HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第六期 目錄（2014年6月）

「轉移矩陣」二三事(2)：
歷年高中課本中的穩定狀態

林倉億
國立台南一中

1. 前言

現行的課程綱要中，對轉移矩陣的內容說明只有短短的一句：「轉移矩陣舉應用實例。」這句到了各版本課本的編書教授手上，各自解讀、發揮的結果，就是產出了差異頗大的內容。各版本主要的不同之處在於馬可夫鏈穩定狀態的說明，有的並未使用「穩定狀態」一詞，有的則連是否有穩定狀態的判別法都提到了。這對高中師生來說，還真的有點無所適從的感覺。就讓我們藉由這篇文章，來趟時光旅行，看看馬可夫鏈的穩定狀態是如何在以往及現在的高中課本中呈現的。[1]

2. 歷年高中課本中的馬可夫鏈穩定狀態

轉移矩陣從何時開始進入高中課程之中呢？民國 **72** 年為配合「高級中學法」，修訂並頒布「高級中學數學科課程標準」（**73** 學年度高一新生開始適用，以下簡稱為「**73** 課綱」），轉移矩陣首次納入高中課程之中[2]，期間雖然歷經了幾次課綱的改變：

(1) 「**84** 年高級中學數學課程標準」（**88** 學年度高一新生開始適用，以下簡稱為「**88** 課綱」）

1 為避免讀者混淆，在本文中，「轉移矩陣」指的是各元均非負且各行之總和為 1 的矩陣，而「馬可夫鏈」則指由「轉移矩陣」形成的「機率矩陣」（或稱「狀態矩陣」）過程。除了特意強調「馬可夫鏈」的「穩定狀態」外，本文中概以「轉移矩陣」通稱。

2 當時不是用「轉移矩陣」這個名稱，而是「馬可夫鏈的推移矩陣」，簡稱為「推移矩陣」，或又稱為「馬可夫矩陣」、「隨機矩陣」。

(2) 「**94** 年普通高級中學數學課程暫行綱要」（**95** 學年度高一新生開始適用，以下簡稱為「**95** 暫綱」）
(3) 「**97** 年普通高級中學必修科目數學課程綱要」（**99** 學年度高一新生開始適用，以下簡稱為「**99** 課綱」）
(4) 「**99** 課綱」微調後的「**102** 年普通高級中學必修科目數學課程綱要」[3]（**103** 學年度高一新生開始適用，以下簡稱為「**103** 微調課綱」）

轉移矩陣仍一直保留在高中課程之中，差別在於由哪個年級的學生修習，或是由哪些類組的學生選修（早年俗稱的甲、乙、丙、丁組或近年俗稱的社會組或自然組）。轉移矩陣引進高中課程，見證了台灣數學教育著重應用的轉變，也反映了台灣社會經濟即將由電子業引領的歷史背景。[4]
由此，我們就不難理解，這三十多年來，無論課程綱要如何變革，轉移矩陣總是在矩陣該章之中，並透過許多實際的例子，讓學生們體認到數學與生活、科學或是商業的連結。換句話說，應用實例才是轉移矩陣在高中課程中所扮演的角色，無怪乎現行的課程綱要只有短短「轉移矩陣舉應用實例」這句話。

2.1 「73 課綱」國立編譯館版之《高級中學理科數學下冊》

只有俗稱「自然組」的學生會讀到《高級中學理科數學下冊》，在「**2-6** 矩陣的應用」的乙小節「馬可夫鏈」中，先利用某地三家報紙的市場佔有率的例子，引入這一節的主題：

> **假設某地以甲、乙、丙三種報紙，目前訂閱甲報的人數占訂戶總人數的 20%，訂閱乙報的人數占 30%，訂閱丙報的人數占 50%。……假定市場調查的結果告訴我們：**
> **(1) 目前訂閱甲報的人，有 80%明年會繼續訂閱甲報，有 10%會改訂乙報，有 10%會改訂丙報。**
> **(2) 目前訂閱乙報的人，有 20%明年會改訂甲報，有 70%會繼續訂閱乙報，有 10%會改訂丙報。**
> **(3) 目前訂閱丙報的人，有 10%明年會改訂甲報，有 30%會改訂乙報，有 60%會繼續訂閱丙報。**
>
> **有了這些數據之後，我們就可以做預測了。**

在一連串的說明與計算後可得矩陣 $A=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.6\end{bmatrix}$，以及從第 **0** 年到第 **4** 年這五年

[3] 筆者寫此文時，尚未見到課綱微調後的第四冊課本。
[4] 參閱單維彰 (2012).

間的市場占有率矩陣 $P^{(0)} \sim P^{(4)}$，依序為 $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.38 \\ 0.35 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0.327 \\ 0.398 \\ 0.275 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0.3687 \\ 0.3938 \\ 0.2375 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0.39747 \\ 0.38378 \\ 0.21875 \end{bmatrix}$。

接下來的課本在一串的說明之後，正式給出了相關名詞的解釋（定義）：

……假設某現象所可能呈現的不同狀態只有有限多種：$S_1, S_2, \cdots, S_n$，我們每隔一段固定的時間來觀察它所呈現的狀態。如果此現象在各觀察期呈現某種狀態的過程滿足下面這個性質：在任意觀察期中此現象呈現狀態 S_j 時，則它在下一觀察期呈現狀態 S_i 的機率為 p_{ij}。當一個現象的呈現過程具有這個性質時，我們就說這個過程形成一個馬可夫鏈。

設有一個馬可夫鏈，其可能出現的不同狀態有 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，而由狀態 S_j 轉變成狀態 S_i 的機率為 p_{ij}，仿前面的訂報例子，令

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

矩陣 A 稱為這個馬可夫鏈的推移矩陣。

在推移矩陣 A 中，每個元 p_{ij} 都是大於或等於 **0** 的數；而且每一行中各元的和都等於 **1**，亦即，

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{nj} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

這是因為當這個馬可夫鏈在某一觀察期中呈現狀態 S_j 時，在下一個觀察期中必定呈現 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 中之一，所以對應的機率 $p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}$ 的和必為 **1**。

若一個方陣的各元都大於或等於 **0**，而且每一行中各元的和都等於 **1**，此種方陣稱為馬可夫矩陣或隨機矩陣。……另一方面，馬可夫鏈的推移矩陣必定是馬可夫矩陣。

讀者若仔細讀完上述的引文後，會發現內容敘述雖然和一般熟悉的轉移矩陣沒什麼太大

的不同，但用了三個名詞：「推移矩陣」、「馬可夫矩陣」、「隨機矩陣」來表示今日高中課程中的「轉移矩陣」。這種作法的好壞，見仁見智，但最後一句話就令人玩味了：「**馬可夫鏈的推移矩陣必定是馬可夫矩陣。**」這很容易讓人聯想到：「**那麼，馬可夫矩陣必定是馬可夫鏈的推移矩陣嗎？**」或許讀者會覺得筆者是在雞蛋裡挑骨頭，但筆者高中時的課本就是這個版本，而我們幾個同窗好友真的在「推移矩陣」、「馬可夫矩陣」、「隨機矩陣」這三個名詞間打轉了！

在名詞解釋後，接下來的課本內容就是引導學生去思考穩定狀態的問題，由於這部分十分的重要，筆者作較大篇幅的引述，並在特別值得留意的地方畫底線標示：

從商業的立場來看，我們想知道長時間地持續下去，三家報紙的市場占有率是不是可以趨於
"穩定"？如果我們只觀察前五年，就可發現甲報的市場占有率由 20%提高到 39.747%而丙報則由 50%降低到 21.875%，那麼，長時間持續下去，甲報會繼續提高市場占有率，甚至壟斷報業市場嗎？或是到了某個百分比後就穩定了呢？

要考慮這個問題，我們需要知道當 k 值很大時，第 k 年三報的預計市場占有率矩陣 $P^{(k)}$ 是什麼形式。設 $P^{(k)}=\begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ p_3^{(k)} \end{bmatrix}$，然後，再看當 k 趨向無限大時，數列 $\langle p_1^{(k)} \rangle$、$\langle p_2^{(k)} \rangle$、$\langle p_3^{(k)} \rangle$ 是不是有極限？如果三個數列都有極限，那麼，這三個極限值就可以解釋成在報業市場趨於穩定時，三家報紙的市場占有率。

要計算矩陣 $P^{(k)}$ 的三個元 $p_1^{(k)}$、$p_2^{(k)}$、$p_3^{(k)}$ 的值，仿照前面計算 $P^{(0)}$、$P^{(1)}$、$P^{(2)}$、$P^{(3)}$、$P^{(4)}$ 時所使用的方法是很難歸納出結果的；我們必須使用較高深的矩陣理論才能辦到，這些理論我們在這裏無法說明，所以只能寫出結果。因為 $P^{(k)}=A^kP^{(0)}$，所以我們若得出（利用較高深的矩陣理論）

$$A^k=\begin{bmatrix} \frac{9}{20}+\frac{3}{4}\alpha^k-\frac{1}{5}\beta^k & \frac{9}{20}-\frac{1}{4}\alpha^k-\frac{1}{5}\beta^k & \frac{9}{20}-\frac{5}{4}\alpha^k+\frac{4}{5}\beta^k \\ \frac{7}{20}-\frac{3}{4}\alpha^k+\frac{2}{5}\beta^k & \frac{7}{20}+\frac{1}{4}\alpha^k+\frac{2}{5}\beta^k & \frac{7}{20}+\frac{5}{4}\alpha^k-\frac{8}{5}\beta^k \\ \frac{4}{20}-\frac{1}{5}\beta^k & \frac{4}{20}-\frac{1}{5}\beta^k & \frac{4}{20}+\frac{4}{5}\beta^k \end{bmatrix}$$

，其中 $\alpha=0.6$，$\beta=0.5$

（上面這個等式，同學們可以利用數學歸納法加以驗證），則由此可得

$$P^{(k)}=A^k\cdot\begin{bmatrix}\frac{20}{100}\\\frac{30}{100}\\\frac{50}{100}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{20}-\frac{22}{40}(0.6)^k+\frac{15}{50}(0.5)^k\\\frac{7}{20}+\frac{22}{40}(0.6)^k-\frac{30}{50}(0.5)^k\\\frac{4}{20}+\frac{15}{50}(0.5)^k\end{bmatrix}$$

根據上冊 3-2 節所介紹的極限求法，可知

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{9}{20}-\frac{22}{40}(0.6)^k+\frac{15}{50}(0.5)^k\right)=\frac{9}{20}=45\%$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{7}{20}+\frac{22}{40}(0.6)^k-\frac{30}{50}(0.5)^k\right)=\frac{7}{20}=35\%$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4}{20}+\frac{15}{50}(0.5)^k\right)=\frac{4}{20}=20\%$$

由此可知，當報業市場趨於穩定時，甲報、乙報、丙報的市場占有率分別為 45%、35%、20%。事實上，<u>不論最初的市場占有率矩陣 $P^{(0)}$為何，都可以達到這種穩定狀態（參看習題 2-6 第 6 題）</u>。

習題 **2-6** 第 **6** 題就是：

在乙小節所舉的”訂報機率”問題中，假設 $P^{(0)}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，試利用課文中 A^k 的表示式證明：當 k 趨向無限大時，$P^{(k)}$ 的三個元分別趨近 45%、35%、20%。

從上面引述的課本內容可看出，當年的作者們利用報業市場占有率一題，詳細地說明了穩定狀態就是馬可夫鏈中各元的極限，各元的極限都存在，則穩定狀態就存在，且這是與初始狀態 $P^{(0)}$ 無關的。[5]雖然這之中省略了利用較高深矩陣理論求出 A^k 一般形式的過程，但就數學知識結構來說，當年的課本將如何求穩定狀態交待的十分完整。當然了，課本寫得完整，並不代表學生就會學得完整，特別是課本在整節中就只有報業市場占有率這個例題，並沒有更簡易的二階例題，這對初學者來說，真的是很大的負擔。筆者當年還真是懵懵懂懂混過去的，好在考大學那一年的聯考沒有相關的考題，不然，筆者的人生可能就是另外一套劇本了。

課本作者們最後以矩陣 $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ 為例，介紹了不一定會產生穩定狀態的馬可夫鏈，並再告訴學生說：

---

[5] 本文中的穩定狀態，若無特別說明，則以此做為定義。

如果一馬可夫鏈可達到穩定狀態，而其（n階）推移矩陣為A，則其穩定狀態就是滿足$AX=X$ 的$n\times 1$矩陣。$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，其中$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$，且每一個$x_i$都滿足$0\le x_i \le 1$。

筆者之所以花這樣多篇幅介紹、引述這個版本的課本內容，除了因為它是第一個引進轉移矩陣的課本外，更重要的是，這些內容幾乎就是未來各版本內容的「極限」，說白了，接下來的各個版本，都在這個版本呈現的架構下刪減、調整內容，頂多就是再蜻蜓點水地提到穩定狀態是否存在的另一種判別法，這留待下文再說。

2.2 「88 課綱」之課本

自 **88** 學年度的高一生起，課本市場回到「一綱多本」的局面，就筆者在國家教育研究院教育資源及出版中心的「教科書圖書館」中所查的資料，計有南一、翰林、龍騰、康熙、正中、三民六家出版社的課本版本，轉移矩陣被安排在高三上學期「矩陣」中，此時各版本已統一用「轉移矩陣」這名詞，「馬可夫矩陣」、「隨機矩陣」只分別不起眼地出現在翰林版、三民版之中，至於「推移矩陣」，就再沒有課本用它來指稱「轉移矩陣」了。[6]

至於內容安排，差異不可謂不小。詳細的差異比較，並非本文的焦點，我們只看在「數學甲上冊」（自然組）對馬可夫鏈穩定狀態的說明，請見附錄之表一。六個版本中，只有三民版正式說明何謂馬可夫鏈的穩定狀態，以及提到並非每一個馬可夫鏈都有穩定狀態。南一版除了藉由例子輕描淡寫地提到晴天、雨天的機率會近似於 **0.603**、**0.397**，還呈現了馬可夫證明過的定理（不含定理證明）。在此，筆者要特別指出，這是這個定理首次出現在台灣的高中課本之中，而且，請讀者特別留意，此時這個定理並沒有特定的名稱，就是馬可夫證明過的一個定理。此外，在南一版課本的文字敘述之中，並沒有使用「馬可夫鏈」與「穩定狀態」這兩個名詞。

其餘的四個版本，一致性地都沒有出現「穩定狀態」這名詞。不過，翰林版和正中版用例子輕輕地點到；龍騰版在內容中完全沒有，但在習題中安排了一題求穩定狀態的題目；至於康熙版，徹頭徹尾都沒有「穩定狀態」的蛛絲馬跡！不過，康熙版在其《教師手冊》中，倒對馬可夫鏈的穩定狀態作了不少說明，包括南一版中的定理：

定義（四）：設A為一推移矩陣，若存在自然數k使A^k之各元素均為正數，則稱A為正則馬可夫矩陣。

---

[6] 「推移矩陣」易與平面上的線性變換「推移」混淆，這應該是它不再被使用的原因。

性質(四):若 A 為正則馬可夫矩陣,則存在唯一穩定狀態矩陣 P 使 $AP=P$,且 $\lim_{k\to\infty} A^k$ 各行正好是穩定狀態 P 。

雖然依舊沒有證明該定理，但指出：

本性質告訴我們恰存在唯一矩陣 $AP=P$，這就表示了穩定狀態矩陣恰為固有值 **1** 所對應的固有向量，而此固有向量各元素和當然是 **1** 了！因此，想到求得一個推移矩陣 A 的穩定狀態機率矩陣，通常有兩個方法可循：一個是求推移矩陣對應於 **1** 的單位固有向量，當然其各元素應不為負了；另一個是求 $\lim_{k\to\infty} A^k$ 的任一行矩陣即可。

穩定狀態與固有向量(即特徵向量)的關係,首度出現於此！雖然並沒有作詳細的說明，但好歹已告訴高中教師這兩者間是有關聯的。詳細的說明，可見筆者〈「轉移矩陣」二三事**(1)**：高中課本中穩定狀態的求法〉一文。

2.3 「95 暫綱」之課本

95 學年度高一開始的新課本市場，仍然有六家出版社：南一、翰林、龍騰、康熹、全華、泰宇。「轉移矩陣」置於選修數學 **I** 之中（高三上學期)，所有的高三學生都要修習。筆者將各版本對馬可夫鏈穩定狀態的說明，整理成附錄之表二。總結來說，「**95** 暫綱」的課本比起「**88** 課綱」的課本，關於馬可夫鏈的內容變得更豐富了，除了南一版外，其餘的各版本，不管有沒有使用「穩定狀態」這名稱，都有求穩定狀態的題目。而龍騰版、全華版與泰宇版還都舉例說明不是每一個馬可夫鏈都有穩定狀態。換言之，穩定狀態在課本中的角色是益加明顯與重要！

2.4 「99 課綱」之課本—現行的、即將被取代的課本

99 學年度高一開始的新課本市場，除了「**95** 暫綱」的六家出版社外，曾出版「**88** 課綱」課本的三民書局，再次投入教科書市場。「轉移矩陣」置於第四冊之中（高二下學期)。特別值得一提的是，以前的課程中，學生在學轉移矩陣前都已學過數列的極限，然而，到了「**99** 課綱」，數列極限移至高三下學期，所以，這是第一次沒有極限觀念的轉移矩陣課本。既然沒了極限觀念作預備知識，那編書者如何處理穩定狀態（本質上就是極限)，就值得我們好好一瞧了。同樣地，各版本的相關內容，請見附錄之表三。

「**99** 課綱」這七個版本與以前版本的最大不同之處，就是每一個版本都有涉及穩定狀態！雖然龍騰版、康熹版、三民版沒有使用「穩定狀態」這名詞，但在其內容或例題中，都實質觸及了穩定狀態。或許我們可以這麼說，經過近三十年的教科書演變，「穩定狀態」的意義在教科書之中，已經是「穩定狀態」了！

雖然「**99** 課綱」將極限觀念挪到高三下學期，但各版本在呈現「穩定狀態」時，仍舊引導學生去體會所舉例的馬可夫鏈是會逐漸趨於穩定。事實上，這種呈現方式與先前的課綱版本並無太大的差異，因為，就算學生有了極限的觀念，仍舊無法要學生用極限的方法求出穩定狀態，或是判斷是否有穩定狀態，透過舉例讓學生感受到「逐漸趨於穩定」，還是最好的方式。不過，既然學生沒有極限的觀念，那也就不易去意識到收斂與否的問題，也就是說，若教科書沒有主動提及不會穩定的馬可夫鏈，且教師在課堂上也隻字未提的話，學生們在學完這一節後，所遇到的統統是有穩定狀態的例子，那麼，就很可能會以為馬可夫鏈一定會有穩定狀態。綜觀各版本的教科書，只有全華版與泰宇版有呈現不會穩定的例子,而這兩者在台灣高中的教科書市場的市佔率並不高,也就是說，大部分的高中生所用的課本中，是沒有不穩定的馬可夫鏈的。[7]

無論讀者是否支持在課本中呈現不會穩定的馬可夫鏈，但一定都會同意，課本中的敘述或定義不應該使學生產生誤解。泰宇版、全華版與南一版都只利用 $AX = X$（或 $PX = X$）來定義「穩定狀態」X，其中 A、P 是轉移矩陣，並未納入「穩定狀態與初始狀態無關」這條件。這樣的定義方式不僅與高中教師熟悉的「穩定狀態」不一致，也較不周延，因為，只要是轉移矩陣，就一定有特徵值 **1**，因此，無論轉移矩陣所成的馬可夫鏈會不會收斂,都必存在 X 滿足 $AX = X$（或 $PX = X$）。也就是說,滿足 $AX = X$ 的，未必是一般課堂上所謂的與初始值無關的「穩定狀態」。[8]雖然泰宇版課本利用類題演練 **7** 呈現不會有穩定狀態的例子，以此彌補其定義可能帶來的問題，而全華版直接給出不會穩定的例子，但筆者仍要提醒使用這兩個版本的教師，必須向學生多做說明。[9]至於使用南一版的教師，則必須額外向學生澄清此定義的不周延之處了！

雖然課本的內容架構趨於「穩定」，但各版本《教師手冊》的多樣性增加了，這對高中教師來說，是一大福音。在先前的各版本之中，只有「**88** 課綱」的康熙版《教師手冊》對馬可夫鏈穩定狀態有較為詳細的說明，「**99** 課綱」康熹版承襲了 **88**「課綱版」的教師手冊，而且還多了不穩定的介紹。而龍騰版則在其《教師手冊》中，將課本中例題 **1** 的水量變化，透過遞迴數列 $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n)$ 改寫成 $a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}(a_n - \frac{2}{3})$，即無窮等比數列，繼而求出當 n 趨向無限大時，a_n 趨近於 $\frac{2}{3}$。最特別的，當屬三民版的《教師手冊》了，其利用特徵值、特徵向量、極限證明：當每個元皆為正數的二階轉移矩陣，其馬可夫鏈必有穩定狀態。經歷了近三十年，每一個版的的《教師手冊》對穩定狀態的判別不是完全不寫，不然就以證明要用到高深的矩陣理論帶過。至今，終於有一個版本的編書教授願意在這部分上帶領高中教師往前走一步，雖然這一步只是證明了二階的情

[7] 對於各教科書版的的市佔率，筆者並沒有確切的數字，憑藉的只是筆者與各出版社業務員以及不同縣市高中數學教師接觸所得的結論，雖然不客觀，但與事實應該相去不遠。

[8] 更詳細的討論，請參閱筆者〈「轉移矩陣」二三事(1)：高中課本中穩定狀態的求法〉一文。

[9] 有趣的是，這兩個版本的教科書，在「95 暫綱」的課本中，並不是以這樣的方式來定義「穩定狀態的」（參閱本文附錄表二）。特別是泰宇版，在「95 暫綱」的課本中不僅是用極限來定義「穩定狀態的」，還特別強調與初始狀態無關！到了「99 課綱」的課本，定義本該不能有正式的極限術語，但連「與初始狀態無關」都刪去了，編書教授的考量為何，就教人費解了！

形，但已朝向證明一般情形邁進了一大步！本文篇幅至此已是「又臭又長」，不宜對此再多做討論，筆者將在〈「轉移矩陣」二三事〉這系列文章的第三篇，說明一般情形的證明。

3. 結語

轉移矩陣進入台灣高中數學已滿三十年（**73** 年~**103** 年），我們見到「穩定狀態」確實在教科書的內容中「穩定」了。再者，無論是否有極限觀念作為學生的預備知識，我們仍舊無法嚴謹地向學生解釋為什麼一定會收斂到 $AX = X$ 的 X（有穩定狀態的時候），更無法向學生多講一點是否有穩定狀態的判別法則！有嘗試過的高中老師就會知道，每一個元都是正數的轉移矩陣，別說是學生了，連老師都很難想像其乘法的變化。

最後，即將於 **103** 年實施的微調後的課綱，轉移矩陣將只限縮在二階的情形。這樣限縮的好壞，相信主事的教授們已做過深思熟慮，也透過許多不同的管道傾聽第一線教師的意見，筆者在此不多述，但要提出幾點建議。第一，「穩定狀態」仍要保留在課本之中，不然，學生只要用樹狀圖就能很輕易地解出二階轉移矩陣的相關題目，降低學習轉移矩陣的動機；再說，穩定狀態本身就是馬可夫鏈的核心問題，也是很自然的問題，實在不宜刪除。第二，既然各版本都有穩定狀態的題目或相關內容，而「穩定狀態」也是大多數高中師生已經熟稔的名稱，那何不統一使用這個名稱（當然是與初始狀態無關的），毋需再用類似「長期下來」等字眼來遮掩。

第三，希望各個版本都能呈現不會穩定的例子，但只當作舉例說明，不再延伸成習題或是測驗的題目。筆者相信，只要教師們了解判斷是否會穩定是件很高深的事，就不會有教師將它變成考題來「荼毒」學生了。最後，是否有穩定狀態的判別定理，就讓它從課本中消失吧！從學生的角度來看，不能有 **0** 的轉移矩陣到底會怎麼「轉移」，這根本無從想像，還是只有實際計算一途；而對教師來說，筆者估計，全台灣大多數高中數學教師並不清楚該定理何以成立，甚至其中有不少教師根本就忘記有這個定理。身為一個教師，當然要對所教的內容懂得比學生還透徹，因此，該判別定理就讓它出現在《教師手冊》之中，並請編寫教授們能清楚地說明該定理為何會成立，這不也正是《教師手冊》存在的目的之一嗎？

參考資料

「**97** 年普通高級中學必修科目數學課程綱要」，
http://web.ylsh.ilc.edu.tw/course/overview/07.pdf

「**102** 年普通高級中學必修科目數學課程綱要」，
http://web.ylsh.ilc.edu.tw/course/overview/1020826/07_102adjust.pdf

李恭晴、李虎雄、呂溪木、林福來、陳冒海等 **(1999).**《高級中學理科數學下冊》及《教師手冊》，台北：國立編譯館。

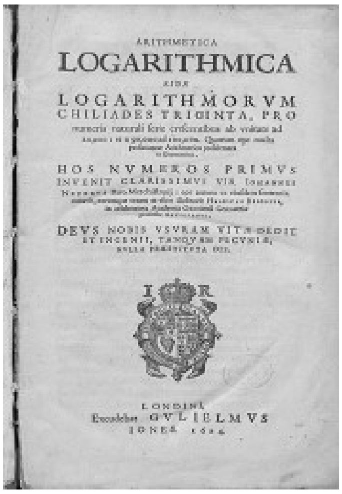
李虎雄、陳昭地、黃登源等 **(2005).**《高級中學數學甲上冊》及《教師手冊》，台中：康熙圖書。

李虎雄、陳昭地、黃登源等 **(2011).**《高中選修數學（Ⅰ)》及《教師手冊》，新北：康熹文化。
李虎雄、陳昭地、黃登源等 **(2011).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，新北：康熹文化。
吳森原、許乃紅等 **(2001).**《高級中學數學甲 (上)》及《教師手冊》，台北：正中書局。
余文卿等 **(2005).**《數學甲 (上)》及《教師手冊》，台北：龍騰文化。
余文卿等 **(2010).**《選修數學Ⅰ》及《教師手冊》，台南：翰林出版社。
林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇等 **(2005).**《選修數學Ⅰ》及《教師手冊》，台南：南一書局。
林福來、陳冒海、陳順宇、陳創義等 **(2012).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，台南：南一書局。
林福來、陳順宇、陳創義等 **(2008).**《高級中學數學甲 (上)》及《教師手冊》，台南：南一書局。
柳賢、左太政等 **(2005).**《高級中學數學甲 (上)》及《教師手冊》，台南：翰林出版社。
許志農、黃森山等 **(2010).**《選修數學Ⅰ》及《教師手冊》，新北：龍騰文化。
許志農、黃森山等 **(2011).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，新北：龍騰文化。
張淑珠等 **(2008).**《選修數學Ⅰ》及《教師手冊》，新北：泰宇出版社。
張淑珠等 **(2011).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，新北：泰宇出版社。
單維彰、鄭惟後等 **(2012).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，台北：三民書局。
單維彰 **(2012).**〈轉移矩陣是怎樣進入高中教材的？〉,《科學月刊》**43(11)**，頁 **812-813**。
楊維哲、蔡聰明、吳隆盛等 **(2004).**《高級中學數學甲 (上)》及《教師手冊》，台北：三民書局。
楊壬孝、蔡天鉞等 **(2009).**《選修數學Ⅰ》及《教師手冊》，新北：全華圖書。
楊壬孝、蔡天鉞等 **(2009).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，新北：全華圖書。
游森棚、林延輯等 **(2011).**《普通高級中學數學第四冊》及《教師手冊》，台南：翰林出版社。

布里格斯的《對數算術》與對數表的製作

蘇惠玉
台北市立西松高中

在高中數學課程中，對數觀念的學習與應用是相當重要的一個單元。不過，在學習的過程中，課程雖然著重在觀念的理解，與對數表的應用，卻沒有明白地告訴學生 $\log 2$ 、$\log 3$ 等等的對數值，到底是怎麼算出來的。因此，學生對此單元的學習容易因為一知半解的情況，而顯得成效不彰。接下來這一系列的相關文章，將說明布里格斯（**Henry Briggs, 1561~1630**）在他的《對數算術》（***Arithmetica Logarithmica***）一書中，所用來建造以 **10** 為底的對數表之幾種方法，並希望能將這些方法應用在目前的數學課堂的學習上，讓學生可以了解或親自動手算算這些常用對數的值。



在納皮爾（**John Napier, 1550~1617**）的對數著作出版之後，當時在倫敦格萊斯罕學院的布里格斯對這項發明極為欽佩，興奮地跑到距離 **400** 哩遠的蘇格蘭與納皮爾會面，這段會面過程是數學史上相當知名的一段故事，根據納皮爾的朋友約翰・馬爾（**John Marr**）的轉述而記錄下來：

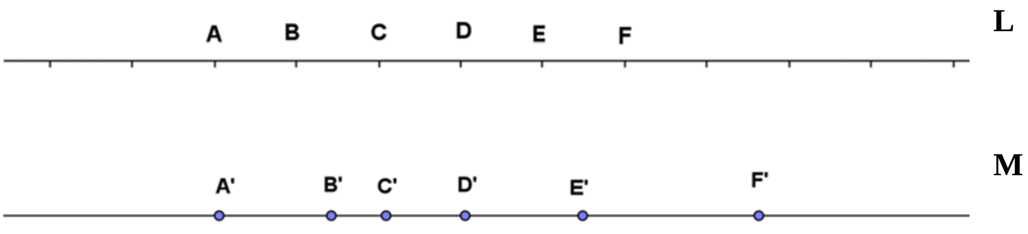
> 一切發生在正當納皮爾因為長久等待打算放棄希望的那一天，當時納皮爾爵士正和約翰•馬爾聊到布里格斯先生時說:「喔，約翰，布里格斯先生應該不會來了。」，這時一陣敲門聲響起，約翰・馬爾急忙跑去開門後發現是布里格斯先生，興奮地將他帶往爵士的房間，他們倆一見面後彼此懷著仰慕之情緊握雙手，不發一語地沈浸在感動之間達十五分鐘之久，後來布里格斯先開口說：「我尊敬的爵士，我完成這次漫長的旅程只為了要親自見您一面，並且想要瞭解起初到底是什麼樣智力或創造力的引擎（**Engine of Wit or Ingenuity**）讓您想到這麼優秀的天文學助力（**Help unto Astronomy**），亦即對數（***Logarithms***）；但是，我尊敬的爵士，現在是你發現了，不過我很好奇在此之前為何沒有其他人發現，現在看來它是如此簡單。」之後布里格斯豪爽地接受了納皮爾爵士的款待。從此之後，在納皮爾爵士活著的每一個夏天，布里格斯都會到蘇格蘭拜訪他。

在會面的討論過程中，布里格斯曾建議納皮爾可以把 **1** 的對數定為 **0**，另外改成以 **10** 為底。納皮爾欣然接受，不過，他此時年事已高，已經沒有心力再重新計算一套對數表，因此，由布里格斯接手這個工作，他於 **1624** 年出版《對數算術》，列出從 **1** 到 **20,000**，以及從 **90,000** 到 **100,000** 所有整數以 **10** 為底的對數，精確到小數點後第 **14** 位。

此書共 **32** 章，接下來將其中與對數表製作有關的幾章簡介如下。

1. 第 **1**～**4** 章

第 **1** 章到第 **4** 章為基本對數觀念介紹。第 **1** 章有兩個引理，布里格斯先說明等比數列（以 a 為底的乘冪，a^n）與等差數列（次方 n 所成的數列）間的對應關係，在此他採用納皮爾的觀點，並將數列間的對應關係擴充到與對數值的對應。納皮爾將這個乘方與指數（次方）間的對應觀念推廣到指數為連續的數，他採用一種運動學的觀點，將等差與等比兩個數列考慮成質點在線段上的運動，一種是等速運動，另一種與距離成比例。如下圖：



直線 ***L*** 上相鄰兩點間的距離相同，亦即 $\overline{AB}=a$，$\overline{AC}=2a$，$\overline{AD}=3\boldsymbol{a}$，**…**。

因此當 ***P*** 點在直線 ***L*** 上等速前進時，經過相等間隔區間的時間都會相等；而直線 ***M*** 中相鄰兩點間的距離成等比，亦即當 $\overline{A'B'}=r$ 時，$\overline{A'C'}=r^2$，$\overline{A'D'}=r^3$ **，…**。設 ***Q*** 點在直線 ***M*** 上移動，且 ***P*** 點與 ***Q*** 點同時分別從 ***A*** 與 A' 點，以相同的初速度出發，則當 ***P*** 點經過 ***B***、***C***、***D***、***E***、**…**等點時，***Q*** 點相對地通過 B'、C'、D'、E'、**…**等點，亦即 ***Q*** 點通過相鄰間隔的時間也會相等。因此當 ***P*** 與 ***Q*** 分別在直線 ***L*** 與 ***M*** 上移動時，滿足 $na \leftrightarrow r^n$ 的對應關係，其中 ***n*** 是連續變動的數。當 ***Q*** 走到任意點 ***x*** 時，***P*** 會走到 ***y*** 點，此時納皮爾將 ***y*** 視為 ***x*** 的「對數」。布里格斯進一步將這種比例關係延伸到對數上：設 l_n 為一等比數列的第 ***n*** 項所對應的對數，則

$$\frac{l_{i+m}-l_i}{m}=\frac{l_{i+n}-l_i}{n}$$

第二個引理為設 ***p, q, r, s*** 為四個對數值，若 $p-q=r-s$，則 $p+s=q+r$。這個引理等價於若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\log(ad)=\log(bc)=\log a+\log d$。

第 **2** 章規定 $\log 1=0$，並說明 **3** 個定理，將內容以現代符號表示如下：

$$A1:\quad \log 2^n = n\log 2;\quad \log 3^m = m\log 3$$

$$A2:\quad \log xy=\log x+\log y$$

$$A3:\quad \log\frac{x}{y}=\log x-\log y$$

第 **3** 章說明將以 **10** 為底的對數，定義成 **10** 的次方，即 $\log 10=1$；第 **4** 章說明對數的首數（**characteristic**）。

2. 第 5～7 章

第 **5** 章到第 **8** 章為計算以 **10** 為底的對數的主要方法。在第 **5** 章中所提的方法，布里格斯將它歸功於納皮爾。他以 $\log 2$ 與 $\log 7$ 為例，說明小一點的質數如何求其對數值。考慮 $\log 2$ ，先計算 **2** 的次方，並標明其位數。為了使對數值精確到小數點後第 **14** 位，布里格斯計算到了 $2^{10^{14}}$ ；不過，他也不是每個都算，而是以四個數一組，每次都計算次方為 2×10^k , 4×10^k , 8×10^k , 10×10^k 的四個數的位數，如下圖一。在計算位數時，布里格斯並沒有將每個數完整算出後計算，他利用了下面這個性質：如要計算兩數相乘後的位數，考慮這兩數的首幾位數字，相乘後的位數不是兩者位數相加，就是兩者位數相加再減 **1**，如下圖二。

	[A]		
	1	0	
	2	1	
	4	2	1
	16	4	2 First Tetrad
	256	8	3
平方	1024	10	4
平方	10,48576	20	7
平方	109,9511627776	40	13 Second Tetrad
	12089,25819,61463	80	25
$2^{20}\times2^{80}$	12676,50600,22823	100	31
	16069,38044,25899	200	61
	25822,49878,08685	400	121 Third Tetrad
	66680,14432,87940	800	241
	10715,08607,18618	1000	302
	11481,30695,27407	2000	603
	13182,04093,43051	4000	1205 Fourth Tetrad
	17376,62031,93695	8000	2409
	19950,63116,87912	1000	3011
		Indices	Number of places

圖一

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 14 \\ \hline 56 \\ 14\ \ \\ \hline 196 \end{array} \leftarrow \text{位數相加減 1} \qquad \begin{array}{r} 74 \\ \times\ 14 \\ \hline 296 \\ 74\ \ \\ \hline 1036 \end{array} \leftarrow \text{位數相加}$$

圖二

當 $2^{10^{14}}$ 的位數為 ***M*** 時，因為 $\log 2^{10^{14}} = 10^{14} \cdot \log 2 = (M-1) + \log N$ ，所以

$\log 2 = \dfrac{M-1}{10^{14}} + \dfrac{\log N}{10^{14}}$ ，後面的 $\dfrac{\log N}{10^{14}}$ 太小忽略不計，因此可得 $\log 2 \approx \dfrac{M-1}{10^{14}}$ 。布里格斯計算所得的 ***M*** 為 **3010,29995,66399**，故可得 $\log 2 \approx 0.030102999566398$ 。

在第 **6** 章與第 **7** 章中，他使用所謂的連續開方法（**continued mean number**）。在第 **6** 章中，他先利用這個方法找出 $1+x$ 的對數值，其中 $x>0$ 但很接近於 0 。他先將 10 連續開平方根，即在 **1** 和 **10** 之間一直求幾何平均數：$\sqrt{1\cdot 10}=10^{\frac{1}{2}}$、$\sqrt{1\cdot\sqrt{10}}=10^{\frac{1}{4}}$、$\sqrt{1\cdot 10^{1/4}}=10^{\frac{1}{8}}$ **……**；他為了要使得到的對數正確到小數點後 **14** 位，因此他計算到小數點後的 **0** 與這些 **0** 之後的數字有相同的位數，因此連續開方 **54** 次，計算到 $10^{1/2^{54}}=r=1+\Delta$，其中 $\Delta=$ **0.0(15)12781,91493,20032,3442**（註：**0(15)**中的 **15** 表示在小數點後有 **15** 個 **0**）；同時也從 **1** 開始連續除以 **2**，計算了 **54** 次，得到 $\dfrac{1}{2^{54}}=$ **0.0(16)55511151231257827021 2**，令其值為 l ，取對數之後，可得 $\log r=\log(1+\Delta)=l$ 為已知，此時 Δ 是個很小的數。從前面第 **2** 章的定理知道真數的次方（ r^n ）與對數值（ nl ）間有比例關係；又因為 Δ 足夠小，因此有下面的對應關係：

次方	近似值	對數值
r^2	$1+2\Delta$	**2** l
r^4	$1+4\Delta$	**4** l
r^8	$1+8\Delta$	**8** l

可知真數去掉 **1** 之後的小數與對數值之間亦有同樣的比例關係。他舉例說明了這樣的比例關係如何使用：

12781,91493,20032,34416,5 } Significant figures to be added after the 15 zeros.
1 - - - - - - - - - - - - - - - -
55511,15123,12578,27021,18158 } Significant figures after the characteristic (which is zero)
43429,44819,03251,804 - - - - - - } and the other sixteen ciphers in the logarithms to be written down.

[Table 6-3]

	Numbers in continued proportion greater than unity.	*Logarithm.*
	1 Unity	0,00000
P	10000,00000,00000,01278,19149,32003,23442	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,12
N	10000,00000,00000,02556,38298,64006,47047	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,24
	10000,00000,00000,03834,57447,96009,70815	0,00000,00000,00000,16653,34536,93773,48106,35
M	10000,00000,00000,05112,76597,28012,94747	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47
	10000,00000,00000,06390,95746,60016,18842	0,00000,00000,00000,27755,57561,56289,13510,59
	10000,00000,00000,07669,14895,92019,43101	0,00000,00000,00000,33306,69703,87546,96212,71
	10000,00000,00000,08947,3404524022,67523	0,00000,00000,00000,38857,80586,18804,78914,83
L	10000,00000,00000,10225,53194,56025,92108	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,95
X	10000,00000,00000,01	0,00000,00000,00000,04342,94481,90325,1804

按照比例關係，***P*** 與 ***X*** 去掉 **1** 之後的值與其對數值成比例，即

0.00000000000000012781914932003234442：**0.0000000000000001**
=0.00000000000000005551115123125782702120：$\log X$ ，因此可得
$\log X =$ **0.00000000000000004342944819032518040**

因此，當真數為$1+\delta$ ，δ是個很小的正數時，若設$\delta = t\Delta$（即$t=\dfrac{\delta}{\Delta}$），可得
$\log(1+\delta)\approx tl \approx \dfrac{l}{\Delta}\delta$；若再令$k=\dfrac{l}{\Delta}$，***k*** 就成了一已知的常數值，可用於類似的對數求值，因此布里格斯可得到一個簡單好用的工具：$\log(1+\delta)=k\delta$ 。

接著在第 **7** 章中，布里格斯利用這個結果來計算$\log 2$ 、$\log 3$的值。以$\log 2$ 為例，他首先計算$\log 1.024$的值：因為若$\log 1.024 = P$ 為已知，則有
$\log 1.024 = \log\dfrac{1024}{1000} = 10\log 2 - 3 = P$ ，那麼$\log 2 = \dfrac{P+3}{10}$ 。利用第 **6** 章的連續開方法，他將 **1.024** 連續開方，作到第 **47** 次，才使得其值小數點後有 **15** 個 **0**，即$(1.024)^{1/2^{47}}$ ＝ **1.0(15)16851605705394977**，令其值為$1+\delta$（$\delta =$ **0.0(15)16851605705394977**），因此
$\log(1.024)^{1/2^{47}} = \log(1+\delta)\approx k\delta$ ，其中 ***k*** 是第 **6** 章算出來的已知常數。如此一來就可求得
$\log 1.024 = 2^{47}\times k\delta$ ，最後他計算得$\log 2 =$ **0.30102,99956,63981,195**。同理可算得$\log 3$的值。在這一章最後，他利用前幾章所得到的對數性質計算$\log 5$與$\log 6$，特別在計算$\log 6$時用了$\dfrac{6^9}{10^7}$ ，這個數關連到下一章的方法。

另外，值得一提的是布里格斯選擇一個與 **1** 足夠接近的數$10^{\frac{1}{2^{54}}}$，根據他的算法距離，我們發現自然對數的底 **e** 這個常數只剩一步之遙而已。設$10^{\frac{1}{2^n}} = 1+x$ ，其中 ***x*** 是個很小的數。由於$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots$ ，故當 ***x*** 很小時，$\ln(1+x)\approx x = \dfrac{1}{2^n}\times\ln 10$ 。在布里格斯的計算中，$10^{\frac{1}{2^{54}}} = 1+\Delta$ ，令$\dfrac{1}{2^{54}} = l$ ，因此$\ln(1+\Delta)\approx\Delta = l\times\ln 10$ ，亦即布里格斯計算的常數$\dfrac{l}{\Delta} = \dfrac{1}{\ln 10} = \log \mathrm{e}$。當然此時的布里格斯並不知道$\ln(1+x)$的展開式。雖說是一步，卻也是需要跨過一道坎的一步啊。

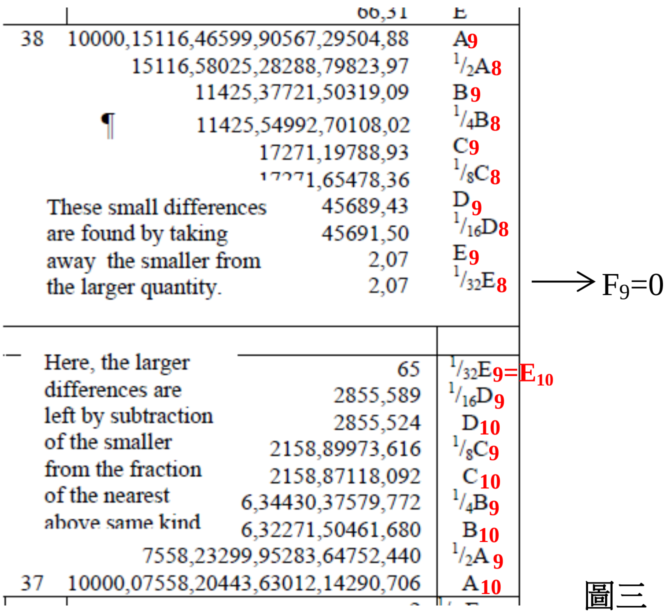
3. 第 **8** 章

在第 **6**、**7** 兩章中，布里格斯為了處理連續開方，需要花費相當大的時間與精力在作開方的計算上。因此，他需要有個方法可以幫助他減少計算量，他將使用的方法寫在第 **8** 章，稱為差分法（**difference method**）。布里格斯在作開方時，發現一個 **1** 點多的

數開方，小數部分的值幾乎是原本的二分之一，藉由這樣的觀察，他利用與一半的「差距」，用一系列的演算法求得連續開方的下一項，以減少龐大的開方工作量。首先，布里格斯選擇作連續幾次平方根後，小數點後面有 **3** 或 **4** 個 **0** 之數為起始值，分別計算 B、C、D、E、F 等欄位的值，他們之間的關係如下：

$1+A_n$	$B_n=\frac{1}{2}A_{n-1}-A_n$	$C_n=\frac{1}{4}B_{n-1}-B_n$	$D_n=\frac{1}{8}C_{n-1}-C_n$	$E_n=\frac{1}{16}D_{n-1}-D_n$	$F_n=\frac{1}{32}E_{n-1}-E_n$

他從 **$6^9/10^7$=1.0077696** 開始作連續開方，其中$1+A_n$表示作第 ***n*** 次開方的值，並依序計算相對應的 B、C、D、E、F 等欄位的值。作到第 **9** 次時，其值為$1+A_9=$ **1.0000151164659990567295048**8，小數點後有 **4** 個 **0**，接著計算 $B_9=\frac{1}{2}A_8-A_9$、$C_9=\frac{1}{4}B_8-B_9$、$D_9=\frac{1}{8}C_8-C_9$、$E_9=\frac{1}{16}D_8-D_9$，而 $F_9=\frac{1}{32}E_8-E_9\approx 0$，因此取 $F_{10}=0$，往回推得 $E_{10}=\frac{1}{32}E_9\approx 6.5\times 10^{-26}$；再由 $E_{10}=\frac{1}{16}D_9-D_{10}$ 與 D_9 的值算得 D_{10}，依此演算法往回類推計算，依序得 C_{10}、B_{10}，最後得 A_{10}，即得下一個開方數值，布里格斯的演算程序如圖三。



圖三

布里格斯接著提供另一種只牽涉到小數部分次方的計算方式。下面以現代符號來解釋：設$1+A_n=1+x$，那麼$1+A_{n-1}=(1+x)^2$、$1+A_{n-2}=(1+x)^4$等等，有需要時可往上一直平方，此時分別計算 B_n、C_n、D_n、E_n 如下：

$$B_n=\frac{1}{2}A_{n-1}-A_n=\frac{1}{2}(2x+x^2)-x=\frac{1}{2}x^2$$

$$C_n = \frac{1}{4}B_{n-1} - B_n = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^4) - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$

$$D_n = \frac{1}{8}C_{n-1} - C_n = \frac{7}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 + \frac{7}{16}x^6 + \frac{1}{8}x^7 + \frac{1}{64}x^8$$

$$E_n = \frac{1}{16}D_{n-1} - D_n = \frac{21}{8}x^5 + 7x^6 + \frac{175}{16}x^7 + \frac{21}{8}x^8 + \cdots$$

依上述演算法的程序代入計算，可得

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= \mathbf{1} + A_{n+1} = \mathbf{1} + \frac{1}{2}A_n - B_{n+1} \\
&= \mathbf{1} + \frac{1}{2}A_n - \frac{1}{4}B_n + C_{n+1} \\
&= \mathbf{1} + \frac{1}{2}A_n - \frac{1}{4}B_n + \frac{1}{8}C_n - D_{n+1} \\
&= \mathbf{1} + \frac{1}{2}A_n - \frac{1}{4}B_n + \frac{1}{8}C_n - \frac{1}{16}D_n + \frac{1}{32}E_n \\
&\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4\right) \\
&\quad - \frac{1}{16}\left(\tfrac{7}{8}x^4 + \tfrac{7}{8}x^5 + \tfrac{7}{16}x^6 + \tfrac{1}{8}x^7 + \tfrac{1}{64}x^8\right) \\
&\quad + \frac{1}{32}\left(\tfrac{21}{8}x^5 + 7x^6 + \tfrac{175}{16}x^7 + \tfrac{21}{8}x^8 + \ldots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

這個式子跟我們利用牛頓二項式定理展開 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ ，$|x| \le 1$ 時的結果，在前面幾項的部分完全正確。

在《對數算術》後面幾章，布里格斯需要將對數表中其他的洞補齊，第 **11** 章為線性內插法；第 **12** 與 **13** 章利用第 **8** 章所使用的差分法，計算兩個已知對數值的數之間其他數的對數值；第 **14** 章由已知對數值 ***L*** 反求真數 ***N***，或是反過來，真數 ***N*** 已知，利用一系列逼近 ***N*** 的近似值之對數值，求其對數值 ***L***。

在教學的應用上，布里格斯在第 **5**、**6**、 **7** 章中所使用的方法，可以利用學習單的形式讓學生實際計算，讓學生經由這些計算過程，進一步體會指數與對數的關係，也讓學生經由 $\log 2$ 、 $\log 3$ 等等的計算，賦予對數實質上的意義。

参考文獻

Briggs' *Arithmetica Logarithmica*, translated and annotated by Ian Bruce, http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html

John Fauvel and Jan van Maanen edited(2000), *History in Mathematics Education, The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

林倉億（**2011**），〈怎麼算 **log2**〉，數學學科中心電子報第 **52** 期。

蘇俊鴻（**2003**），〈數學史融入教學－以對數為例〉，《**HPM** 通訊》第 **6** 卷 **23** 期合刊。

曹亮吉（**2010**），〈對數表的製作〉，網址：**http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=14488**

網路資源：**The Difference Method of Henry Briggs**，網址：**http://www.jacques-laporte.org/The%20method%20of%20Henry%20briggs.htm**

附錄

表一：「88 課綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

<table>
<tr><th>版本</th><th>穩定狀態的敘述</th></tr>
<tr><td>三民版</td><td>如果一機率向量 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 為轉移矩陣 A 的固定機率向量，即 X 滿足 $AX=X$ ，則稱此一馬可夫鏈產生穩定的狀態 X 。不一定每一個馬可夫鏈都會產生穩定的狀態，必須在極限值 $\lim_{k\to\infty}A^kP^{(0)}$ 存在，即

$P^{(k)}=A^kP^{(0)}=\begin{bmatrix}p_1^{(k)}\\p_2^{(k)}\\\vdots\\p_n^{(k)}\end{bmatrix}$ ，數列 $\langle p_1^{(k)}\rangle$ 、 $\langle p_2^{(k)}\rangle$ 、…、 $\langle p_n^{(k)}\rangle$ 都有極限，

纔有穩定的狀態。因為當 $\lim_{k\to\infty}A^kP^{(0)}$ 存在時，就有 $\lim_{k\to\infty}A^kP^{(0)}=X$ ，且 $AX=X$ 。
最後再說明初始狀態不影響穩定狀態。解題方法中，有利用二階的例題，展示用極限求穩定狀態，以及用 $AX=X$ 求穩定狀態這兩種方法。</td></tr>
<tr><td>南一版</td><td>由例題與隨堂練習中可知：不管開始觀察那一天是晴天或是雨天，五天後，每天是晴天的機率約為 0.603，是雨天的機率約為 0.397。因此該市一年中雨天的天數大約為 365×0.397≒145 (天)。

馬可夫（Andrei Andreyevich Markov，俄國，1856~1922）曾經證明：若 A 是一個 n 階轉移矩陣，且 A 或 A 的某一次方的所有的元都是正數，則對於任意的 X_0 ，當 n 趨近無限大時， $X_n=A^nX_0$ 會趨近一個行矩陣 X 。這個 X 滿足下列兩個條件：(i) $(A-I_n)X=O$ ； (ii) X 的各元之和為 1。</td></tr>
<tr><td>翰林版</td><td>只有在某個例題中，從第一天 $X_1=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$ 開始，算到 $X_8=AX_7$ ，其中 $A=\begin{pmatrix}0&0.25\\1&0.75\end{pmatrix}$ 。然後寫道：「我們觀察到當 n 愈大時， X_n 愈接近</td></tr>
</table>

	$X_1=\begin{pmatrix}0.2\\0.8\end{pmatrix}$，**換言之，許多天以後，吳偉雄在甲自助餐店用餐的機率約為 0.2，在乙自助餐店用餐的機率約為 0.8。」**
正中版	在課本例題中，只求到 $A_{18}=P^{18}A_0$，其中 P 為轉移矩陣。在求 P^n 時，是利用計算機取近似值到小數點後第四位，故求到 P^{18} ，就說 $P^{18}=P^{19}=P^{20}=\cdots\cdots$。
龍騰版	在課本例題中，最多只求到 $X_4=P^4X_0$ ，其中 P 為轉移矩陣。不過，在習題中有一題：「**假設台北市每年有 3%的人口移居台北縣，而台北縣每年有 2%的人口移居台北市。若台北縣市人口仍都不變，試求兩地人口之比例。」**
康熙版	無相關說明或例子。

表二：「95 暫綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

版本	**穩定狀態的敘述**
南一版	與「**88** 課綱」的版本一樣，都用晴天、雨天機率的例子來呈現機率會越來越接近定值，也並未出現「馬可夫鏈」與「穩定狀態」這兩個名詞。不過，這版本刪除了馬可夫證明過的定理。
翰林版	**例題 8：有互相連通的大、小水池各一個，兩水池中的魚總數是 1400 條，每天由小水池游向大水池的魚量占小水池魚量的 40%，而從大水池游向小水池的魚量占大水池魚量的 30%。如此日復一日，大水池與小水池的魚量都不變，求大水池與小水池的魚量。** **習題第 6 題：棲息在 A、B 兩小島的某種鳥類總數是 5400 隻，每年 A 島上的鳥 80%會留在島上，而 20%移居到 B 島；B 島上的鳥 75%會留在島上，而 25%移居到 A 島。假設每年依這種方式遷移，兩個島上的鳥數量都保持一定，求 A 、 B 兩島上的鳥數量。** 《教師手冊》：**這類問題最有趣的是找出穩定狀態，即求 $\overline{X}=\lim_{n\to\infty}P^nX$ ，這 $\overline{X}$ 其實是滿足 $\overline{X}=P\overline{X}$ ，是 P 的一個固有向量，在這個例子中，$\overline{X}=\begin{pmatrix}3.33\\4.71\\1.96\end{pmatrix}$。**

龍騰版	只列結果沒有證明： 設A是一個n階轉移矩陣，且A或A的某一次方之所有元都是正實數，則對於任意一個所有元都是非負的實數，且各元的和是 **1** 的$n\times 1$階矩陣X_0，當k趨向無限大時，$X_k=A^kX_0$會趨近唯一的矩陣X。而這個矩陣X就是滿足 **(1)** $AX=X$；　**(2)** X中各元的和為 **1** 的$n\times 1$階矩陣。 例題 **8**：**……(3)** 長期而言此選手的投籃命中率為？ 有不會呈現穩定狀態的例子：$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
康熹版	像這樣的矩陣T稱為轉移矩陣。令$X_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$，其中$a_1$、$b_1$、$c_1$皆為非負實數，且$a_1+b_1+c_1=1$，又令$X_{n+1}=TX_n$，即$X_{n+1}=T^nX_1$。若$X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$，則$a_n$、$b_n$、$c_n$皆非負，且$a_n+b_n+c_n=1$（證明留作習題）。在大部分情況下，可以證明$X_n$會趨於穩定，假設$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$是其穩定狀態（$a$、$b$、$c$非負，且$a+b+c=1$），即$TX=X$。**……**值得注意的是穩定狀態$a$、$b$、$c$的解存在且唯一，它只與轉移矩陣$T$有關，而與初始值$a_1$、$b_1$、$c_1$無關。
全華版	在例題中求到$P^{(8)}=A^8P^{(0)}$後寫道：「事實上，根據馬可夫的理論（請參閱附錄三），甲、乙兩家石油公司的市占率會趨於固定的值（甲公司的市占率 **60%**，乙公司的市占率 **40%**），然而，並非所有的轉移矩陣皆會使值趨於固定的值，如：轉移矩陣$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，**……**，除非$a=b=\dfrac{1}{2}$，否則是不會有固定的值。」

	附錄三：「……此定理的證明已超出本書範圍，因此我們僅將定理敘述如下： 若 A 是馬可夫鏈的 n 階轉移矩陣，且其所有元都是正數，則必存在唯一的矩陣 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，其中 $0 \le x_i \le 1$，$i=1,\ 2,\cdots,\ n$，且 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$，使得 $AX=X$。定理中的矩陣 X（滿足 $AX=X$），我們稱 X 為此馬可夫鏈的穩定狀態矩陣。」
泰宇版	如果機率向量 X 是轉移矩陣 A 的固定機率向量，即 $AX=X$，那麼在一些條件下可以證明：當 $k\to\infty$ 時，$P^{(k)}\to X$，此時我們稱此一馬可夫鏈產生穩定狀態 X。值得一提的是：此穩定狀態與初始狀態 $P^{(0)}$ 無關。」舉例說明之後，「最後要提醒的是，並不是每一個馬可夫鏈都會產穩定狀態，例如 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，……

表三：「**99** 課綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

版本	穩定狀態的敘述
南一版	在例題 **6** 及其隨堂練習之後寫道：「事實上，設機率矩陣 X 為 $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow 甲 \\ \leftarrow 乙 \\ \leftarrow 丙 \end{matrix}$，轉移矩陣 $P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$，若 $PX=X$（X 經 P 轉移後仍是 X 本身），則稱 X 為”穩定狀態”。由 $PX=X$ 得…… $X=\begin{pmatrix} 0.40625 \\ 0.25000 \\ 0.34375 \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow 甲 \\ \leftarrow 乙 \\ \leftarrow 丙 \end{matrix}$。」除此之外，例題或習題之中，都沒以求穩定狀態的題目。
翰林版	由例題 **1** 及其隨堂練習可以觀察出：住在市區的人口比例在四年前有逐年下降的趨勢。我們不禁想要問：如果人口遷移的轉移矩陣一直沒有改變，則在許多年後，市區的人口會一直下降至零嗎？關於這個問題，數學家馬可夫證明了一個理論，說明最終市區及郊區人口的比例

	會趨近於一個穩定狀態。此理論超出高中課程範圍，但是我們仍然在此介紹當作補充，以完整呈現轉移矩陣的應用。 馬可夫定理[1] 設 A 是一個 n 階轉移矩陣，且 A 或 A 的某一次方之所有元都是正實數，則對於任意一個 $n\times 1$ 階的機率向量 X_0，當 k 逐漸增大時，$X_k=A^kX_0$ 會逐漸趨近唯一的 $n\times 1$ 階矩陣 X，而這個矩陣 X 滿足 **(1)** $AX=X$，**(2)** X 中各元的和為 **1**（即 X 也是機率向量），特別地，我們將 X 稱為穩定狀態時的矩陣。 其中**(1)**的 $AX=X$，即代表：若此時的狀態以機率向量 X 表示，則下一時刻代表狀態的機率向量亦為 X，也就是說這個狀態是穩定不動的。
龍騰版	在例 1 中，……，觀察發現：甲瓶的水量由 0.6 公升逐漸增加，乙瓶的水量由 0.4 公升逐漸減少。在此狀況下，如果長時間持續下去，那麼乙瓶的水量會繼續減少，甚至成為「空瓶」嗎？事實上，當 k 趨向無限大時，k 輪後的水量分布矩陣 $X_k=A^kX_0$ 會趨近唯一的矩陣 X，而且這個矩陣 X 就是滿足(1) $AX=X$；(2) X 中各元的和為 1 的 2×1 階矩陣（這證明超過本書範圍，故省略）。現在我們利用這個結論來求矩陣 X……
康熹版	在課本中提到利用電腦算出 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{10}$ 的 **6** 位小數近似值，並一一列出，其中 $X_{n+1}=TX_n$，T 為轉移矩陣，$X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$，然後寫：「**觀察表 3-3，可見 $X_9\approx X_{10}$，進而會得到 $X_{10}\approx X_{11}\approx X_{12}\approx\cdots$。根據理論，$n$ 增大時，X_n 會趨於穩定，即 a_n、b_n、c_n 都會趨於穩定，由表 3-3 的數據可知：a_n 的穩定值 0.505495≈51%，b_n 的穩定值 0.274725≈27%，c_n 的穩定值 0.219780≈22%。由此可見，長期來看（約 9 週後即顯現），A、B、C 三種套餐的占有率會趨於穩定，依序約為 51%、27%、22%。**」

[1] 這個定理在此首度被冠上「馬可夫」的大名，也僅有在這個版本中做如此的稱呼，這並非是該定理通用的名稱。

全華版	基本上在「**95** 暫綱」的版本上略做改變，文字敘述或有不同，但本質上是一樣的。不過，在「**95** 暫綱」的版本中，「穩定狀態」是放在附錄之中，到了此版本，則正式在課文內容中介紹「穩定狀態」： **一般而言，設 A 是一個轉移矩陣，若存在一個行矩陣 X 滿足 $AX = X$，且 X 的各元的和為 1，則稱此行矩陣 X 為轉移矩陣 A 的穩定狀態。……然而，並非所有的轉移矩陣街會使值趨於穩定，如：轉移矩陣 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，……，除非 $a=b=\frac{1}{2}$，否則是不會有固定的值。**
泰宇版	**若有一個狀態 X 滿足 $AX = X$，則稱 X 為此馬可夫鏈的穩定狀態 (stable state)。在前例中，……若該城裡與郊區人口遷移情形不變的話，那麼經長時間改變後，會趨於一個穩定狀態，此時城裡人口（約）占 25%，而郊區人口（約）占 75%。**
三民版	以例題 **1** 做說明，在求出 X_5 、 X_6 、 X_{10} 、 $X_{20} = P^{20}X_0 = \begin{pmatrix} 0.3332 \\ 0.6668 \end{pmatrix}$、……、$X_{30} = P^{30}X_0 = \begin{pmatrix} 0.3333 \\ 0.6667 \end{pmatrix}$後寫道：「**我們發現隨著 n 越來越大，X_n 漸趨穩定：逐漸變成一個固定的狀態矩陣 X，使得 $PX = X$。因為 X 表示長期以後母群體屬於各狀態的比率，所以 X 的元素和必為 1。……以上長期而言的穩定現象，對於有 n 種狀態的情況也都成立，但是其證明超出高中課程範圍。**」