雙重特性」，如此設問無可厚非。我們在教學時，所面對與思維，的正是數學教育裡的主體，無論是腦海裡浮現的想法（例如看待數學、數學教育與學生學習心理的哲學觀），還是自己在教學和評量歷程中所採取的方法策略、對於教材和學生的第一手觀察，其實均為數學教育研究要探索的對象。

這篇論文所做的研究準備以及研究設計，恰為數學教師有能力進行，而且有助於教學和評量進行的工作，倘使教師們信賴或質疑這些研究成果，應該嘗試直接投入現場觀察與實地研究工作，結合研究精神與教學實務，一來有機會改善教學品質，二來也可以利用這段歷程擴展自己的心靈與視野，同時有能力對其他研究者的成果進行更深入的篩選和品評。

2. 交流資訊與加以辯證是豐富數學教學的一項重要方法。

作者探討生活命題及相關思維，還有反證法原理意義、學生的學習情況與學習問題，是文中設計探究性教學教案的重要前奏；教師們若希望自己的教學設計能蘊含更豐富的想法，則多樣化的資訊來源顯然是不可或缺的因素。同樣的，不同的資訊和信念可以造就不同的教學假設——細心的讀者會發現這項研究中的教學假設決定了教案的設計方向。因此教師在讀取他人報告的同時，也應該努力判讀研究背後的哲學思維以及各種研究發現背後所可能隱藏的涵義，盡可能思索所得現象的正反面意義（就像是「反證法」一詞本身所暗示的一樣）；這些功課既豐富教師的想法和教學，也從多方面考驗和鍛鍊教師的專業素養。

許多時候，交流與討論各種和教學有關的學術資訊，並不是我們這些中學數學教師單槍匹馬可以輕易做好的工作；冀盼校內的有志教師相互結合，不但可進一步依各校特色發展適合的觀察與探究，也可共同促進數學教師專業的充份體現。

3. 學校應成為教師教學研究的重要後援。

儘管許多教師對於教材內容和學生學習狀況有著濃厚的興趣，也不疑餘力地想要蒐集各種教學研究資訊，但如果學校裡的行政措施不能以教學為本位，而是以方便管理或任務取向為依歸，則教師勢必為教學之外的雜務疲於奔命。在這篇論文所設計的探究性教學教案裡，學生之間的小組討論是實踐該教案的重要手段，這種方法是不是最好的設計呢？或者這種設計有沒有須要特別注意的地方？如果學校能在軟硬體方面提供更多的行政支援，讓數學教師們有機會充份討論和設計各類教學法的特質和細節（就像是各個研究小組裡所做的），相信對於教師的教學工作將大有助益。

當然，倘若大家將教學或研究心得報告出來，互相交換自己的看法和思維脈絡，並以盡可能嚴謹的態度審視，筆者認為，這將是數學教師們最好的智庫材料。這些報告、交流與審視工作的地位並不亞於實際教學，雖然學校行政系統的支援配合（例如排課）可能有許多亟待改進的空間，但教師率先努力將更利於後續措施的推動。

另據筆者所知，本刊仍將陸續引介和數學教育有關而又有益於教師豐富教學思維的文章，同時也歡迎各位實際從事數學教學工作的教師投來您的推薦或相關報告。筆者相信，「讓數學教師有更多可看可想的東西」和「讓數學教師想得更多、看得更多」是同等重要的；而 HPM 理念：數學史與數學教育（History and Pedagogy of Mathematics）的充份結合，亦須仰賴數學教師們對於學習者數學認知歷程（history and process）的觀察和數學知識本身發展脈絡（context）的認識。這篇容易上手的論文，可以當作我輩數學教師開始嘗試結合數學教學、數學史（包含數學哲學）和數學教育研究時的參考，也希望能藉之激發出我們所想所看的無窮空間，以及與同業分享自己實務和研究心得的行動。

心得分享：閱讀 VICTOR J.KATZ 《在數學教學中使用數學史的一些要領》

(Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics) --

刊載於 1997 年 2 月的 For the Learning of Mathematics

林倉億

台師大數研所碩士班

~純粹的數學知識確實存在，但是它往往埋在文化的脈絡之中，而我們可以將文化的脈絡真實地呈現給學生，如此學生不但學到了數學，還學到了不同的文化，這也正是我們的目標之一。~

Radford 教授在數學教學方面曾提出「簡單教學模式」(Simple Teaching Model)，其中他宣稱數學知識本質上是非歷史性的，所以，可以自由地將古代的數學與現今的數學做一連結，不需要擔心(數學知識發展的)歷史或文化脈絡的差異。這樣的說法導致了一個疑問：純粹的數學知識是否存在？也就是，我們現在對一個數學主題的知識是否和前人相同？若是的話，如 Radford 教授所述，教師可以無慮地在課堂上使用數學史幫助學生學習；若不是的話，引入數學史，學生卻不了解當時(歷史及文化脈絡下)的數學知識，如此將有弄巧成拙之虞。(註一)

對於“純粹的數學知識是否存在？”這個問題，作者 Katz 肯定純粹數學知識的存在性，例如在希臘的畢氏定理與中國的勾股定理指的是同一件事；對於 n 個物體中取出 k 個的排列數的計算法則，十四世紀的拉比·班格森(Levi ben Gerson)、十七世紀的梅聖尼(Marin Mersenne)都與我們相同。不過，不同的是發現這些數學的方法與「證明」，而這正關係到不同的歷史或文化脈絡。

數學教學是一件困難的事，教師也總是面臨何種教法才是讓學生獲得、了解概念的最好方式。使用數學史不見得會使教學變得比較容易，但是，我們的目標在於尋求何種方式對學習較有幫助，也就是需要且值得以更細緻的方式來使用數學史。Katz 強調，在課堂中使用數學史除了需要了解學生如何學習數學知識外，仍需要不斷地試驗及心得分享，更重要的一點：從較大的範圍來考量及設計一系列數學史的使用，這時就需要思考如何將一系列的概念甚至整個課程，結合到某個歷史或文化脈絡之中。Katz 提供以下三個例子來說明這樣的使用方式。(註二)

以畢氏定理來說，我們並不知道它是如何被發現的，但它在許多的文明中都出現了，因此，我們可以藉由想像力來重新「發現」。比方說，以教室地板的磁磚為媒介，先從等腰直角三角形「發現」起，再去「發現」各種的直角三角形；接著，就需要「證明」了，劉徽或趙君卿的論述或方法算不算是證明？一個定理的證明又是什麼呢？證明在數學發展中所扮演的角色，甚至是對文明發展的影響等等問題，這些都是不容錯過的，教師可以把握機會與學生好好地分享討論。一般而言，學生在學習證明時都是從很顯然的結論證起，Katz 指出若從歐幾里德對畢氏定理的證明講起，然後再回溯證明之中所需的先決條件，直到必須建立公設為止，如此一來，學生就可以體認證明的必要了！「證明」完了

之後，還可以繼續討論畢氏三數組，許多老師報告了他們利用 Plimpton 322（記載巴比倫畢氏三數組的泥板）獲得了很大的成功；此外，也可以介紹印度人利用畢氏三數組來建造他們的祭壇，這樣一來，學生還可以接觸到截然不同的文化。

三角學的發展也是一個相當好的題材，（在西方）這門學問的發展並不是為地表上的測量，而是為了天體的測量。Katz 認為利用今日正弦函數的概念，將能夠成功地透過托勒密（Ptolemy）來幫助學生了解三角學的內涵。額外地，這還提供了一個絕佳的機會與學生討論初等天文學（日動說），該門知識作為科學的基礎長達數世紀之久，所以絕對值得我們去介紹它。Katz 提到他很喜歡讓學生利用古代的資料、證據來辯論究竟是地動還是日動，我想這是很有趣的一點。當然了，天文學的知識是關於球面三角學的，但是若只要用在討論太陽的運動，這並不會太難。若學生欲罷不能，還想繼續探索球面三角學的話，“回教徒如何找到麥加的方向”這個帶有文化及宗教背景的問題，則是一個非常不錯的選擇。

在古代的基督教和回教傳統世界中，他們都對排列數相當地感興趣，導因於他們深信神創造了世界萬事萬物，而每一件事物的名稱都由字母所組成，因此，可以透過對字母排列數的研究，來窺知神可能創造了多少事物。由基督教和回教傳統世界出發，幫助學生去發現巴斯卡三角形，去探索巴斯卡三角形之中的奧祕，還可以利用阿拉伯數學家 ibn Munim 和 ibn al-Banna 的方法幫助學生發現組合的乘法法則、利用巴斯卡及拉比班格森的方式來證明組合公式；更重要的，我們可以讓學生體會到數學家的用心良苦—用最簡單的方式來呈現全體，如此只要透過代公式就可得知正確的數字，人們再也不用辛苦地一個一個數了。

教師必定要充分熟悉數學史，才能與教學做一成功地結合，除了課堂上的使用，習題的選擇也扮演舉足輕重的角色，例如歷史上重要的問題，或限定只能運用當時的數學工具來解決，在在都能夠幫助學生抓住、發展數學概念。從數學史中我們可以看到，純粹的數學知識確實存在，但是它往往埋在文化的脈絡之中，而我們可以將文化的脈絡真實地呈現給學生，如此學生不但學到了數學，還體會到了不同的文化精神，而這也正是我們的教育目標之一。

最後，作者再次強調了分享心得的重要性。我想本刊(HPM 通訊)正好提供了這樣的管道，對這方面有興趣的老師，歡迎一起來經營這片園地；對於數學史有任何疑問，可以透過網路留下您的問題，編輯小組會竭力為您解答。

註一：舉例來說，希臘人的不可公度量與我們的無理數不盡相同。

註二：Katz 在這個例子中詳盡地提供了教師們可能的發展方向，考量實際狀況使用，至於教師是否要全部介紹，他並不堅持。