

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第十九卷 第一期 目錄（2016年1月）

- ▣ 第二屆和算國際會議紀行
- ▣ 寒假數學作業的建議
- ▣ 幫助學生體會數學（美）無所不在

【HPM 國際研討會報導專欄】

第二屆和算國際會議紀行

英家銘

臺北醫學大學醫學人文研究所

2015年十一月7-8日，筆者受邀赴東京都立川市日本國文學研究資料館（以下簡稱「國文研」）參加「第二屆和算國際會議」(Second International Cooperative Studies on the Scientific Documents in East Asia Featuring Pre-modern Japan)。這個會議的緣起是國文研從2014年開始，推動一個名為「日語古籍國際共同研究網絡建築計畫」(日本語の歴史的典籍の国際共同研究ネットワーク構築計画)的大型國際研究合作計畫，邀請各領域的專家學者共同研究與整理以日本語書寫的古籍。現存日語古籍中有相當數量的算學書籍，因此，國文研也邀請和算史的專家（主要為東京大學與四日市大學的學者）加入這個團隊。筆者雖然主要研究範圍為東算（朝鮮算學）與中算，但因為和算的研究也會牽涉到這兩個領域，所以筆者也很幸運地與其他幾位國際學者被邀請參與這個系列研討會。這個會議第一次舉行是2015年三月在伊勢志摩（請參閱HPM通訊十八卷第六期），未來這個會議有可能移師東亞其他國家，也極有可能在臺灣舉辦。



圖一：2015 第二屆和算國際會議地點，東京都立川市日本國文學研究資料館。

本次會議以邀請參加為主，不對公眾開放。受邀與會學者，包含國文研的研究員，共有來自中、日、臺共 12 位數學史或日本史研究者，進行兩天的會議，討論內容包含古代與近代中算史、和算史與兩者的數學社會史議題。筆者這次報告的內容是關於秦簡《數》中的面積與體積問題再解讀。兩天的會議中，令筆者印象較為深刻的，則是上海交通大學薩日娜老師所報告關於江戶時代中後期至明治時代，伊能忠敬（1745-1818）與柳橋悅（1832-1891）兩位學者的地圖測繪與數學教育工作。日本與中國學者對於和算史的研究，近年來已經逐漸從關孝和與建部賢弘擴展至後期的發展。臺灣的和算研究者雖然很少，但是在江戶時代中後期的算學發展議題，已經出現數篇碩士論文與一篇博士論文。在這樣的基礎上，未來臺灣的和算研究應該也可以跟中、日學者有更多交流的可能。



圖二：與會學者合影。

國文研對於日語古籍的整理成果，會逐漸建立資料庫並且讓公眾搜尋古籍電子檔，對於和算研究者也是一大福音。另外，未來「和算國際會議」若移師臺灣，希望臺灣 HPM 團隊都能夠共襄盛舉，協助辦理會議並且發表論文，讓臺灣關於和算的研究能夠與世界接軌，向中、日學者學習，也把我們的成果介紹給他們。

寒假數學作業的建議

林義強
高雄女中

Part 1 (共同必修) :

寒假作業考試內容： 高一寒假作業練習題 --- 如所發的講義

傳統上，我們的社會價值觀非常重視升學考試的成績；因此，我們數學課程的絕大部分時間，都拿來服務各種類型的考試。然而要在未來激烈的生存競爭中脫穎而出，妳必須去探索妳人生的各種可能，儘早去建立妳在人群之中的獨特性(辨識度)。

以下就是阿強老師 給所有學生 寒暑假期間的數學探索建議：

Part 2 (選修擇一) : 請各位同學考量自己的時間規劃，作業時間的花費盡量符合「比例原則」

A. 高市總圖書館使用報告(A4 規格) 或 高雄市立總圖書館 開幕了，學著使用這項重要的閱讀資源，也許會對你有一些正向的啟發。請利用寒假期間，去充分地使用個 2~3 天，然後寫一篇使用報告，報告你的使用心得或者是給其他人的使用建議。



B. 數學相關科普書籍 讀書報告(A4 規格) :
請參考國科會 "向社會推薦優良數學科普書籍" 或參考阿強推薦的幾本書。
http://w3.math.sinica.edu.tw/mrpc_jsp/book/



- C. 數學模型製作(有需要的才給)
- D. 其他的數學相關素材

C. 寒暑假數學作業 -- 多面體模型：

It's about Polyhedra, Symmetry, Pattern. A connection between Math & Art.

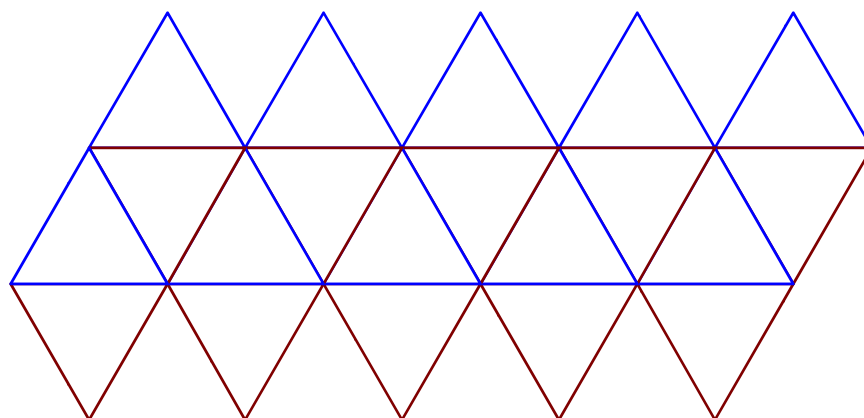
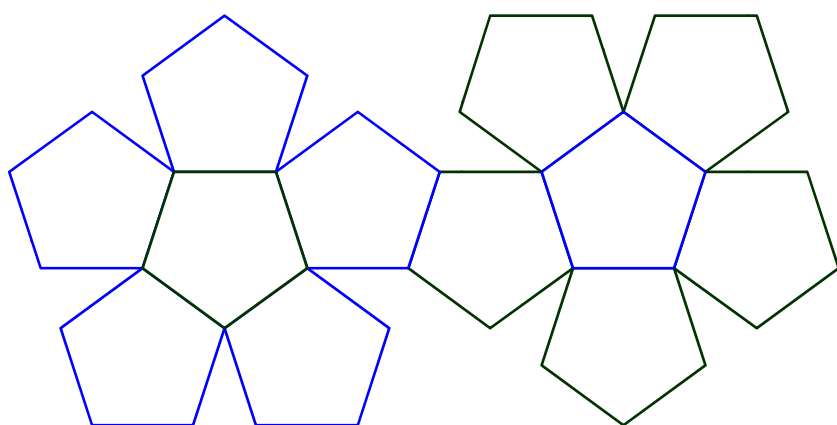
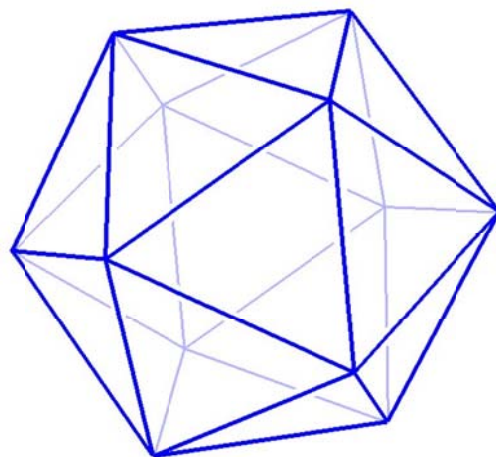
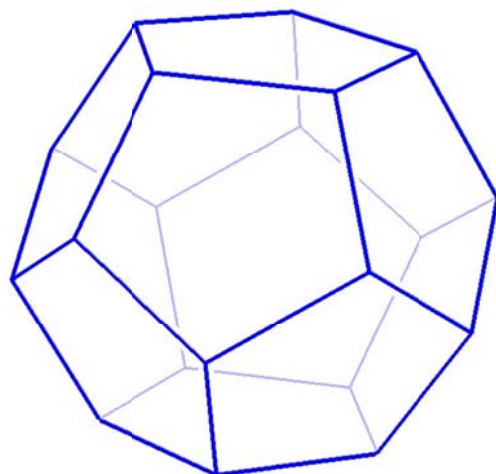
(數學)是活在理想的(抽象世界)中的；一但要製作模型，你就必須要處理誤差，要回到我們生活的(真實世界)。

{1}. 柏拉圖多面體(Platonic Solids)

[1]. Construct Platonic Solids

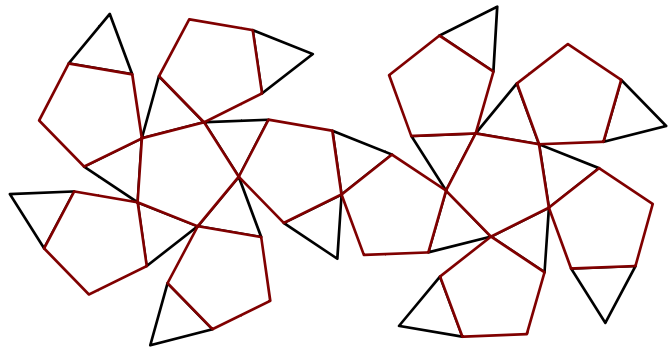
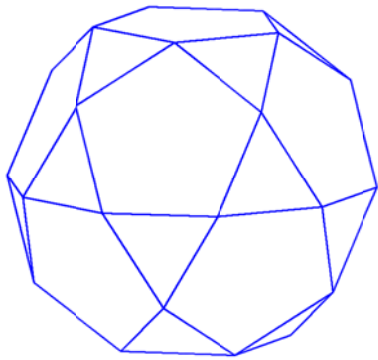
(P04). 正十二面體：12{5} (由 12 個正五邊形構成)

(P05). 正二十面體：20{3} (由 20 個正三角形構成)

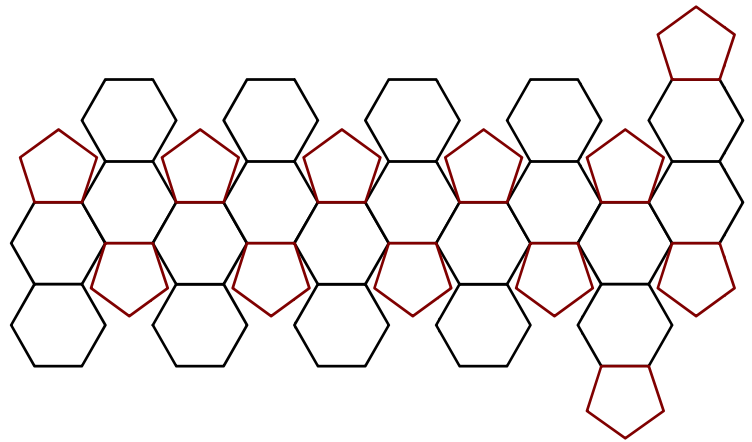
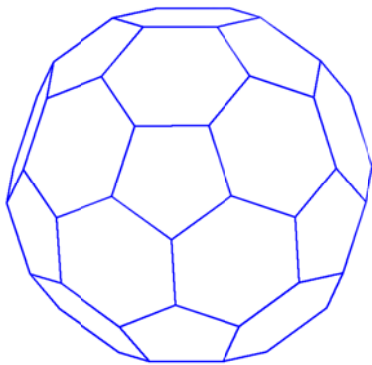


{2}. 阿基米得多面體(Archimedean Solid)

(A02). 截半十二面體(Icosidodecahedron) : $20\{3\}+12\{5\}$

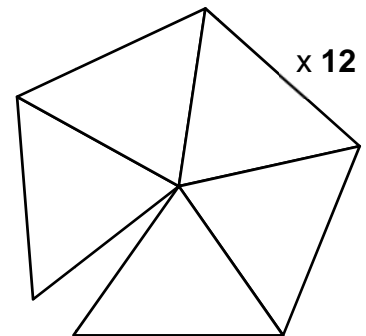
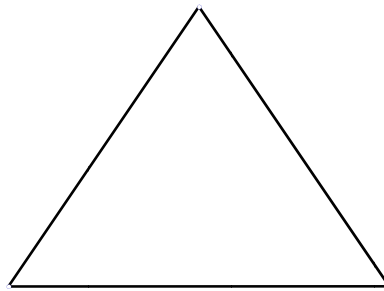
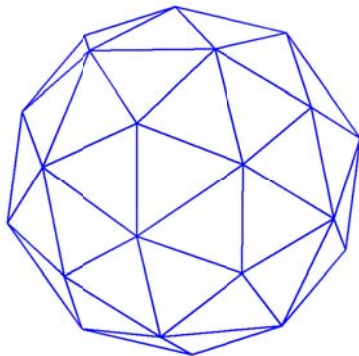


(A06). 截角二十面體(Truncated icosahedron) : $20\{6\}+12\{5\}$

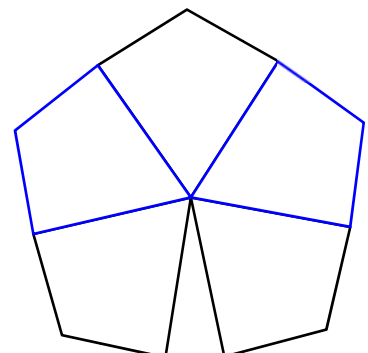
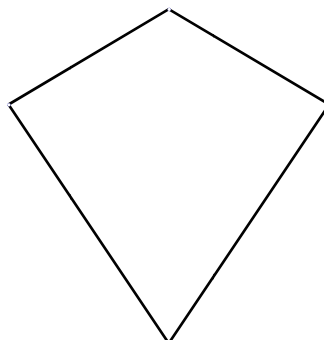
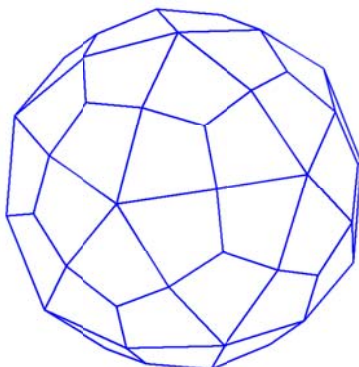


{3}. 加泰朗多面體(Catalan Solids)

(Ad06). 五角化十二面體 (Pentakis Dodecahedron) : $60\{3\}$

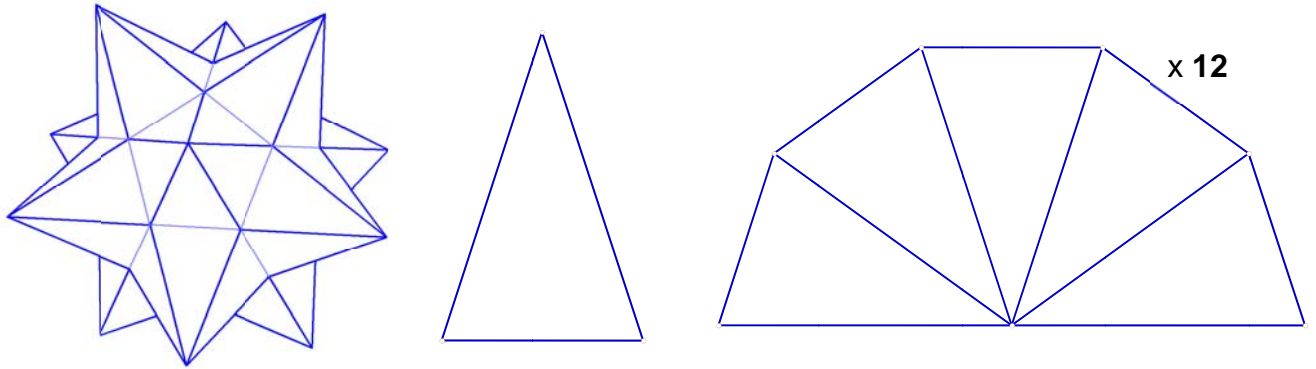


(Ad10). 鸞形六十面體 (Deltoidal Hexecontahedron) : $60\{4\}$

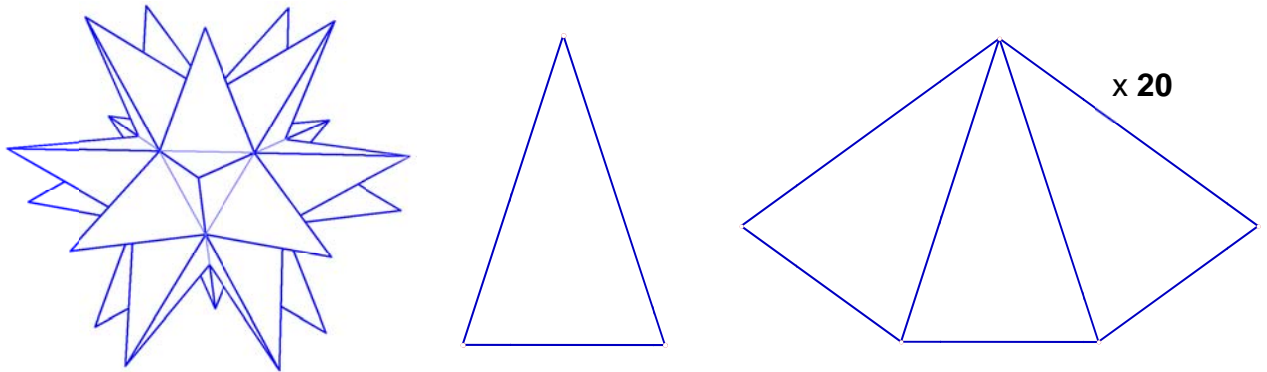


{4}. 克卜勒-龐索多面體(Kepler-Poinsot Solids)

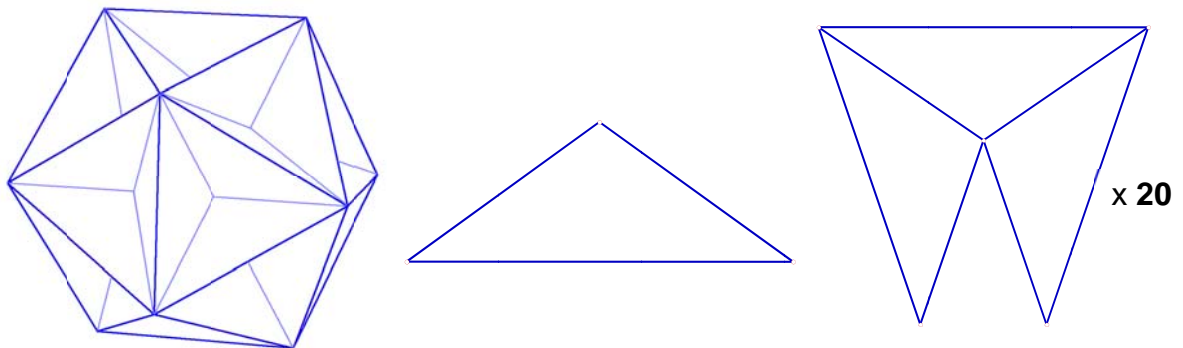
(K01). 小星狀 12 面體(Small stellated Dodecahedron) : $12\{5/2\}$



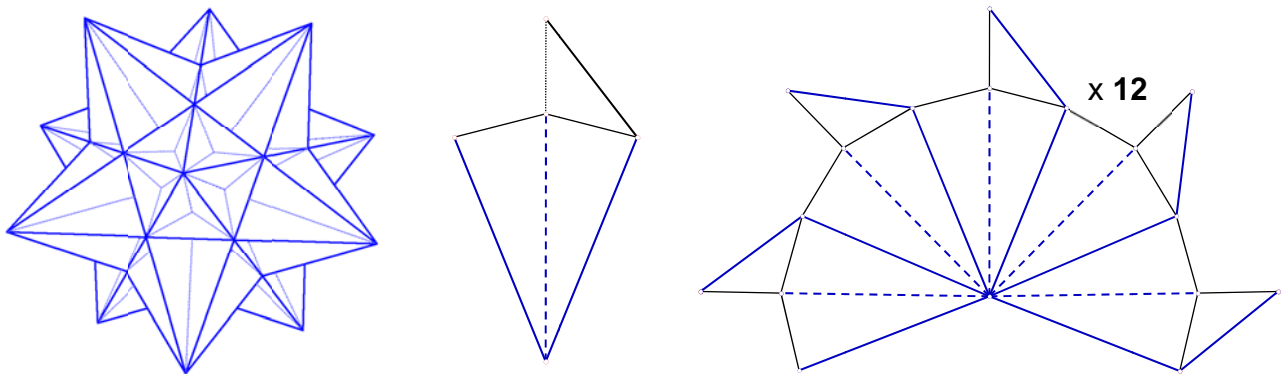
(K02). 大星狀 12 面體(Great stellated Dodecahedron) : $12\{5/2\}$



(K03). 大 12 面體(Great Dodecahedron) : $12\{5\}$

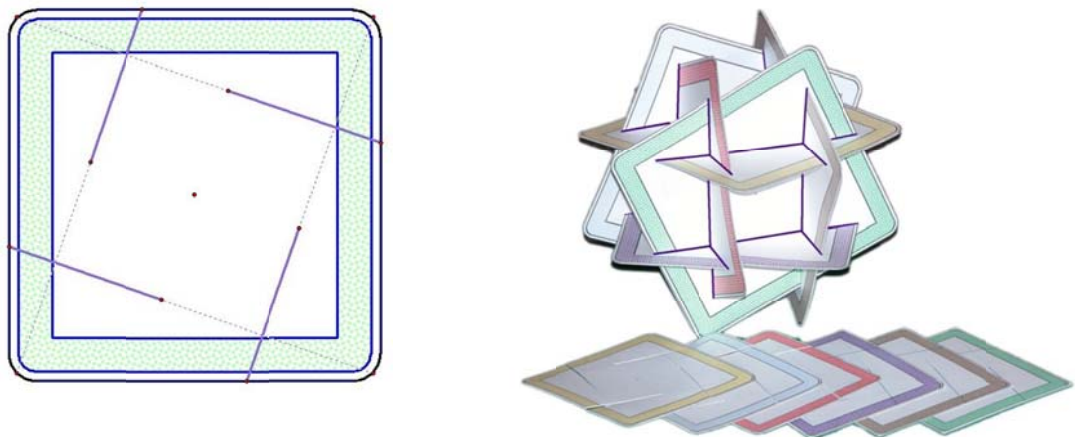


(K04). 大 20 面體(Great Icosahedron) : 20{ 3 }



{5}. 自製多面體模型玩具

- [1]. 扭稜嵌合立方體(建議使用 現成的正方形材料，如 卡紙、名片紙 或 塑膠板)
 (溝槽) 須考慮材質的厚度，才容易和諧地組裝起來，需元件 6 片



[2]. 虛體軌道球(nolid ball)

- 建議材料：包裝帶(打包帶，彩色紙帶亦可)；左圖須元件 6 條、右圖須 10 條



[3]. 長尾夾嵌合球 (Binder Clips ball) --- 2014 年有幾個學姊在此頗有進展...

(1). *Clipped Corners* (30 個長尾夾) by Zachary Abel , April 2011

< <http://zacharyabel.com/sculpture/clippedcorners.html> >

(2). *Zodiac* (90 個長尾夾) (30 個雙尾 + 60 個單夾) by Zachary Abel , April 2011



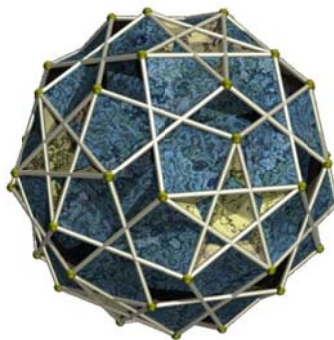
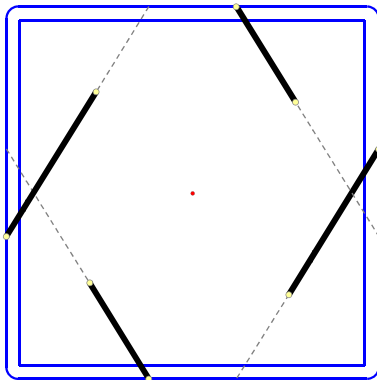
[4]. 菱形 30 面體之星化體

元件上的 (溝槽) 須考慮選用材質的 (厚度)

(1). *Disk Combobulation* 需元件 30 片 (最好使用 現成的正方形 材料, 注意配色)

George W. Hart , 1999. < <http://www.georgehart.com/sculpture/disk-combobulation.html> >

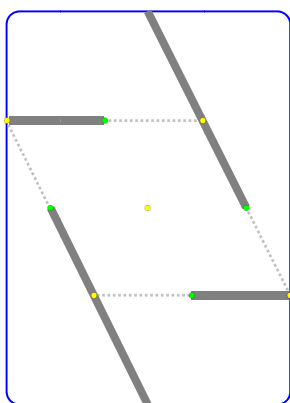
>



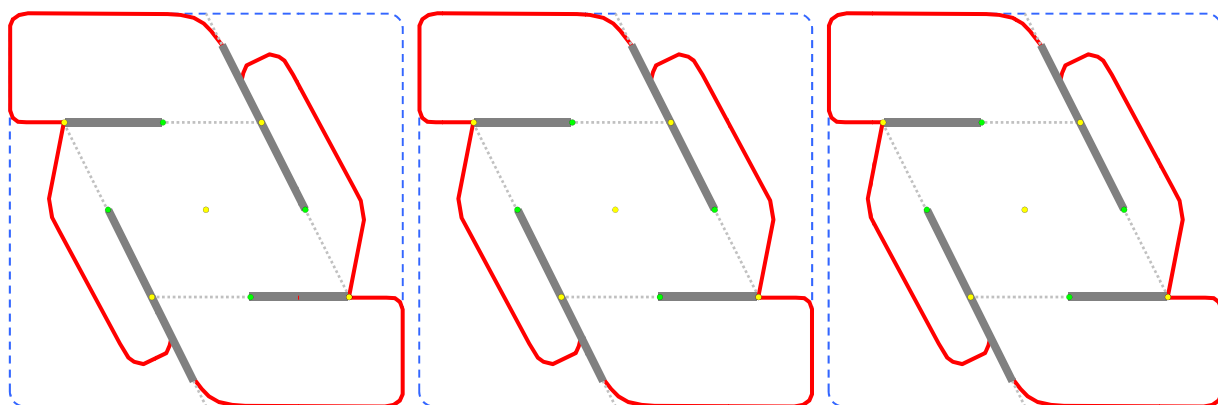
(2). *Poker Faces* 需元件 30 片 (最好使用 現成的矩形 材料, 如撲克牌、名片、...)

Zachary Abel , July 2009 < <http://zacharyabel.com/sculpture/pokerfaces.html> >

現成撲克牌的長寬比 $88\text{mm}/63\text{mm} \approx 1.397$ 與 理想模型的長寬比 $(5-\sqrt{5})/2 \approx 1.382$ 非常接近



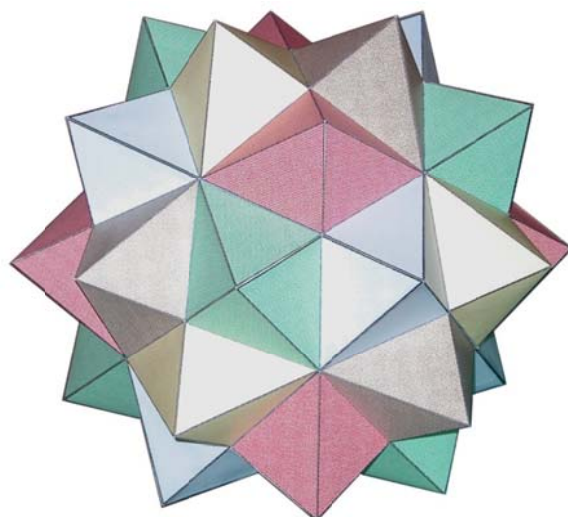
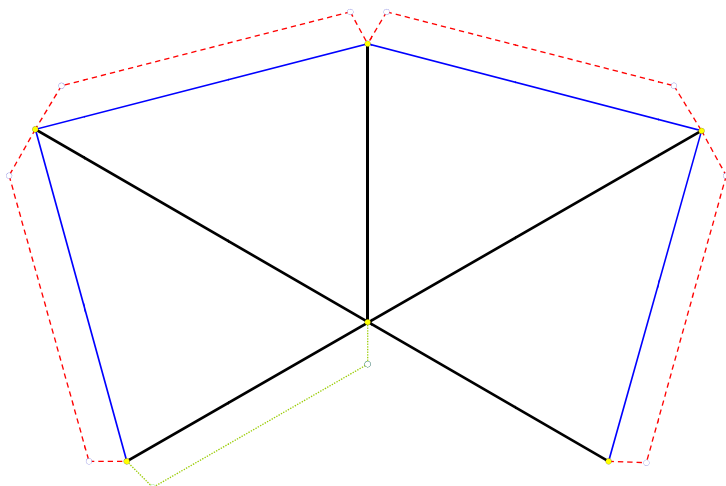
(3). *Compromise II* 需元件 30 片(最好使用 塑膠板 或 名片紙 或 卡紙)
 John Lin Feb. 2013. (尚未有完成模型照片)



{6}. 疊合體模型 及 其他多面體雕塑模型

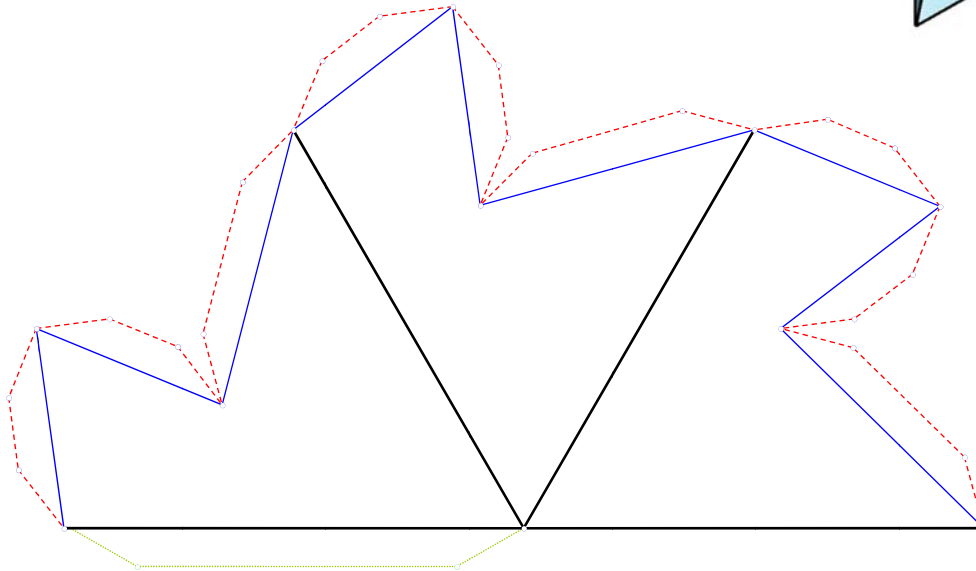
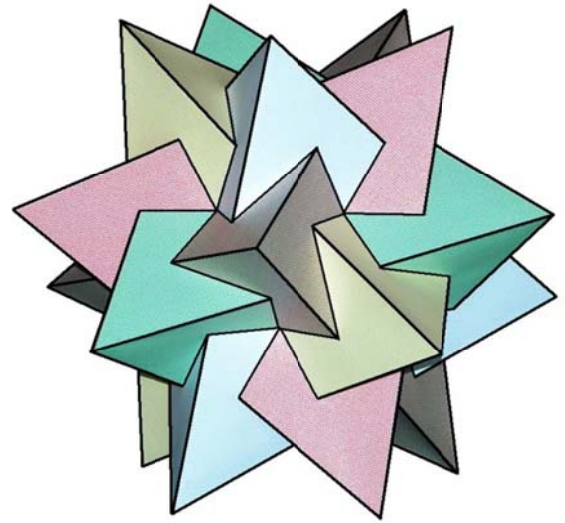
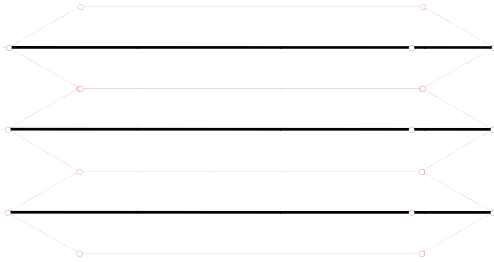
[1]. 正八面體五疊合 (Octahedron 5-compound)

需元件 30 片 配色以 5 色最佳, (建議使用 彩色細卡紙)。



[2]. 正四面體五疊合(Tetrahedron 5-compound)

需元件 20 片 配色以 5 色最佳，(建議使用 彩色細卡紙)。



[3]. *Wood Sculpture #3* 如左圖，需元件 12 片

Vladimir Bulatov , 1998. < http://bulatov.org/wood/sculpture_w_3.html >

[4]. *Dragonflies* 如中圖，需元件 12 片

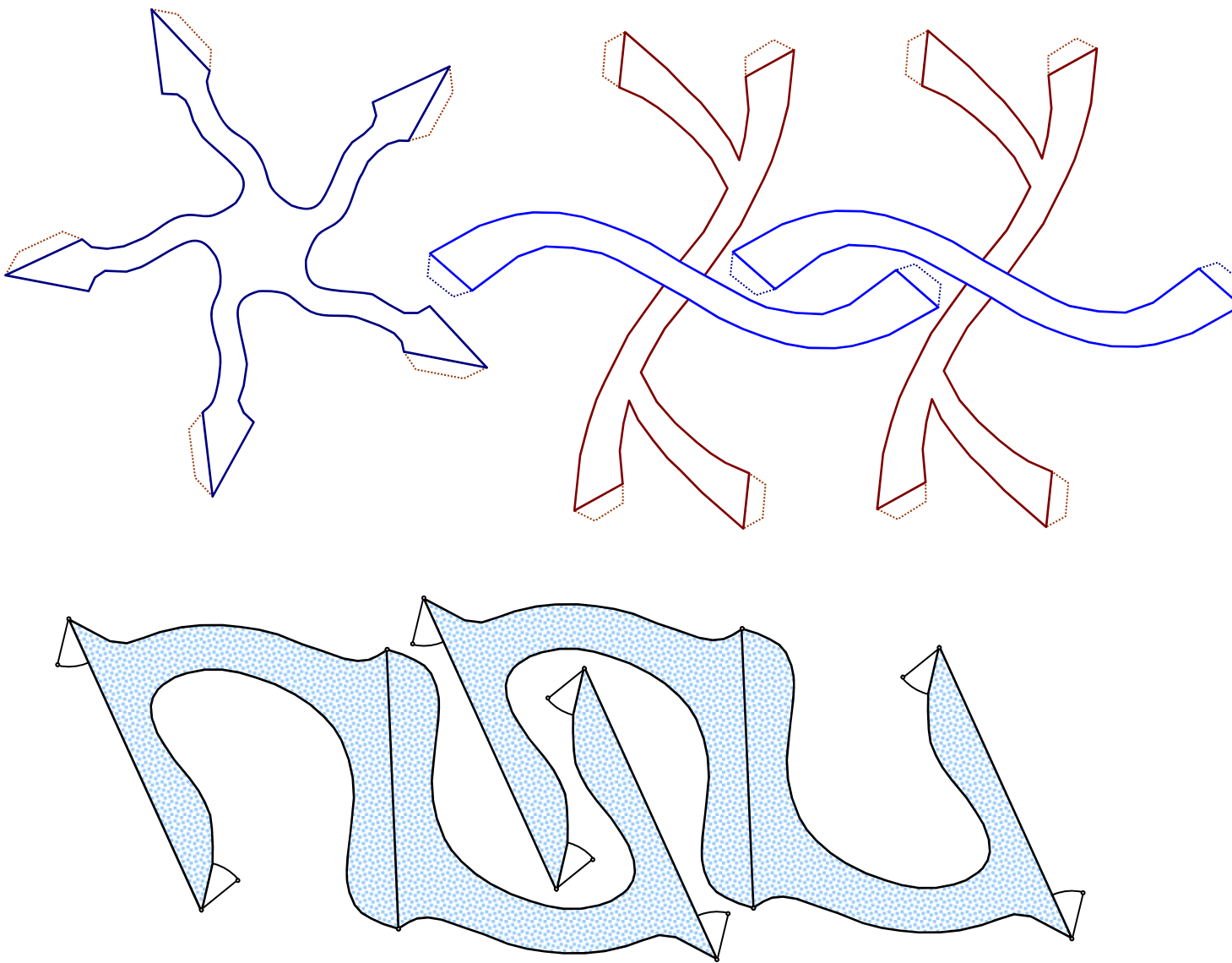
George W. Hart , 2009. < <http://www.georgehart.com/sculpture/dragonflies.html> >

[5]. *Twisted Rivers, Knotted Sea* 如右圖，需元件 30 片

George W. Hart , 2001. < <http://www.georgehart.com/sculpture/twisted-rivers.html> >



下圖是 Word 的繪圖物件，可自行利用 Word 的繪圖功能著色



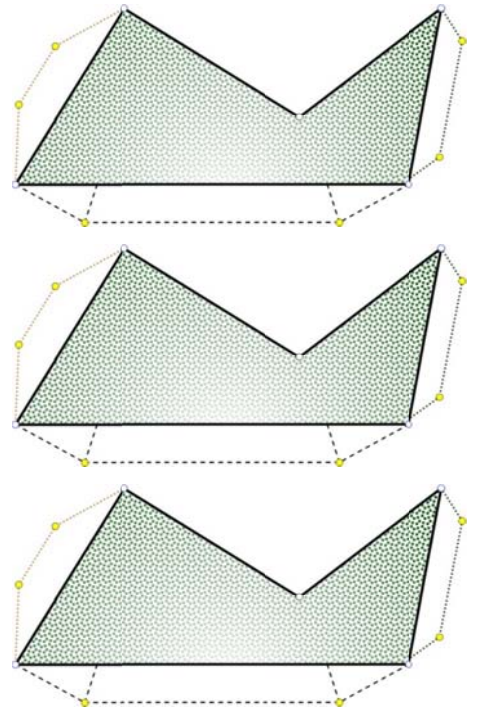
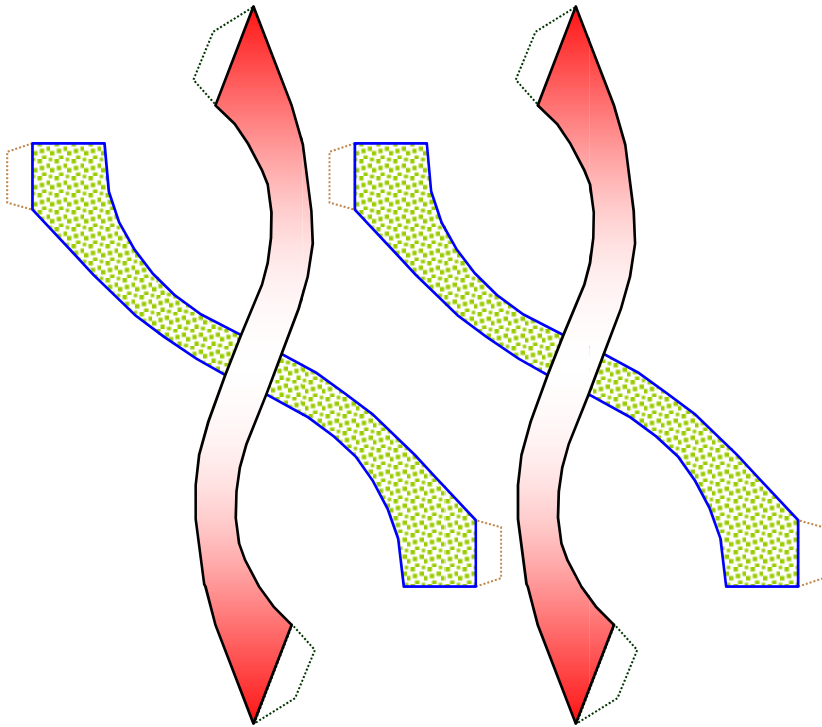
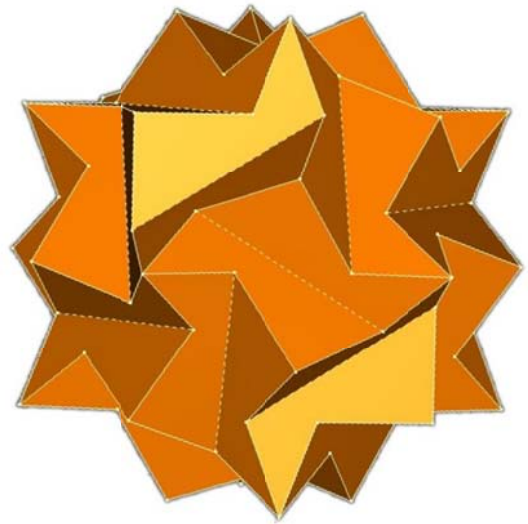
[6]. *Compass Points* 如左圖，需元件 30 片

George W. Hart, 2004. <

<http://www.georgehart.com/sculpture/compass-points-large.html> >

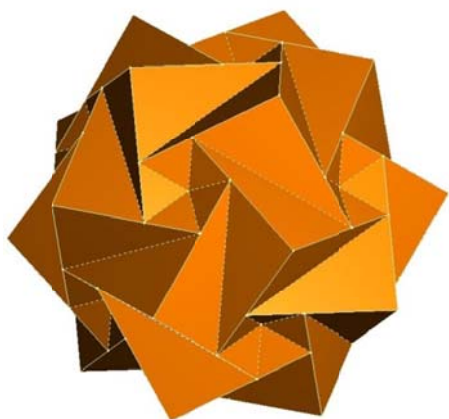
[7]. 【RT 星化體 #015】 如右圖，需元件 60 片

John Lin Feb. 2009. (先黏合成 19 組三角錐，最後 3 片元件，逐一黏上去)



菱形 30 面體(*Rhombic Tricontahedron*) 共有 227 個完整支撐的『*Stellation* 星化延伸體』(其中有 115 reflexible, 112 chiral), 最後一個模型 [7]. 是其中的第 15 個; 因此, 將之簡稱為【*RT* 星化體 #015】; 是一個視覺上非常(星漾光芒)的多面體 如下圖所示, 這些【*RT* 星化體】家族, 是阿強於 2006 年繪製; 希望有朝一日, 這些美麗的多面體模型能被某些人付諸實體呈現。

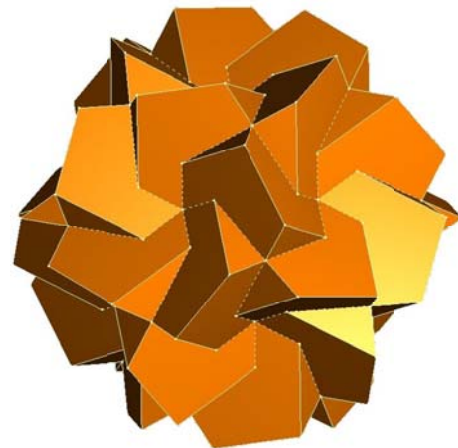
【RT 星化體 #014】



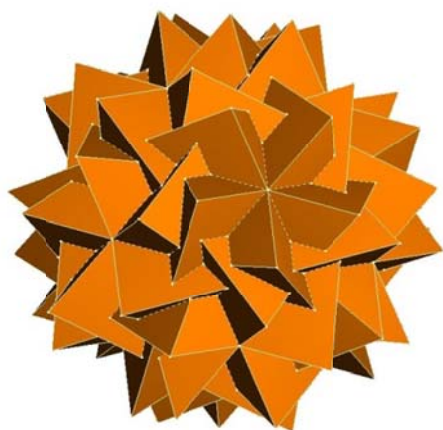
【RT 星化體 #015】



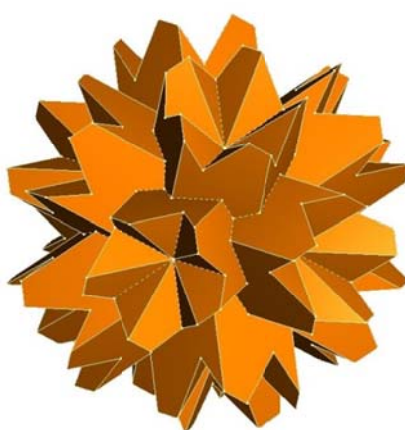
【RT 星化體 #020】



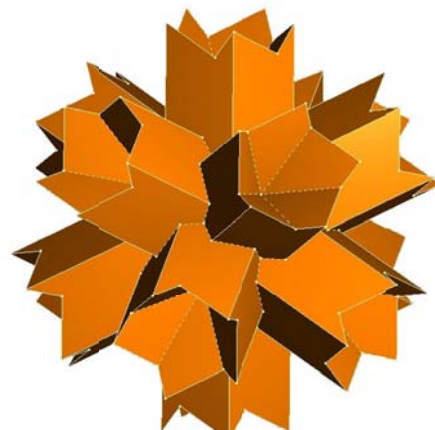
【RT 星化體 #064】



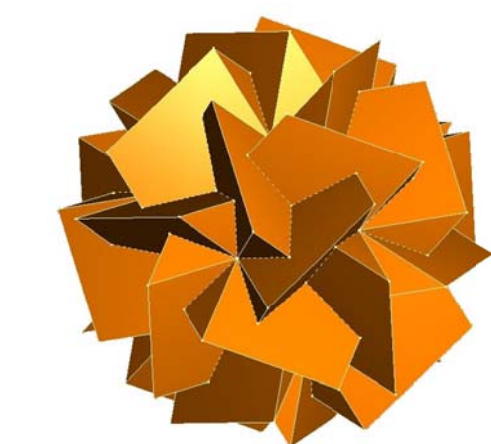
【RT 星化體 #086】



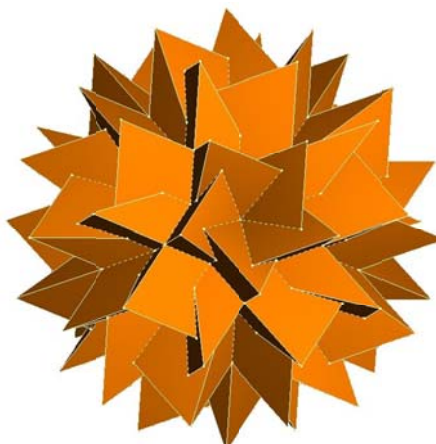
【RT 星化體 #089】



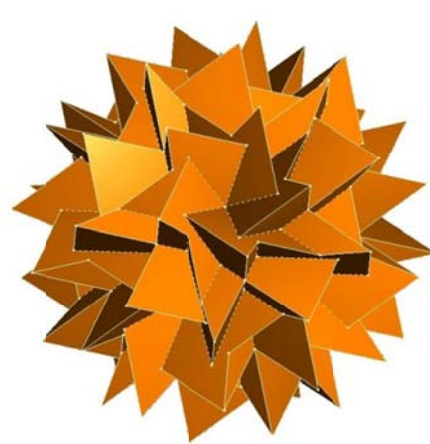
【RT 星化體 #096】



【RT 星化體 #172】



【RT 星化體 #198】



升學考試決定了我們絕大部分的教學內容，決定了我們對各種數學素材的取捨 ... ><
也許我們不應該將一去不返的（寶貴青春）都拿來（服務考試）；
也許我們應該學著去 "探索" 各種可能、學著去 "聆聽" 自己心靈深處的聲音。

幫助學生體會數學（美）無所不在

洪萬生

台灣師大數學系退休教授

書名：數學也可以這樣學

(Mathematics in Nature, Space and Time)

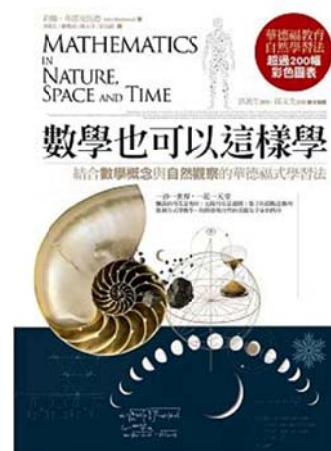
作者：約翰·布雷克伍德(John Blackwood)

譯者：洪萬生, 廖傑成, 陳玉芬, 彭良禎

出版社：商周出版

出版日期：2016/01/09

語言：繁體中文



這一兩年來，「另類的」數學普及書籍成為出版商的注目焦點。以今年出版的作品為例，除了數學小說（mathematical fiction）文類的繼續風行之外，像《這才是數學》這一類的書寫，高舉數學教育的基進（radical）改革旗號，內容基調卻回歸古典（classical），總是帶給我們一種「今昔時空」疊置，不知身心何所依違之感。不過，也正因為這種既在地又抽離的處境，讓我們可以從容地體會數學的如何有趣，甚至如何有用。

本書《數學也可以這樣學》就是另一本這樣一類的數學普及作品，儘管其中包括作者教給七、八年級學生的主要數學課程內容。作者約翰·布雷克伍德（John Blackwood）任教於澳洲史泰納學校 -- 華德福實驗教育系統的一環，因而本書也被納入華德福教育資源（Waldorf Education Resources）叢書。平心而論，作者的數學觀點不如《這才是數學》的作者來得基進，不過，堅持數學的某些進路與練習，則並無二致。而所有這些，則都指向數學的有趣面向。譬如說吧，本書的英文原版書名 **Mathematics in Nature, Space and Time**，就是企圖說明數學在天生自然領域、在空間脈絡以及在時間的流變中的無所不在。作者更是利用本書例證，強調「數學是描述世界的一種語言 - 上帝所創造的一種語言」。對他來說，數學是一種真正的門道或法門，「引領我們走向大自然之工作室（workshop of nature）的漸增理解」，因為「吾人可以相信不僅存有諸神，而且也可以對祂們如何運作產生興趣。」換言之，數學在大自然界中的無所不在，都是上帝的神工，而理解或鑑賞它們的不凡與美妙，則是榮耀上帝的一條進路。

數學實作（mathematical practice）可以「接近神蹟」的華德福教育哲學主張，正是十八世紀西方自然神學（natural theology）的現代翻版。顯然，這種主張就是將數學實作類比為一種「靈修」的過程。因為誠如史泰納（Rudolf Steiner）在他的《靈性活動的哲學》所指出，「有了（數學）思維活動，我們已經掌握了靈性的一個小小的角落。」

既然是靈修，那麼，數學實作回歸古典，依循古代哲人的進路，似乎是勢所必然。這或許也解釋了何以作者那麼鍾愛希臘古典幾何學中的尺規作圖。事實上，本書第 1 章

一開始的練習 1 和 2，就依序是（在給定線段上）作垂線，以及二等分角的尺規作圖。而全書的尺規作圖練習，則多達十幾個。可見，作者在繪製幾何圖形時，就十分貼近地呼應希臘古典幾何的「精確」要求。

希臘數學家比如最具代表性的歐幾里得，就視「精確圖形」與「尺規作圖」是一體兩面。所謂尺規作圖，是指運用圓規與沒有刻度的直尺，在有限多次的步驟中，畫出一個圖形。這是古希臘歐幾里得在他的經典《幾何原本》中，所允許使用的作圖方法。按照他的主張，只要不是運用這種方法所作出來的圖形，就不能稱之為存在，因而也就不是數學研究的合法對象。這種合法性（*legitimacy*）由於結合了嚴格的邏輯證明，使得圖形的「精確」顯得理所當然，從而它們的「存在」也就無庸置疑了。

現在，讓我們簡要介紹本書內容。按照知識內容來分類，各章主題依序是幾何、數論（*number theory*）、柏拉圖立體，以及克卜勒三大行星運動定律。有關最後一章的科學史敘事，作者認為克卜勒的不朽成就，完全在於他「對大自然的節奏理解」，因而可以「成為真正的自然科學」。此外，作者還針對人體（小宇宙）和大宇宙的節奏之對應關係，指出人類可視為巨觀中的微觀，於是，「男人是由上帝的形象造成的」，乃成為數學靈修的最後徹悟。

至於本書前三章內容都曾經在《幾何原本》出現，再度地見證這部偉大經典在作者心目中的地位。事實上，《幾何原本》討論的部份主題如下：第 I、III 及 IV 冊是平面幾何；第 XI-XII 冊是立體幾何；第 VII-IX 冊是數論，還有，第 XIII 一冊 -- 亦即最後一冊 -- 則是柏拉圖立體。附帶一提，這最後一冊的內容與前面各章幾何學（無論平面或立體）之關連，看起來在融貫性（*coherence*）方面上較為不足 -- 亦即，這五個柏拉圖正立方體的存在，顯然並非歐氏幾何學知識系統不可或缺的一環，儘管本冊的所有命題之證明，當然還是完全依賴前面（相關）的命題。對於這樣的安排，數學史家猜測這是歐幾里得為了向柏拉圖「交心」，因為在有關知識本質方面，《幾何原本》被認為比較偏向亞里斯多德，他認為數學是被發明的，不過，他的師傅柏拉圖卻主張數學是被發現的，兩者明顯地有所不同。如將柏拉圖在《蒂勒歐篇》（*Timaeus*）中所塑造的造物主，轉換為基督教的上帝，那麼，作者的數學觀貼近柏拉圖主義，也就不言而喻了。

柏拉圖數學哲學所引伸出來的認知方法當然有其侷限，因為他的《米諾篇》（*Meno*）基於人生而有知，而認為知識是吾人只需經由「啟發」即可恢復的「前世」記憶（*recollecting*）。不過，本書所布置的數學練習，卻大大彌補了這個不足。經由摺紙及立體模型之（動手）製作，再輔以本書一再出現的尺規作圖，作者具體呈現了數學知識是吾人經由實作、再發明（*re-inventing*）而獲得的過程。這種「默合」亞里斯多德的現身說法，對於現代的數學教學現場，其實蠻具有提醒的功用，非常值得我們注意。

以上，我針對柏拉圖 vs. 亞里斯多德在（數學）認識論（*epistemology*）上的歧異，做了一點起碼的釐清。我的目的之一，無非是想要指出：儘管華德福的教育實驗，是基於他們首重靈性活動的教育哲學，然而，無論他們的認識論是否完備，甚至是否可以讓

本書內容來佐證，從教育的所謂成效來看，其實都無關宏旨。這是因為如果第七、八年級階段的數學教育理想，是希望幫助學生體會數學(美)無所不在，從而通過模式(pattern)的掌握來學習它如何有用，那麼，本書內容就可以在我們的學校課程中，佔有一席之地了。

這麼說來，我們又將如何善用本書呢？為了要好好地感受數學那種令人無比驚奇的美，我強烈建議讀者好好地跟隨作者，做那 58 道練習。同時，我也希望讀者好好品味本書插圖，尤其是學生的作品，更是我們老師鼓勵學生在解題之外，應該著力的數學知識活動之範例。總之，本書是一本「另類的」數學普及作品，如果你也能運用另類的眼光來看待它，那麼，你就會有意想不到的收穫。

附記：本文是《數學也可以這樣學》的推薦序。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中

女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！