

HPM 通訊

第十五卷 第四期 目錄 (2012年4月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘 謝佳勸（台師大數學系）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出版
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ 數學成熟度的指標：哥德爾不完備定理
- ▣ 宇宙維度：數學與物理的美妙和「弦」
- ▣ 「精進課堂教學能力-教學策略運用」
---馬祖研習有感
- ▣ 求橢圓面積的一個方法
- ▣ 佩雷爾曼與龐加萊猜想：
二十一世紀初的不朽數學成就

數學成熟度的指標：哥德爾不完備定理

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

編者註：本文是《數學女孩：哥德爾不完備定理》（新北市：世茂出版社）的推薦文

本書是結城浩《數學女孩》三部曲中的最後一部，主題是哥德爾不完備定理。儘管這個定理完成於二十世紀上半葉的1931年，但卻是數理邏輯學（mathematical logic）與數學基礎（foundations of mathematics）研究的封頂之作。

在《數學女孩》的第一部曲（台譯書名「數學少女」）中，作者將基本且深刻的數學知識，簡化到一般高中生可以理解的程度，足以顯示他不只受過非常嚴格的數學訓練，因而對於數學思維的掌握非常得心應手，同時，也對如何普及他的數學經驗深具信心。不過，更值得注意的，正如結城浩在《數學女孩：費馬最後定理》（第二部曲）所呈現，他總是適時地從高觀點來歸納或提示一些數學（抽象）結構，讓讀者不至於迷失在徒然解題的迷魂陣中，而無法自拔。此外，他在這三部曲的「旅行地圖」中所進行的連結與對比，也一再地提醒我們數學是一個「有機的整體」，因此，數學史上的一些重大突破，往往需要「跨界」的思維。

另一方面，從小說敘事的觀點來看，作者在這三部曲所採取的「比喻」，都是高中男生對於數學世界 vs. 感情世界的一種未來憧憬：「我對數學的『憧憬』— 和男孩對女孩抱持的情感在某些地方有點相似」。因此，在本書中，數學作為一種文學比喻就出現了另類風貌，值得數學小說的愛好者特別注意。

現在，我們針對這三部曲所處理的主題，提供一點簡要的說明，俾便讀者閱讀時有所參考與借鑒。《數學少女》的主題是生成函數，作者的連結與跨界分享，相當令人感動：「我和米爾迦使用生成函數求得斐波那契數列一般項，就像原本捧在手上快要散落的數列，被名為生成函數的一條線串起來，那真是一次難以言喻的經驗。」此外，他還利用生

成函數處理褶積與分拆數等問題，甚至還提及黎曼 ζ 函數，尤其是 $\zeta(2)$ 與歐拉發現平方倒數無窮和之公式的關係。在該書中，生成函數是一種概念工具，它大大地有助於我們解決許多數學問題，離散型或連續型都包括在內。

這種主題式的敘事，到了《數學女孩：費馬最後定理》與《數學女孩：哥德爾不完備定理》，就變成了偉大的定理。顧名思義，《數學女孩：費馬最後定理》的主題就是費馬最後定理。作者在該書中，為了讓讀者多少掌握有關此一偉大證明的輪廓，特別提供了一個概略的說明。基於此，他還進一步介紹橢圓函數、模曲線與自守形式。最後，懷爾斯（**Andrew Wiles**）在橢圓曲線與自守形式之間成功地搭起一座橋樑，而完成了費馬最後定理的證明。由於這些相關數學知識都極其抽象，一般讀者難以「一睹芳澤」，因此，作者的「旅行地圖」仿效類似網路「超連結」資訊的手法，鼓勵讀者進行形式推論，即使無從理解個別命題（或定理）之內容為何。而這，當然也呼應了這三部曲所強調的數學知識的結構面向（**structural aspects**）意義。

顯然，在第二部曲中，結城浩無法邀請（也不期待！）讀者參與費馬最後定理的證明過程，這一形同登天的任務，當然受限於目前數學教育與普及水準的力有未逮。相形之下，在這三部曲的終曲中，結城浩的野心卻是哥德爾不完備定理之解說。這個普及的願景並非不可企及，因為作者所訴求的正是讀者的數學成熟度。這種成熟度與高等數學的背景知識並不具有必然關係，因此，集合論、數理邏輯以及數學基礎等數學分支之學習，通常只要預設高中數學背景知識即可。事實上，這幾門學問在二十世紀下半葉，也一直吸引英美兩國哲學家的興趣。基於此一考量，在本書中，作者就使盡了渾身解數，希望讀者分享他對不完備定理的理解。

總之，不完備定理之證明所涉及的形式系統（**formal system**）之相容與不完備之相關固然有其難度，但是，對於充滿好奇心的讀者來說，這卻是可以親近的一個智力遊戲或挑戰。任何人（無論有無高等數學之經驗）想要測試數學思維的成熟度，本書的形式證明正是最好的指標。更何況，如果不深入探討此一定理，那麼，物理學家歐本海默（**Robert Oppenheimer**）如何稱頌不完備定理為「理性的極限」，我們大概就不知從何說起了。

宇宙維度：數學與物理的美妙和「弦」

林倉億
國立台南一中

一、前言

筆者在教向量單元的線性組合時，都會連結到現實世界的維度，從一般常稱的三度空間到愛因斯坦的四維時空。由於這都是學生十分熟悉的名詞，老實說，在課堂上也激不起太大的漣漪。不過，從去年年中開始，筆者偶遇了幾篇與宇宙維度有關的科普文本後，才發現原來愛因斯坦的時空維度說並不是終點，近代仍有不少理論物理學家致力於宇宙維度的探索，而這個過程，又與數學家的研究不期而遇，在「弦論」譜出美好的樂章。相關的題材到了作家手中，竟又轉化成引人入勝的小說，還被好萊塢的製片公司相中，即將拍成電影。雖然這其中牽涉到許多深奧的數學與物理，但透過這些作者深入淺出的介紹，筆者這個門外漢倒也看得津津有味。將這些文本資料推薦給學生後，也引起一些同學的興趣，所以，筆者抱著分享的心情為大家引薦這些資料。

二、〈八元數解開宇宙維度〉

這是《科學人》2011年6月號中的一篇文章，由兩個約翰一起合寫（台大數學系翁秉仁教授翻譯），其中一個約翰是新加坡量子科技研究中心的數學物理學家約翰·巴艾茲 (John C. Baez)，另一個則是在美國加州大學河濱分校攻讀博士學位的約翰·伍爾達 (John Huerta)。雖然是篇名中的「八元數」吸引到筆者的目光，但真正引起我好奇的是篇名下的一段文字：「19世紀發明後就被人淡忘的數系，也許可以簡單告訴我們宇宙為什麼是10維。」的確，為什麼是「10」，而這又和數系有什麼關係？

兩位約翰用很淺顯的文字，簡要地介紹了19世紀漢米爾頓 (William Rowan Hamilton) 提出的四元數，以及其好友葛瑞夫茲 (John Graves) (又來一個約翰!) 受四元數啟發而提出了八元數。四元數違背乘法交換律這性質，在當時就已不被許多數學家所接受，因此，我們也就不難想像連乘法結合律都不滿足的八元數的下場了。事實上，連漢米爾頓都不喜歡八元數！八元數在沉寂了100多年後，竟然在理論物理學家所提出的弦論中大放異彩。弦論學家多年來一直宣稱只有10維的弦論理論才沒有矛盾，而10維弦論正是運用八元數的版本。因此，若他們是對的，那麼，八元數就不再是無用的數，或只是數學家捏造出來的數，而是宇宙間真正的數。除了弦論之外，另外一群理論物理學家提出了「膜 (membrane) 理論」，同樣地在運用了八元數之後，他們宣稱宇宙是11維的！雖然至今仍沒有任何的實驗證明弦論或膜理論，但從中我們又再次看到純數學的研究成果，在出乎意料之外的地方變成後世探索自然奧秘的工具。

筆者將此文印給任教班級的學生（每班一份），主要目的是讓學生知道已學過的複數，竟然可以用來研究宇宙維度之祕，而且數學家一開始面對八元數這奇特的數時，表現得就如同學生們一開始接觸到虛數一樣地「霧煞煞」，沒有人知道它有什麼用，更沒

有人會想到在 100 多年後它竟會成為解開宇宙維度的可能關鍵之一。由於上課時間的限制，筆者並未向學生仔細介紹什麼是四元數與八元數，只希望此篇文章能帶給學生不同的視野，有興趣的同學再自行閱讀相關的書籍或文章。不過，不少學生問到同一個問題：「到底是哪 10 維？」這也是筆者心中的疑問，這 10 維到底和愛因斯坦的 4 維有沒有關係？好奇歸好奇，筆者倒也沒去追根究底，豈知竟幸運地在 100 年 12 月出版的《數學傳播》中，看到了這兩者間的緣由。

三、〈丘成桐院士演講—弦論和宇宙隱維的幾何〉

這份演講稿原是丘成桐院士 100 年 8 月 5 日在台灣大學數學系的演講，經《數學傳播》的編輯與注解後而刊登的。文中丘院士介紹他早期研究數學的經歷，說明了他為何對幾何有興趣，又為何會和理論物理掛上關聯。筆者特別在課堂上向學生介紹了丘院士與「Calabi 猜想」的曲折故事，當然，筆者沒有能力解釋什麼是「Calabi 猜想」，只好請學生純粹將它當作一個專有名詞。丘院士在 1973 年的國際幾何會議中，公開宣佈找到了「Calabi 猜想」的反例，因而推翻了該猜想。雖然該報告得到當時與會者包括 Calabi 本人的高度讚揚，但在會後的兩個月，Calabi 提出的疑問，讓丘院士知道自己犯了錯。在經過了多次的失敗後，丘院士轉而相信「Calabi 猜想」是對的，最後終於在 1976 年證明了「Calabi 猜想」。筆者之所以特別向學生介紹此段，是要讓學生知道數學發展並非是有了定義後就自然證明出了定理，事實上，故事常常是反過來寫的：先是有了某些猜想，再慢慢地去證明它為真或為誤。而這整個過程並非總是一帆風順，曲折迂迴是在所難免的，大量的心力投注更是必須的。

丘成桐院士在證明「Calabi 猜想」時，引進了今日所謂的「Calabi-Yau 空間」(Yau 是丘院士姓氏的英譯)，而這空間在 10 多年後，給了弦論學家莫大的助益。弦論學家認為宇宙除了有愛因斯坦的 4 維時空外，在時空的每一個點裡，還隱含了 6 維的空間，而這 6 維空間就是「Calabi-Yau 空間」，它決定了這個宇宙的性質與物理定律，決定了哪些粒子能夠存在，決定了粒子間的相互作用。

至此，筆者終於知道 10 維宇宙和 4 維宇宙之間的 6 維跑哪去了，雖然完全不懂這之間的數學與物理，但是又再次看到數學家的研究成果成為探究物理世界的重要工具，而這演變不是當初的數學研究者所能預期到的。丘院士的演講稿中還介紹其他有趣的部分，十分值得一讀。

或許是丘成桐院士的演講稿對高中生中來說太過專業了，筆者在印發該文後（每班一份），並沒有得到學生的迴響，所以也就不清楚他們是否有所啟發。不過，接下來的這本書，就得到好幾個學生的共鳴。

四、《最後理論》

此書是馬克·艾伯特 (Mark Alpert) 於 2008 年出版的科幻小說，同年此書的中譯本

在台灣由城邦文化出版。其實洪萬生教授早就向筆者大力推薦過此書，只是筆者一直沒有去閱讀它。直到今年寒假逛書店時，發現它的續集《最後理論 2：科學之子》不但已經上市，而且還註明電影「末代武士」的製片公司即將把《最後理論》拍成電影。在好奇心的趨使之下，買了《最後理論》當作寒假時的消遣，當下完全沒想到它竟然會和宇宙維度有關。在介紹此書之前，一定要介紹作者馬克·艾伯特，因為他的求學歷程十分特別，絕對不亞於林書豪。筆者在向學生介紹他時，就是拿來和林書豪作對照的。

馬克·艾伯特大學時期在美國普林斯頓大學攻讀天體物理學，在著名的理論物理學家約翰·理查·戈特三世（又是約翰，第四個了！）的建議之下，艾伯特的大四畢業論文的主題是研究愛因斯坦相對論中的一個問題。由於艾伯特的結究結果十分突出，戈特博士就和他合寫了一篇論文名為「(二加一)維度時空中的廣義相對論」，並刊登在 1984 年的《廣義相對論與引力》期刊中。一個普林斯頓大學的大四學生，就能在科學期刊上發表論文，那他接下來的升學之路，想必也非頂尖名校莫屬了。事實上，艾伯特的確到了常春藤名校哥倫比亞大學去唸研究所，但出人意料之外的是，他並不想當個物理學家，而是希望成為一個詩人，所以他在哥倫比亞大學獲得的碩士學位是寫作碩士，而非物理碩士。林書豪在哈佛商學院畢業後不去華爾街，反而跑去打職業籃球，艾伯特則是從普林斯頓大學物理領域轉換到文學領域，這兩位所做的決定，想必很難見容於台灣社會，但他們都有勇氣做這樣子的決定，並對自己的選擇抱持著熱情。筆者在課堂上藉這兩位「異類」勉勵學生，希望他們能早日找到自己的熱情寄托之處，然後發光發熱。

回到《最後理論》這本書，艾伯特在書中杜撰愛因斯坦在死前已得到物理學的統一場論的方程式，可以將物理學中的電磁場和重力場統一起來，但由於愛因斯坦擔心統一場論又會和相對論一樣，被人類利用成製造毀滅性武器的工具，因此，他生前沒有發表這理論，而將它拆成三個部分，分別告訴三個人。故事就從拼湊愛因斯坦統一場論的一件兇殺案開始，情節十分緊湊且扣人心弦，筆者在此就不多作說明，以免壞了讀者閱讀的樂趣。在這本書的 349~350 頁，弦論、膜理論、10 維宇宙、全像圖、全息原理等這些理論物理學中的名詞統統出現了，艾伯特利用其物理與寫作的專業，巧妙地將這些深奧的物理知識，轉變成小說的題材，再搭配解謎與恐怖份子的情節，讓讀者在閱讀此書時，就彷彿在享受閱讀丹·布朗的《達文西密碼》那般的樂趣。

五、結語

筆者對宇宙維度的認識，真的是一場意外之旅，而在這旅程中，不但自己增長了不少知識，也透過和學生的分享，開拓了學生的眼界。雖然上述介紹的文本都不可能在高中數學課堂上作為教材之用，但透過宇宙維度這一主題，可以讓學生認識數學研究並非是不食人間煙火的抽象理論，相反的，數學不僅曾經影響人類的文明發展，也正在左右我們現在的世界。

「精進課堂教學能力-教學策略運用」——馬祖研習有感

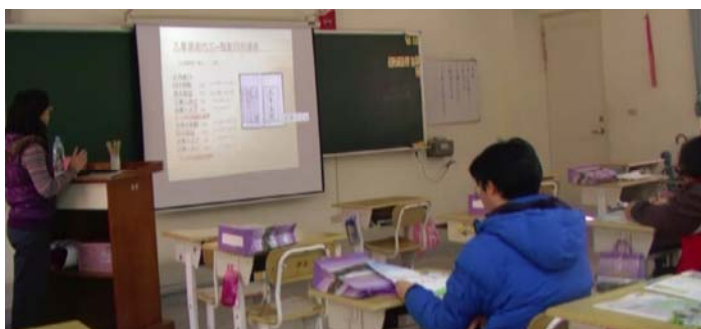
陳玉芬

新北市明德高中

3月24-25日，銜老師之命，到故鄉馬祖做「教師精進課堂教學能力」的經驗分享，內心誠惶誠恐之外，更有些近鄉情怯……，幸好有本校數學科伶芳師、佩瑜師以及偉銘師陪同，算是快樂出航。只是馬祖的交通仍是令人畏懼，一行人原訂3月23日（星期五）晚上坐船，但當天浪大船不開，於是決定搭乘當天下午飛機，結果霧大機不飛，大夥拖著行李回家了。所幸隔天早上也無風雨也無霧，我們順利抵達馬祖南竿機場，此時，已見熱情的馬祖中正國中小學校的王禮民校長（原與我舊識）在向我們揮手，頓時心頭溫暖了起來，這是故鄉的呼喚，也是老友的问候！

奇妙的事又出現了，我們大約比研習時間早15分鐘到達現場，但只見到二位老師，心中正納悶，校長說老師們快到了，因為在南竿本地的老師要開車來，在北竿的老師要搭船來，在東引的老師要坐直升機來，這才發現這樣的一個小島上辦研習是要陸、海、空總動員，是奇觀，也是感慨！

接著我們就進入這次的研習內容，我們安排了三個時段：數學史融入教學實例分享、數學創意教學活動體驗以及綜合座談。首先就個人經驗與老師們分享三個實例：《九章算術》的「正負術」如何與整數減法做整合、¹運用劉徽的「出入相補」處理自然數的平方根問題，²以及從HPM觀點探討「尺規作圖」在教學上的定位。³最後個人將「數食店月刊」定位在「用現在的數學寫未來的歷史」，⁴總認為在百年之後，或許從這些小小的數學記錄中還原一些這個年代曾經歷的一些事實，不敢說是貢獻，只覺得或許能提供一些線索，正如同現在的我們試著在古文本中找到一些答案。顯然地，這些內容對老師們而言是有些陌生的，或許是自己講得不夠精彩，但仍感謝他們全程聽完，沒有睡著（也許是人太少，只有8人，不好睡）。



圖一



圖二

¹ 在現今教科書中，負數的減法與加法的處理是沒有一致性的，個人是想藉由古文本整合出一一致性的解法。

² 在現今教科書中，只提出 $\sqrt{2}$ 的探索活動，個人是想藉由劉徽的「出入相補」處理所有自然數的平方根探索。

³ 透過一些古文本的探討，對於「尺規作圖」的限制或由來，或許可以提供老師們一種參考，不僅增加學生學習樂趣，也增加老師教學的厚度。

⁴ 在數食店月刊中，常常會有數學老師們對生活中的現象以數學的觀點來討論或延伸，

在第二個時段中，我們介紹了本校發展的一些創意教學活動，有一系列的「點、線、面」數學活動，所謂的「點」是每年舉辦一次的「明德數學週」、「線」是每月出刊一次的「數食店月刊」、「面」是每天學生都可以到「數學走廊」行走的「行動數學」，此外還有明德數食園網站，以及校園中的數學步道。所以當天也特地為老師們設計了一個闖關活動，雖然時間緊湊，但老師們人手一張闖關手冊，闖起關來，認真度也不輸給學生們（請參考下圖說明）。

馬祖老師們的闖關實況



第一關 行動數學



第二關 數學DIY



第三關 用骨牌拼出馬祖島嶼



第四關 八卦論數及利用尺規作八卦圖

最後的座談時間較為匆促，因為老師們又要趕在最後的交通運輸時間陸、海、空總動員回到原工作崗位，所以整個研習活動大約下午 5:30 左右結束，這真的是一個有回憶而且無法忘記的研習。

當然王校長也利用在天黑之前，很「盡責地」帶我們一行人環島一圈，介紹當地的民風、文物、古蹟、美食，對同行的老師們而言，是連聲的驚奇與讚嘆，對我而言，卻是莫名的熟悉與感動，也許是心情使然吧，那晚的風特別沁涼；那晚的食物，特別美味；即使是那晚的夜，都讓我特別安穩入睡。

心中默想，如果有機會，我想回到故鄉！



求橢圓面積的一個方法

王裕仁

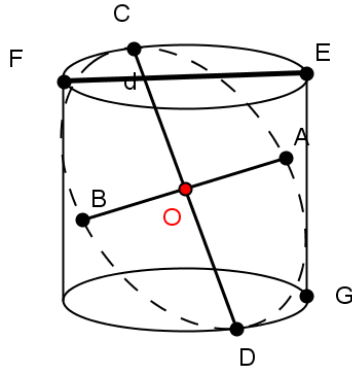
台灣師範大學數學系碩士班研究生

一般我們想到橢圓面積公式的證明方法，不外乎使用微積分的版本：

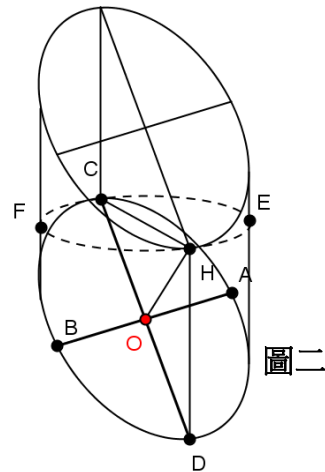
1. 先將橢圓函數一般化 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. 再將其改寫成 $y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$
3. 積分求面積： $4 \int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} dx$ (附註 1)
4. 如此一來可以得到 πab 。

但其實要計算橢圓面積還有一個十分巧妙的方法，被認為是由關孝和所想出來的。(附註 2)

如圖一為圓柱體，假設 $\overline{EF} = 2a$ ， $\overline{EG} = h$ ，則圓柱體積為 $\pi a^2 h$ ，將圓柱從 C 點至 D 點以一平面切過，則平面與圓柱的相交部分為一橢圓。將下半部移置上半部如下圖二。



圖一



圖二

如此一來就形成一個斜橢圓柱，其高為 \overline{OH} ， $\triangle CDH$ 為直角三角形，又 \overline{OH} 為 \overline{CD} 上的高，可求得 $\overline{OH} = \frac{\overline{CH} \times \overline{HD}}{\overline{CD}} = \frac{2a \times h}{2b} = \frac{ah}{b}$ (附註 3)

假設橢圓的面積為 A ，利用圖一與圖二面積相等，所以 $\pi a^2 h = A \times \frac{ah}{b}$ ，整理得到 $A = \pi ab$ 。

附註：

1. 因為橢圓是對稱圖形，所以只要算第一象限面積再乘四倍即可。
2. 這個方法是引自一細井淙，《和算思想の特質》p. 84。
3. \overline{AB} 為橢圓的短軸，同時也是圓地直徑，令為 $2a$ 。 \overline{CD} 為橢圓的長軸，令為 $2b$ 。

參考資料

細井淙(1941)，《和算思想の特質》，共立設合資會社。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。[投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

- 日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬾（東京大學）
 德國：張復凱（Mainz 大學）
 基隆市：許文璋（南榮國中）
 台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
 蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
 郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
 彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）
 李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）
 新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵
 （海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬
 （明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）
 莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
 宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
 桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）
 洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、
 鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
 新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
 新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
 苗栗縣：廖淑芳（照南國中）
 台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、
 賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
 南投縣：洪誌陽（普台高中）
 嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
 台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜
 （後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
 高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
 屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）黃俊才（中正國中）
 澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
 金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

佩雷爾曼與龐加萊猜想：二十一世紀初的不朽數學成就

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：消失的天才（Perfect Rigor: A Genius and the Mathematical Breakthrough of the Century）

作者：瑪莎·葛森（Masha Gessen）

譯者：陳雅雲

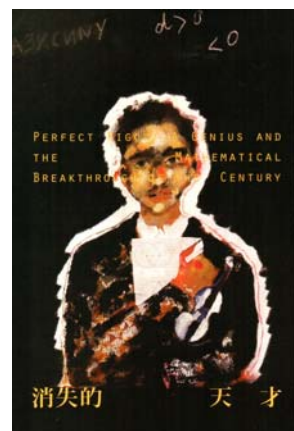
審訂：洪萬生

出版社：臉譜出版社，台北市

出版資料：239 頁，平裝

出版年：2012 年

關鍵詞：佩雷爾曼、龐加萊猜想、拓樸學、百萬美金難題、數學奧林匹亞



公元 2000 年，克雷研究所（Clay Mathematics Institute）在波士頓舉辦的數學千禧年會議，擬定了七大百萬美金難題，作為二十一世紀數學的發展願景。顯然，這意在追隨希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）於 1900 年之壯舉，當年在巴黎舉行的國際數學家會議上，這位德國偉大數學家為二十世紀數學，規劃了 23 道值得解決的難題，亦即後來所謂的「希爾伯特 23 問題」。現在，針對這七個世紀大難題，正如證明費馬最後定理的懷爾斯（Andrew Wiles）指出：「我們不知道它們會在何時解決：有可能要等五年，或者可能一百年。但我們相信解決這些難題，可以為數學發現與景象開創全新的局面。」想不到言猶在耳，其中的「龐加萊猜想」（Poincaré Conjecture）在 2002 年就獲得解決。至於貢獻這個證明的「最後一哩路」之天才，正是俄羅斯數學家格里高利·佩雷爾曼（Grigori Perelman）。

所謂「龐加萊猜想」，是由法國偉大數學家亨利·龐加萊（Henri Poincaré, 1854-1912）— 他與希爾伯特並稱為二十世紀數學雙雄 — 在 1904 年所提出。他的原始版本是三維的情形：

如果一個三維流形（3-dimensional manifold）是平滑且為單連通，那麼，它與三維球 S^3 微分同胚（diffeomorphic）。

為了解決這個猜想，多位數學家在 1960 年代依序證明七維、五維、六維與更高維的情形。接著，證明的進展就完全停頓了下來，直到 1982 年，年僅 32 歲的美國數學家傅利曼（Michael Freedman）證明了四維的情形，而榮獲費爾茲獎。然而，所有這些證明與進路碰上三維本尊，全都束手無策。不過，卻也正是在此時，威廉·瑟斯頓（William Thurston）針對三維流形，提出他的可能切割方式，亦即後來所謂的「幾何化猜想」（geometric conjecture）。然後，理查·漢米爾頓（Richard Hamilton）並緊接著據以擬定他的研究綱領（research programme）。可惜，漢米爾頓與他的團隊功敗垂成，最後利

用他的工具與進路攻頂的，正是可畏的後生小輩佩雷爾曼。

佩雷爾曼將他的證明發表在數學網站上，而非一般數學家所習慣發表的期刊。儘管如此，2006年在馬德里召開的國際數學家會議，還是頒給他數學界的最高榮譽費爾茲獎（Fields Medal）— 這被視為數學界的諾貝爾獎，其獲獎條件甚至比諾貝爾獎還嚴苛，沒想到他竟然拒絕領獎。這種將自我從整個數學社群放逐的作風，甚至也波及克雷研究所所頒贈的百萬美金獎。

這究竟是怎麼回事？數學界一直眾說紛紜，始終無從理解他的內心世界。現在，有了瑪莎·葛森（Masha Gessen）所寫的這一本佩雷爾曼傳記，我們多少可以想像在佩雷爾曼那柏拉圖式理想（Platonic ideal）的數學經驗遭嫉之後，他如何開始退縮，先是離開數學界，然後又從日常生活世界隱遁。

瑪莎·葛森是俄羅斯猶太人，後來，隨雙親移民美國，目前又回到莫斯科擔任新聞工作。她年輕時也曾參加前蘇聯（放學後的）數學俱樂部 — 那是將佩雷爾曼訓練成為一代數學奇才的課程，因此，她有很難得的機緣，可以從佩雷爾曼的師長、同事與朋友，述說一個相當引人但卻令人感傷的天才故事。這本傳記非常值得推薦，它的精彩敘事絕對超過約翰·納許（John Nash）的傳記 — 《美麗境界》（*A Beautiful Mind*）。

不過，根據作者的訪談，沒有人形容佩雷爾曼才華橫溢，只是說他「非常、非常聰明，思考非常、非常精確」。事實上，儘管他揚名立萬的主題是幾何學的延伸 — 拓樸學（topology），然而，「他的幾何想像力也不曾令同事讚嘆，但他們幾乎都對他在解題時所展現百分百的精確度，感到印象深刻。他的大腦幾乎就像萬能的數學壓縮機能把問題壓縮成本質。無論他的腦是怎麼構成的，最終數學俱樂部的同學暱稱它為『佩雷爾曼槌』（Perelman stick），因為它就像一個巨大的想像工具，他總是靜坐著用它思考，然後揮出致命的一擊。」

另一方面，數學俱樂部的老師魯克辛除了引導學生學習數學之外，也介紹他們進入文學和音樂的領域，並以此為己任，但是，佩雷爾曼卻全神貫注數學。由於他的優異表現，在他十四歲時，佩雷爾曼被送進一所數學菁英學校就讀，那就是位於列寧格勒，鼎鼎大名的 239 號數學物理專業學校。這種學校的建制，可以說是前蘇聯一代數學大師柯莫哥洛夫（Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903-1987）的珍貴遺產。他認為「一個人想要成為偉大的數學家，必須具有音樂、視覺藝術和詩方面的涵養。」事實上，他始終醉心研究偉大作家普希金（Pushkin）的詩之形式與結構。此外，他還認為強健的體魄也同等重要。他的一位學生在追思錄中指出：「柯莫哥洛夫曾經特別稱在他很會摔角」。

由此觀之，前蘇聯的數學菁英教育，除了訓練超強的數學奧林匹亞的金牌選手之外，也有相當可貴的教育過程，值得有意鼓勵子女走上這一條窄路的家長參考借鑑。其實，要不是數學奧林匹亞競賽，以佩雷爾曼的猶太人身份，根本被排除在前蘇聯菁英教育體制之外。當然，要是讀者想要瞭解前蘇聯數學社群的社會文化面向，那麼，作者在

本書第一章〈逃入想像的世界〉就提供了一個不可或缺的觀察。譬如說吧，作者以她極為敏銳的眼光，看到她熟悉的蘇共體制下的俄羅斯數學：

俄羅斯孕育出二十世紀一些最偉大的數學家，這件事本身就是一個奇蹟。數學跟前蘇聯時代的做法形成顯著的對比。數學提倡論證，研究胚騰，俄羅斯卻控制人民，迫使他們不斷接受變化、無法預測的現實；數學重視邏輯與一致性，當時的文化卻以華麗虛飾的語言和恐懼為成長的養分；數學要求高度專業的之事才能理解，所以對門外漢來說，數學就像密碼一樣難以解讀；更糟的是，數學主張單一、可知的真理，當時政體的合法性卻是建立在單方認定的真理上。

不過，儘管這種數學文化 vs. 政治文化的強烈對比，「俄羅斯的數學之所以能逃過法令規章的摧殘，主要顛個幾乎毫無關聯的因素。第一，俄羅斯的數學原本可能受創最重，它卻剛好特別堅強。第二，數學太過艱澀，蘇聯領導人偏好的手法無從干涉。第三，它剛好證明在關鍵的時刻對蘇聯有用。」

因此，本書不僅是佩雷爾曼的傳記，同時，也是數學社會學（sociology of mathematics）的一種書寫，任何人想要瞭解前蘇聯如何有能力在數學研究上與美國爭霸，更是不可或缺的參考讀物。讀者若能與論述主要關乎歐美世界的《數學恩仇錄》（*Great Feuds in Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever*）併而觀之，一定可以得到意想不到的收穫。

最後，有關本書之敘事手法，作者的告白值得引述如下：

我撰寫本書的方式跟一般傳記的做法不同。我沒有深入訪談佩雷爾曼。事實上，我完全沒有與他交談過。等我開始撰寫本書時，他已經跟所有記者和大多數人斷絕聯繫。這使我的工作變得更加困難，因為我得想像一個未曾謀面的人，但這也讓這項工作變得更加有趣：就像進行一場研究。幸運的是，大多數曾經與佩雷爾曼親近且熟知「龐加萊猜想」故事的人，願意接受訪談。事實上，有時我覺得這比描繪一個合作的故事主人翁還容易，因為我想寫的並不是佩雷爾曼本人敘述的故事及他對自己的看法 — 而是想找出真相。

旨哉斯言！瑪莎·葛森真是太謙虛了，其實，數學史家撰寫數學家傳記不也是如此嗎？本書所以十足有趣，正是因為作者在「龐加萊猜想」的求解脈絡中，說明佩雷爾曼的數學經驗（mathematical experience），乃至於他與前蘇聯、國際數學社群的互動關係，如何地具有歷史意義。