HPM通訊

第十五卷 第十期 目錄（2012年10月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說？

林倉億
國立台南一中

先看一個例子：「求過$(-1,-2)$、$(1,6)$、$(2,7)$、$(4,93)$四點的插值多項式。」在高中課堂上常用的解法就是求出 $f(x)=A+B(x+1)+C(x+1)(x-1)+D(x+1)(x-1)(x-2)$ 的係數A、B、C、D，即所謂的「牛頓插值多項式」。只要依序利用 $f(-1)=-2$、$f(1)=6$、$f(2)=7$、$f(4)=93$，便可求出$A=-2$、$B=4$、$C=-1$、$D=3$。接下來，讓我們來看看另一種求係數A、B、C、D的方法，請見下表一：[1]

x	-1	**1**	**2**	**4**
$f(x)$	$\boxed{-2}$	**6**	**7**	**93**

$$\frac{6-(-2)}{1-(-1)}=\boxed{4}\qquad \frac{7-6}{2-1}=1\qquad \frac{93-7}{4-2}=43$$

$$\frac{1-4}{2-(-1)}=\boxed{-1}\qquad \frac{43-1}{4-1}=14$$

$$\frac{14-(-1)}{4-(-1)}=\boxed{3}$$

表一

看到沒，框起來的四個數字，由左上到右下，依序不就是係數A、B、C、D的值嗎？神奇吧！更妙的是，若將過這四點的「牛頓插值多項式」寫成不同的形式，例如 $f(x)=A'+B'(x+1)+C'(x+1)(x-2)+D'(x+1)(x-2)(x-1)$，這個方法還是有效：

[1] 讀者若看不出此表中之生成方式，可先見後文之表三。

x	-1	**2**	**1**	**4**
$f(x)$	$\boxed{-2}$	**7**	**6**	**93**

$$\frac{7-(-2)}{2-(-1)}=\boxed{\mathbf{3}} \qquad \frac{6-7}{1-2}=1 \qquad \frac{93-6}{4-1}=29$$

$$\frac{1-3}{1-(-1)}=\boxed{-1} \qquad \frac{29-1}{4-2}=14$$

$$\frac{14-(-1)}{4-(-1)}=\boxed{\mathbf{3}}$$

表二

係數 A'、B'、C'、D'的值依序是-2、**3**、-1、**3**。不信的話，讀者可以拿筆驗算看看！

至此，相信不少讀者心裡開始在想：「這會不會是巧合？」建議讀者不妨把課本或講義拿出來，用這個方法試試，看能不能找到不合的例子。然後再研究研究這個方法倒底在算啥，稍後筆者會請一位「大師」為大家「開釋」。

除了對這個方法的疑惑之外，若有人以為它是某個無名小卒的「不入流」方法，那可就大錯特錯了！這方法實質上是大名鼎鼎的牛頓所使用的方法，差別在於他用的是幾何術語（見圖一）[2]。換句話說，高中課堂上是用多項式的除法原理來解釋「牛頓插值多項式」，但，事實上牛頓本人並沒有使用多項式的除法，反倒是將數值拿來減減、除除，就得到了插值多項式的係數。牛頓將這個方法寫在他的鉅著《自然哲學的數學原理》(***Mathematical Principles of Natural Philosophy***)一書中，目的在於求彗星在軌道上的位置。然而，牛頓在書中只寫出該如何求值，並未說明此法之所以有效的理由，再加上所使用的符號、術語並不易懂，因此，咱們也就不要去深究他到底寫了什麼，直接請「大師」拉格朗日為我們說明吧！

[2] 圖片取自 Google Book 網站中 *Principia: Vol. II: The System of the World* 之頁 499-500。

LEMMA V

To find a curved line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points.[1]

Let those points be A, B, C, D, E, F, &c., and from the same to any right line HN, given in position, let fall as many perpendiculars AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.

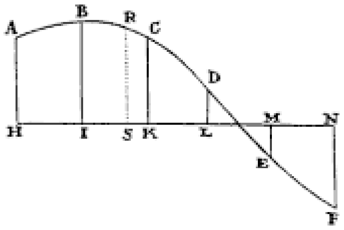
$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$

$c \quad 2c \quad 3c \quad 4c$

$d \quad 2d \quad 3d$

$e \quad 2e$

f



CASE 1. If HI, IK, KL, &c., the intervals of the points H, I, K, L, M, N, &c., are equal, take b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c.; their second differences, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c.; their third, d, $2d$, $3d$, &c., that is to say, so as AH − BI may be $= b$, BI − CK $= 2b$, CK − DL $= 3b$, DL + EM $= 4b$, − EM + FN $= 5b$, &c.; then $b - 2b = c$, &c., and so on to the last difference, which is here f. Then, erecting any perpendicular RS, which may be considered as an ordinate of the curve required, in order to find the length of this ordinate, suppose the intervals HI, IK, KL, LM, &c., to be units, and let AH $= a$, − HS $= p$, ½p into − IS $= q$, ⅓q into + SK $= r$, ¼r into + SL $= s$, ⅕s into + SM $= t$; proceeding in this manner, to ME, the last perpendicular but one, and prefixing negative signs before the terms HS, IS, &c., which lie from S towards A; and positive signs before the terms SK, SL, &c., which lie on the other side of the point S; and, observing well the signs, RS will be $= a + bp + cq + dr + es + ft$, + &c.

[1] Appendix, Note 20.

CASE 2. But if HI, IK, &c., the intervals of the points H, I, K, L, &c., are unequal, take b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c., divided by the intervals between those perpendiculars; c, $2c$, $3c$, $4c$, &c., their second differences, divided by the intervals between every two; d, $2d$, $3d$, &c., their third differences, divided by the intervals between every three; e, $2e$, &c., their fourth differences, divided by the intervals between every four; and so forth; that is, in such manner, that b may be $= \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c., then $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c., then $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. And those differences being found, let AH be $= a$, − HS $= p$, p into − IS $= q$, q into + SK $= r$, r into + SL $= s$, s into + SM $= t$; proceeding in this manner to ME, the last perpendicular but one; and the ordinate RS will be $= a + bp + cq + dr + es + ft$ + &c.

COR. Hence the areas of all curves may be nearly found; for if some number of points of the curve to be squared are found, and a parabola be supposed to be drawn through those points, the area of this parabola will be nearly the same with the area of the curvilinear figure proposed to be squared: but the parabola can be always squared geometrically by methods generally known.

…………………………………

圖一

方程式的數目和未知的係數 a、b、c、……之個數一樣多。將這些方程式彼此相減，剩下的會被 $q-p$、$r-q$……整除，在除完之後，我們可得到：

$$\frac{Q-P}{q-p} = b + c(q+p) + d(q^2 + qp + p^2) + \cdots$$

$$\frac{R-Q}{r-q} = b + c(r+q) + d(r^2 + rq + q^2) + \cdots$$

……………………………………………………

令 $\frac{Q-P}{q-p} = Q_1$，$\frac{R-Q}{r-q} = R_1$，$\frac{S-R}{s-r} = S_1$，……；然後用相同的減法與除法，我們可以得到：

$$\frac{R_1 - Q_1}{r-p} = c + d(r+q+p) + \cdots$$

$$\frac{S_1 - R_1}{s-q} = c + d(s+r+q) + \cdots$$

……………………………………………………

同樣地，令 $\frac{R_1 - Q_1}{r-p} = R_2$，$\frac{S_1 - R_1}{s-q} = S_2$，……；然後我們可以再得到：

$$\frac{S_2 - R_2}{s-r} = d + \cdots$$

……………………

如此不斷地反覆作下去。

用這個方法我們可以求出係數a、b、c、……之值，然後從最後一個開始代回一般式$y=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$中，在化簡之後就可以得到下列的式子：

$$y=P+Q_1(x-p)+R_2(x-p)(x-q)+S_3(x-p)(x-q)(x-r)$$

無論有多少項，我們都可以很容易地繼續寫下去。

若我們將拉格朗日的說明，轉成表格，並以求過(p,P)、(q,Q)、(r,R)、(s,S)四點的插值多項式為例，讀者更能清楚拉格朗日所說的牛頓的方法，就是筆者一開始呈現的方法：

x	p	q	r	s
$f(x)$	$\boxed{P}$	Q	R	S

$$\frac{Q-P}{q-p}=\boxed{Q_1} \qquad \frac{R-Q}{r-q}=R_1 \qquad \frac{S-R}{s-r}=S_1$$

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p}=\boxed{R_2} \qquad \frac{S_1-R_1}{s-q}=S_2$$

$$\frac{S_2-R_2}{s-p}=\boxed{S_3}$$

表三

剩下來的問題就是，似乎拉格朗日也沒有解釋為何這樣子的算法是正確的。其實，拉格朗日是有說明的，只不過「大師」的話總是言簡意賅、微言大義，不仔細想想還無法參透。拉格朗日不是有寫：「求出係數a、b、c、……之值，然後從最後一個開始代回一般式$y=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$中，在化簡之後就可以得到……」讓我們用表格的這個例子實際操作一次：

假設$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，(p,P)、(q,Q)、(r,R)、(s,S)四點代入得

$P=a+bp+cp^2+dp^3$ ……**(1)**　　$Q=a+bq+cq^2+dq^3$ ……**(2)**

$R=a+br+cr^2+dr^3$ ……**(3)**　　$S=a+bs+cs^2+ds^3$ ……**(4)**

$$\frac{(2)-(1)}{q-p}\Rightarrow Q_1=b+c(q+p)+d(q^2+qp+p^2)\ \cdots\cdots\textbf{(5)}$$

$$\frac{(3)-(2)}{r-q}\Rightarrow R_1=b+c(r+q)+d(r^2+rq+q^2)\ \cdots\cdots\textbf{(6)}$$

$$\frac{(4)-(3)}{s-r}\Rightarrow S_1=b+c(s+r)+d(s^2+sr+r^2)\ \cdots\cdots\textbf{(7)}$$

$$\frac{(6)-(5)}{r-p} \Rightarrow R_2 = c + d(r+q+p) \cdots\cdots \textbf{(8)}$$

$$\frac{(7)-(6)}{s-q} \Rightarrow S_2 = c + d(s+r+q) \cdots\cdots \textbf{(9)}$$

$\dfrac{(9)-(8)}{s-p} \Rightarrow S_3 = d$ ，代回**(8)**式得 $c = R_2 - (r+q+p)\cdot S_3$；代回**(5)**式得

$b = Q_1 - (q+p)\cdot R_2 + (pq+qr+rp)\cdot S_3$；代回**(1)**式得 $a = P - p\cdot Q_1 + pq\cdot R_2 - pqr\cdot S_3$；

故得

$$f(x) = \left[P - p\cdot Q_1 + pq\cdot R_2 - pqr\cdot S_3\right] + \left[Q_1 - (q+p)\cdot R_2 + (pq+qr+rp)\cdot S_3\right]\cdot x + \left[R_2 - (r+q+p)\cdot S_3\right]\cdot x^2 + S_3\cdot x^3$$

$$= P + (x-p)\cdot Q_1 + \left[x^2 - (p+q)x + pq\right]\cdot R_2 + \left[x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+qr+rp)x - pqr\right]\cdot S_3$$

$$= P + Q_1(x-p) + R_2(x-p)(x-q) + S_3(x-p)(x-q)(x-r)$$

嗯！兩位數學大師果然都是對的！[3]不過，這樣子反覆迭代實在是太累人了，所以，拉格朗日繼續寫道：

> 既然 y 的值是 P、Q、R、⋯⋯，對應的 x 值是 p、q、r、⋯⋯，顯而易見的，y 的表達式將會是
>
> $y = AP + BQ + CR + DS + \cdots$
>
> 其中 A、B、C、⋯⋯一定可以用 x 來表示並且滿足 $x = p$ 代入後得到
>
> $A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\cdots$
>
> 同樣地，$x = q$ 代入後得到
>
> $A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 0\cdots$
>
> $x = r$ 代入後，同樣地得到
>
> $A = 0,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0\cdots$ ，如此等等。
>
> 由此，很容易可以推斷出 A、B、C、⋯⋯一定具有下列的形式：
>
> $$A = \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\cdots}{(p-q)(p-r)(p-s)\cdots}$$
>
> $$B = \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\cdots}{(q-p)(q-r)(q-s)\cdots}$$
>
> $$C = \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\cdots}{(r-p)(r-q)(r-s)\cdots}$$
>
> ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

---

[3] 筆者此處僅推導次數為三的情形，至於一般化的情形，可參閱沈朋裕〈高中課程中的 Lagrange 插值多項式〉一文。

其中分子和分母的項數比給定曲線上點的數目還要少 **1**。

看到這裡，相信讀者都看出來這就是所謂的「拉格朗日插值多項式」了！原來，我們在高中課堂上教給學生的，就是拉格朗日的原始想法！

以上拉格朗日的說法，出自他的一篇論文，原文收錄於 ***Journal de l'École polytechnique, VIIe et VIIIe cahiers, t. II, 1812***，讀者可從法文網站 **gallica** 上找到的原始的法文內容（見下圖二）。[4]至於中譯文則是筆者譯自 ***A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*** 書中的英譯文，若有翻譯不好的地方，還請包涵。

284 LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

tière et rationnelle de l'abscisse, telle que

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

y étant l'ordonnée et x l'abscisse. Ces sortes de courbes s'appellent en général *paraboliques*, parce qu'on peut les regarder comme une généralisation de la parabole, qui a lieu lorsque l'équation n'a que les trois premiers termes. Nous en avons déjà montré l'usage dans la résolution des équations; mais leur considération est toujours utile dans la description approchée des courbes; car on peut toujours faire passer une courbe de ce genre par tant de points qu'on voudra d'une courbe proposée, puisqu'il n'y a qu'à prendre autant de coefficients indéterminés $a, b, c, \dots$ qu'il y a de points proposés, et déterminer ces coefficients de manière que les abscisses et les ordonnées, pour ces points, soient données. Or il est clair que, quelle que puisse être la courbe proposée, la courbe parabolique ainsi tracée en différera toujours d'autant moins que le nombre des points donnés sera plus grand, et leur distance moindre.

Newton est le premier qui se soit proposé ce Problème; voici la solution qu'il en donne :

Soient P, Q, R, S, … les valeurs des ordonnées y qui répondent aux valeurs $p, q, r, s, \dots$ des abscisses x; on aura les équations suivantes

$$\begin{aligned} P &= a + bp + cp^2 + dp^3 + \dots, \\ Q &= a + bq + cq^2 + dq^3 + \dots, \\ R &= a + br + cr^2 + dr^3 + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

le nombre de ces équations devant être égal à celui des coefficients indéterminés $a, b, c, \dots$. Soustrayant ces équations l'une de l'autre, les restes seront divisibles par $q-p$, $r-q, \dots$, et l'on aura, après la division,

$$\begin{aligned} \frac{Q-P}{q-p} &= b + c(q+p) + d(q^2+qp+p^2) + \dots, \\ \frac{R-Q}{r-q} &= b + c(r+q) + d(r^2+rq+q^2) + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

SUR LES MATHÉMATIQUES. 285

Soit

$$\frac{Q-P}{q-p} = Q_1, \quad \frac{R-Q}{r-q} = R_1, \quad \frac{S-R}{s-r} = S_1, \quad \dots;$$

on trouvera de la même manière, par la soustraction et la division,

$$\begin{aligned} \frac{R_1-Q_1}{r-p} &= c + d(r+q+p) + \dots, \\ \frac{S_1-R_1}{s-q} &= c + d(s+r-q) + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Soit de même

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p} = R_2, \quad \frac{S_1-R_1}{s-q} = S_2, \quad \dots;$$

on trouvera

$$\frac{S_2-R_2}{s-r} = d + \dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$

et ainsi de suite.

On trouve, de cette manière, les valeurs des coefficients $a, b, c, \dots$, à commencer par les dernières, et, les substituant dans l'équation générale

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

il viendra, après les réductions, cette formule, qu'il est aisé de continuer aussi loin qu'on voudra,

$$y = P + Q_1(x-p) + R_2(x-p)(x-q) + S_3(x-p)(x-q)(x-r) + \dots.$$

Mais on peut réduire cette solution à une plus grande simplicité par la considération suivante.

Puisque y doit devenir P, Q, R, …, lorsque x devient $p, q, r, \dots$, il est aisé de voir que l'expression de y sera de cette forme

$$y = AP + BQ + CR + DS + \dots,$$

où les quantités A, B, C, … doivent être exprimées en x, de manière

286 LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

qu'en faisant $x = p$ on ait

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \dots;$$

que de même, en faisant $x = q$, on ait

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad \dots;$$

qu'en faisant $x = r$, on ait pareillement

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad \dots, \quad \text{etc.};$$

d'où il est facile de conclure que les valeurs de A, B, C, … doivent être de cette forme

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\dots}{(p-q)(p-r)(p-s)\dots}, \\ B &= \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\dots}{(q-p)(q-r)(q-s)\dots}, \\ C &= \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\dots}{(r-p)(r-q)(r-s)\dots}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

en prenant autant de facteurs, dans les numérateurs et dans les dénominateurs, qu'il y aura de points donnés de la courbe, moins un.

Cette dernière expression de y, quoique sous une forme différente, revient cependant au même, comme on peut s'en assurer par le calcul, en développant les valeurs des quantités $Q_1, R_2, S_3, \dots$, et ordonnant les termes suivant les quantités P, Q, R, …; mais elle est préférable par la simplicité de l'Analyse sur laquelle elle est fondée, et par sa forme même, qui est beaucoup plus commode pour le calcul.

On pourra donc, par cette formule, qu'il ne serait pas difficile de réduire à une construction géométrique, trouver la valeur de l'ordonnée y pour une abscisse quelconque x, d'après les ordonnées connues P, Q, R, … pour les abscisses données $p, q, r, \dots$. Ainsi, ayant plusieurs termes d'une série quelconque, on pourra trouver tel terme intermédiaire qu'on voudra, ce qui est fort utile pour remplir les lacunes qui pourraient se trouver dans des suites d'observations ou d'expériences.

圖二

本文最後，筆者分享自己看到這些史料的心情轉變。相信每位高中教師都會注意到，插值多項式在出題時要避免給出成等差的 x 值（點的 x 坐標成等差），因為在等差的條件下，可以用「階差降次」[5]的方法求出下一項的函數值，例如二次實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=5$、$f(2)=7$、$f(3)=11$，求 $f(4)$ 之值：

x	1		2		3		4
$f(x)$	5		7		11		17
		2		4		6	
			2		2		

[4] 網址：http://math-doc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_LAGRANGE__7_183_0

[5] 關於「階差降次」方法，讀者可參見朱亮儒、陳材河合寫之〈99 課程中的 Lagrange 插值多項式〉。

筆者在課堂上並沒有教這個方法，因為只要 x 值不是等差，這個方法就沒輒了。可是，學生們好喜歡這個方法，還會「呷好逗相報」，然後莫名其妙地遇到每個題目都要試它一下。原本筆者只要看到學生使用這個方法，都會不悅地出言「威嚇」一下，如今，知道牛頓也是用類似的想法後，對這個方法就不會感到那麼厭惡了。不過，這個方法和牛頓的方法比起來，真的就是小巫見大巫了，學生只會它，就好像是金庸小說中的梅超風將《九陰真經》練成了「九陰白骨爪」。既然沒辦法禁止學生知道「階差降次」的方法，或許在課堂上有機會的話，可以讓學生們見識真正厲害的方法！

參考資料

朱亮儒、陳材河 **(2010).**〈**99** 課程中的 **Lagrange** 插值多項式〉，《教育部高中數學學科中心電子報》，第 **47** 期，網址：
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=48e7e53e-a0bd-4c0d-a9d8-18f40ce20761

沈朋裕 **(2010).**〈高中課程中的 **Lagrange** 插值多項式〉，網址：
http://www.worldone.com.tw/epaper_detail.do?eid=1238

Chabert, Jean-Luc (Ed.) (1999). ***A History of Algorithms: From th Pebble to the Microchip*****. New York: Springer.**

HPM 高中教室

單元九：解方程式的幾何思維—二次與三次方程式的根式解[6]

蘇惠玉

台北市立西松高中

一、巴比倫人的二次方程式解

雖然在中國的《九章算術》中，有許多可以解釋成線性與二次方程組的例子，但是，目前多數文獻中記載來自於古代的二次方程的例子，都是出自巴比倫的文獻。古巴比倫的楔形泥版上列有大量的二次方程，這些代數問題的敘說和解答，都是文辭式的，通常以 ***us'*(長度)**、***sag*(寬)**和 ***aša*(面積)**表示未知數，這可能是因為許多代數問題都源自於幾何背景。這些巴比倫問題的標準形式為「**x+y=b，xy=c**」，[7]可能與古代許多人相信一塊田地的面積只與周長相關有關，巴比倫的書記官可能為了說明相同的周長的矩形，可以有各種不同的面積，因此羅列出許多這種相同類型的問題。

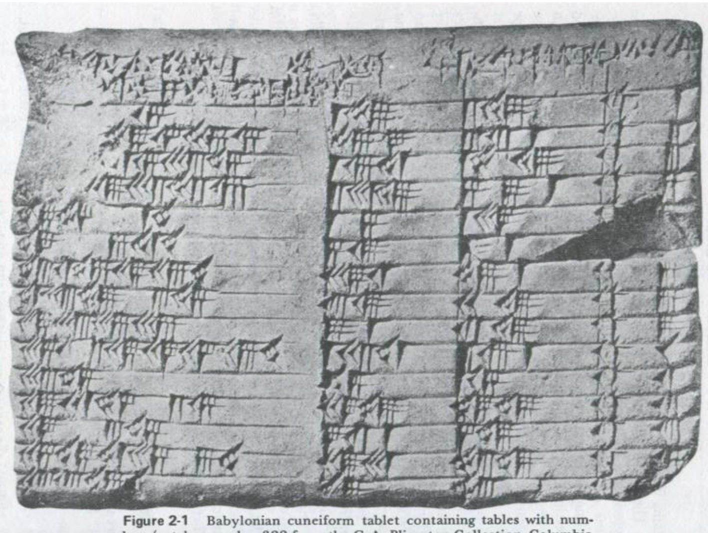


Figure 2-1 Babylonian cuneiform tablet containing tables with numbers (catalog number 322 from the G. A. Plimpton Collection, Columbia University). From O. Neugebauer and A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, 1946.)

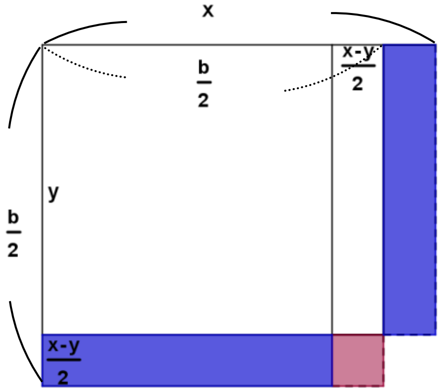
譬如泥版 **YBC4663** 上的一個問題：「$x+y=6\frac{1}{2}$，$xy=7\frac{1}{2}$」，書記官首先將 $6\frac{1}{2}$ 取一半得 $3\frac{1}{4}$，然後將 $3\frac{1}{4}$ 平方得 $10\frac{9}{16}$，將它減去 $7\frac{1}{2}$，剩下 $3\frac{1}{16}$，取其平方根得 $1\frac{3}{4}$，於是長度為 $3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}=5$，寬度則為 $3\frac{1}{4}-1\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$。這樣的程序性的解法，雖然以數值表示過程，然而作法有其一般性存在。也就是說當問題「**x+y=b, xy=c**」的形式時，也可按

[6] 所謂根式解，即是僅利用係數的四則運算與開方而得出的代數解。

[7] 巴比倫人問題根源於幾何，所以方程式的係數皆為正，並且不考慮負根。

照相同的程序得到所謂的公式解。

仔細觀察這種解法，由於問題根源於幾何背景，理所當然可以假設巴比倫人在解這樣的問題時，腦海裡會有一個對應的幾何關係：假設一個長為 **x**，寬為 **y** 的矩形（面積為 **c**），如圖。將 **x－y** 的部分分成兩半後，移動其中的一半，此時可以明顯看出，只要再補上一個邊長為 $\frac{x-y}{2}$ 的小正方形，就可拼成一個大正方形，其邊長為 $x-\frac{x-y}{2}=y+\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2}$，亦即 $(\frac{x-y}{2})^2=(\frac{b}{2})^2-c$，所以長 $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c}$，寬 $y=\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c}$。



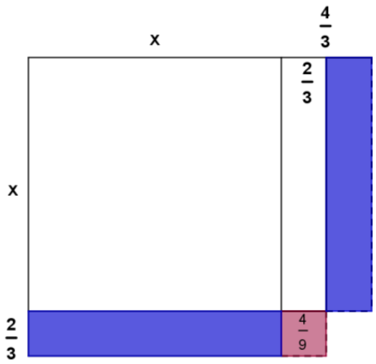
這種周長與面積形式的問題，以現在的角度來看，當然可以轉換成二次方程式來解，不過在巴比倫的泥版中，也有許多獨立的二次方程式問題。譬如泥版 **BM13901** 上的一個問題：

一個正方形面積(surface)和它的一邊(square-line)的 $\frac{4}{3}$ 之和為 $\frac{11}{12}$，求其邊長。

在泥版上，它的解法為：取 $\frac{4}{3}$ 的一半 $\frac{2}{3}$，平方得 $\frac{4}{9}$，然後把這個結果加到 $\frac{11}{12}$，得 $1\frac{13}{36}$；開方得 $\frac{7}{6}$，從 $\frac{7}{6}$ 中減去 $\frac{2}{3}$ 得 $\frac{1}{2}$，這就是所需的邊長。我們很輕易地可以將這種解法翻譯得到如現今方程式 $x^2+bx=c$ 的公式解：

$$x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}-\frac{b}{2}\text{ 。}$$

這個問題的陳述，乍看之下似乎與幾何無關。然而從解的形式看來，巴比倫人將一邊的 $\frac{4}{3}$ 倍這樣的敘述，看成一個長為 **x** 寬為 $\frac{4}{3}$ 的矩形，因此才可與面積相加。解法的解釋如上述的周長-面積問題的幾何解釋一般，利用面積的切割與拼補成正方形的策略，得到所求的邊長，如圖。



$$\frac{11}{12}+\frac{4}{9}=\frac{49}{36}=(\frac{7}{6})^2$$

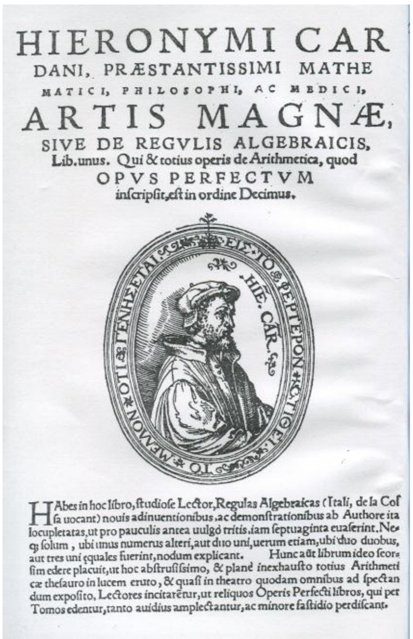
巴比倫人亦用類似的幾何意義得出形如 $x^2-bx=c$ 的解。對於現代的數學家來說，這些二次方程式都是一樣的，係數可取正或負，因此可得出所謂的一般性的公式解，並

得出兩個 **x** 解。然而，對巴比倫人而言，負數是沒有幾何意義的，因此他們方程式係數皆為正（「－」代表運算，減去），二次方程式也因此分成好幾種類型。這樣的想法有沒有延續到希臘時期不可得知，然而在古希臘重幾何而輕「算術」運算的傳統下，用幾何去解釋代數運算的模式卻一直延續下去，再經由伊斯蘭數學家的研究與發揚而重返歐洲的數學主流中。

二次方程式的根式解在第九世紀的阿爾・花剌子模(**Al-Khwārizmī**)之後，便已相當成熟與完善。在阿爾・花剌子模的書《復原和相消的規則 ***Hisāb al-jabr W'al-muqābala***》中，詳細的說了解方程式的「規則」--還原（即移項，把負項移至另一端）與相消（合併同類項），儘管沒有現代便利的符號系統，他仍然通過幾何來證實這些代數規則所得來的解的合理性，把巴比倫人已發展了的材料，結合經典的希臘幾何而產生一種新的代數學，事實上，代數 **algebra** 這個字，就來自於 ***al-jabr W'al-muqābala***。以這種帶有幾何意涵來分類方程式的類型，並通過幾何來驗證方程式的代數解的風格，一直延續到卡丹諾的三次方程式根式解，甚至影響到韋達的符號代數系統。

二、卡丹諾的三次方程式根式解

1545 年，義大利的一位醫生兼數學家卡丹諾(**Gerolamo Cardano, 1501-1576**)出版了《大技術 ***Ars Magna or The Rules of Algebra***》，首次向世人展示了如何求解三次與四次方程式的完整過程。從這本書的第十一章到第二十三章，詳細列出共十三種類型的三次方程式解法，並以幾何的形式加以驗證。儘管卡丹諾以數值係數為例求解，但是解法過程卻具有一般性，因此如同卡丹諾所做的，可建立解同類型方程式的一般「規則」。



我們先以缺了二次方項的不完全三次方程式 $x^3+cx=d$ 為例來說明，先分別求兩個數 **u, v**，使得 **u－v=d**，$uv=(\frac{c}{3})^3$，卡丹諾以幾何證明告訴我們，**x=** $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ 。現在解聯立方程式

$$\begin{cases} u-v=d \\ uv=(\frac{c}{3})^3 \end{cases}$$

將 $v=(\frac{c}{3})^3\cdot\frac{1}{u}$ 代入，得到 $u-(\frac{c}{3})^3\cdot\frac{1}{u}=d$ ，亦即得到 **u** 的二次方程式

$$u^2-(\frac{c}{3})^3=du$$

解此二次方程式，得 $u=\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}+\frac{d}{2}$ ，因此 $v=\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}-\frac{d}{2}$ ，因此得

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}+\frac{d}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}-\frac{d}{2}}\text{ 。}$$

以 $x^3+6x=20$ 為例，$\frac{d}{2}=\mathbf{10}$，$\frac{c}{3}=\mathbf{2}$，因此 $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ 。

在當時，雖然代數問題不再源自幾何背景，然而數學家們仍然習慣將未知數的一次方、平方和立方當成是幾何的線、面、體積，一個代數方程式也就表示了這些幾何量的加減運算。因此，對卡丹諾而言，在一個三次方程式中，每一項代表的都是體積，因此他在幾何的驗證過程中，取的是兩個立方體體積（**u, v**）的差等於 **d**，而這兩個立方體邊長相乘等於 $\frac{c}{3}$ ，如此整個三次式才能考慮成都是體積的運算。當時的數學家們，在齊次律的束縛之下，反而藉此之便，完成了三次方程式根式解的偉大成就。

在完成了缺二次項的三次方程式解之後，卡丹諾告訴我們，針對任意的三次方程式，則可以利用變數變換，讓它缺少二次項。如何作變數變換呢？先以二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 為例，我們知道

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

因此若令 $y=x+\frac{b}{2a}$ ，原先的方程式將可轉換成 $ay^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$ ，缺少了一次項後，**y** 的解即可輕易的求出，因此在二次方程式中，只要將 $x=y-\frac{b}{2a}$ 代入，即可得到一個缺少一次項的二次方程式。

在任一個三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 中，則可以考慮 $x=y-\frac{b}{3a}$ 代入，得

$a(y-\frac{b}{3a})^3+b(y-\frac{b}{3a})^2+c(y-\frac{b}{3a})+d=0$ ，將式子展開，得

$$(ay^3-by^2+\frac{b^2}{3a}y-\frac{b^3}{27a^2})+(by^2-\frac{2b^2}{3a}y+\frac{b^3}{9a^2})+c(y-\frac{b}{3a})+d=0$$

如此即可消去二次方項，得到一個缺項的不完全三次方程式之後，則可先以之前得到的公式得到 **y** 之解，然後代回即可得 **x** 了。

卡丹諾在本書中顯露的三次與四次方程式的解，除了沿襲希臘一貫以幾何思考代數問題的形式之外，更向我們顯露了一種解決數學問題的「策略」，卡丹諾和他的徒弟費拉里採取了一種將方程式轉換的化約式策略，即是將三次方程式求解問題轉換成二次方程式的求解。這種將高次降低成低一次的方法，充分運用的話，即可顯現數學以簡馭繁的精妙。

三、三次方程式解的優先權之爭

三次方程式的根式解,如同許多數學上的偉大成就一般,無法只歸功於卡丹諾一人。首先是伊斯蘭數學家的貢獻。在阿拉伯數學家開始研究代數之後，也嘗試著去解三次方程式，然而都是針對某些類型的幾何解法，如阿爾・海亞米(**'Umar Al-Khãyammî, 1048-1131)**。沿襲著一貫傳統，方程式的係數不考慮負數，都是正數。因此他將三次方程式分成十四類型，為每一類型找出幾何解：以幾何作圖方式找出滿足方程式的線段，然而這些幾何作圖通常都牽涉到相交的圓錐曲線，而沒有辦法得出代數解。

一直到 **1510** 年到 **1515** 年之間的某個時刻，波隆納大學的數學家費羅**(Ferro)**提出了缺二次項的 $x^3+cx=d$ 的三次方程式代數解,然而他並沒有公開它的解法反而嚴加保密,直到 **1526** 年他去世時,才將寫有解法的論文傳給它的女婿納夫與一個學生安東尼奧•馬立亞・費爾。在那個時代，數學上的學術職位是依據地位和名望來安排的，而地位和名望則來自於公開挑戰中的勝利。這點很像武俠小說中的江湖運作的模式，數學家像武林高手一般要接受挑戰，因此數學家所掌握到的數學知識就像武功密笈一般，被當成自己的致勝絕招而不輕易示人。

費爾當時想憑藉著解三次方程式的才能成為威尼斯的一名數學老師。然而當時卻盛傳另一位數學教師塔爾塔利亞（**Tartaglia,** 意為口吃之人，原名為尼柯洛・馮塔納）也會解三次方程式，因此向塔爾塔利亞提出挑戰，塔爾塔利亞大獲全勝，因此戰而聲名大噪。

卡丹諾雖然身為醫生，卻對許多知識領域有濃厚的興趣，尤其在數學方面，更有其過人的天賦。當聽說塔爾塔利亞戰勝費爾之後，卡丹諾曾請求塔爾塔利亞允許他在即將出版的書中披露塔爾塔利亞的三次方程式解法，他承諾，這種解法將完全歸功於塔爾塔利亞。塔爾塔利亞最初的回覆是他自己也要寫一本書說明清楚規則，但是因為太忙不知道什麼時候會出版。卡丹諾不屈不撓地懇求，威脅利誘，最後利用他的贊助者瓦斯托侯爵的名義說動了塔爾塔利亞跟他會面，塔爾塔利亞最後終於給出他的「解法規則」，還是以曖昧不明的詩句形式表示，同時也沒有給卡丹諾任何對解法的實證。

卡丹諾在助理費拉里的幫助下，花了六年的時間，揣摩出那些詩句的意思，又擴展他們的含義，將十三種類型的三次方程式的解完全呈現，最後幾章同時也包含了在費拉里幫助下所得到的四次方程式解。

在卡丹諾的書出版後第二年，憤怒的塔爾塔利亞出版了《新問題與發明》，前半部包含他他那些年理發現的問題與解法,後半部卻完全用來批評卡丹諾和他的《大技術》,不僅批評卡丹諾的數學能力，並且指控他剽竊。他在書裡面說卡丹諾給過他承諾：「**我按著神聖的福音書起誓，以一個紳士的名義保證，不僅在你告訴我你的發現之後，永不出版它；而且我以一個真正的基督徒的名義承諾和保證把它們當成密碼一樣藏在心裡，使得在我死後,沒有人能夠理解它們。**」然而這段話遭到卡丹諾助理費拉里的嚴正駁斥，

他說當時他也在場，卡丹諾從來沒有發過這樣的誓。**1547** 年二月，費拉里出面回應塔爾塔利亞的攻擊與挑釁，宣稱他可以在任何科學課題上跟他挑戰，並且認為卡丹諾的解法應歸功於費羅與費爾，他們都早於塔爾塔利亞發現三次方程式的解法，因此他們不須要保密。這個公開論戰的細節不可知，只知結果費拉里宣布獲勝，塔爾塔利亞失去的教師的職位。然而心懷憤恨的塔爾塔利亞，最終還是使盡一切手段與陰謀，讓卡丹諾遭到驅逐、破產、入獄，最後隱姓埋名過完一生。

數學知識是「人」的活動所形成的，在發展的過程中，在冰冷的數學知識之外，難免會伴隨著有血有肉的人性參雜其中，也因為這些人性的表現，讓我們在學習這些生硬、冰冷的知識之餘，可以感受到一點點殘留的下來的溫度。

Exercise

1. **(1)** 解聯立方程式：$x+y=6\frac{1}{2}$，$xy=7\frac{1}{2}$

(2) 將下列針對解「$x+y=6\frac{1}{2}$，$xy=7\frac{1}{2}$」的步驟：

首先將 $6\frac{1}{2}$ 取一半得 $3\frac{1}{4}$，然後將 $3\frac{1}{4}$ 平方得 $10\frac{9}{16}$，將它減去 $7\frac{1}{2}$，剩下 $3\frac{1}{16}$，取其平方根得 $1\frac{3}{4}$，於是長度為 $3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}=5$，寬度則為 $3\frac{1}{4}-1\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$

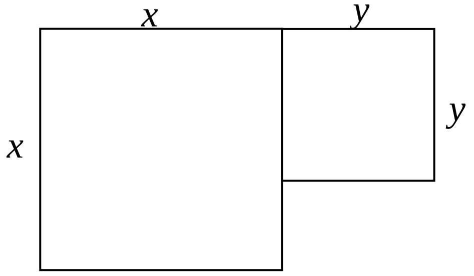
轉換成一般式的公式解：若 $x+y=b$, $xy=c$，則 $x=?$

2. 將下列用文辭敘述的巴比倫代數問題，「翻譯」成現代的符號表徵，並以用幾何形式加以解釋：

The surface and the square-line I have accumulated: 3/4
1 the projection you put down. The half of 1 you break, 1/2 and 1/2 you make span [a rectangle here a square], 1/4 to 3/4 you append: 1, make 1 equilateral. 1/2 which you made span you tear out inside 1: 1/2 the square-line.

3. 利用配方法解 $x^2+bx=c$，所得到的 **x** 巴比倫人的公式 $x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}-\frac{b}{2}$ 比較，是否相同？如有不同，陳述不同的地方。

4. 在巴比倫的泥版中，有這樣的問題形式：
「$x-y=b$, $x^2+y^2=c$」
按照他們的敘述，可得到 $x=\sqrt{\frac{c}{2}-(\frac{b}{2})^2}+\frac{b}{2}$，$y=\sqrt{\frac{c}{2}-(\frac{b}{2})^2}-\frac{b}{2}$，請在右圖中，以幾何來解釋這個公式。



5. 方程式 $x^3+cx=d$ 中，若 **u－v=d**，$uv=(\frac{c}{3})^3$，試證：**x=** $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ 為方程式的解。

6. 解聯立方程式：$\begin{cases} u-v=d \\ uv=(\frac{c}{3})^3 \end{cases}$

7. (1) 利用有理根檢驗，找出 $x^3+6x=20$ 的所有根。

(2) 卡丹諾針對這個方程式找出的解為 $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$，你覺得他找錯了嗎？或是此為**(1)**中的哪一個解？

8. 以卡丹諾的公式解方程式 $x^3+3x=10$。

9. 卡丹諾在 $x^3+cx=d$ 的類型中，給出 $x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}+\frac{d}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{c}{3})^3}-\frac{d}{2}}$，那麼你覺得在 $x^3=cx+d$ 的類型中，得出的 **x** 公式應為何？

10. (1)利用變數變換，將 $x^3+3x^2+9x=171$ 轉換成缺二次項的三次方程式。

(2)解三次方程式 $x^3+3x^2+9x=171$

11. 在三次方程式根式解的優先權爭論中，你覺得誰最有理由得到「解出三次方程式根式解」的榮耀？為什麼？對這一段歷史，你有什麼感想？

參考文獻

Cardano, G. ***Ars Magna or The Rules of Algebra*****, Translated by T. R. Witmer, New York: Dover Publications, INC.**

L. N. H. Bunt, P. S. Jones and J. D. Bedient(1988), ***The Historical Roots of Elementary Mathematics*****, New York: Dover Publications, INC.**

Katz, V. J.著，李文林、鄒建成、胥鳴傳等譯**(2004)**，《數學史通論 ***A History of Mathematics, An Introduction*** **(second Edition)**》，北京：高等教育出版社。

L. Radford and G. Guérette (2000), “ Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach”, in ***Using History to Teach Maathematics*****, V. J. Katz edited, MAA.**

哈爾·赫爾曼著，范偉譯（**2009**），《數學恩仇錄：數學史上的十大爭端》，台北：博雅書屋。

比爾·柏林霍夫/佛南度·辜維亞著，洪萬生、英家銘暨 **HPM** 團對譯（**2008**），《溫柔數學史》，台北：博雅書屋。

Dunham, W. 著，林傑斌譯（**1995**），《天才之旅》，台北：牛頓出版社。

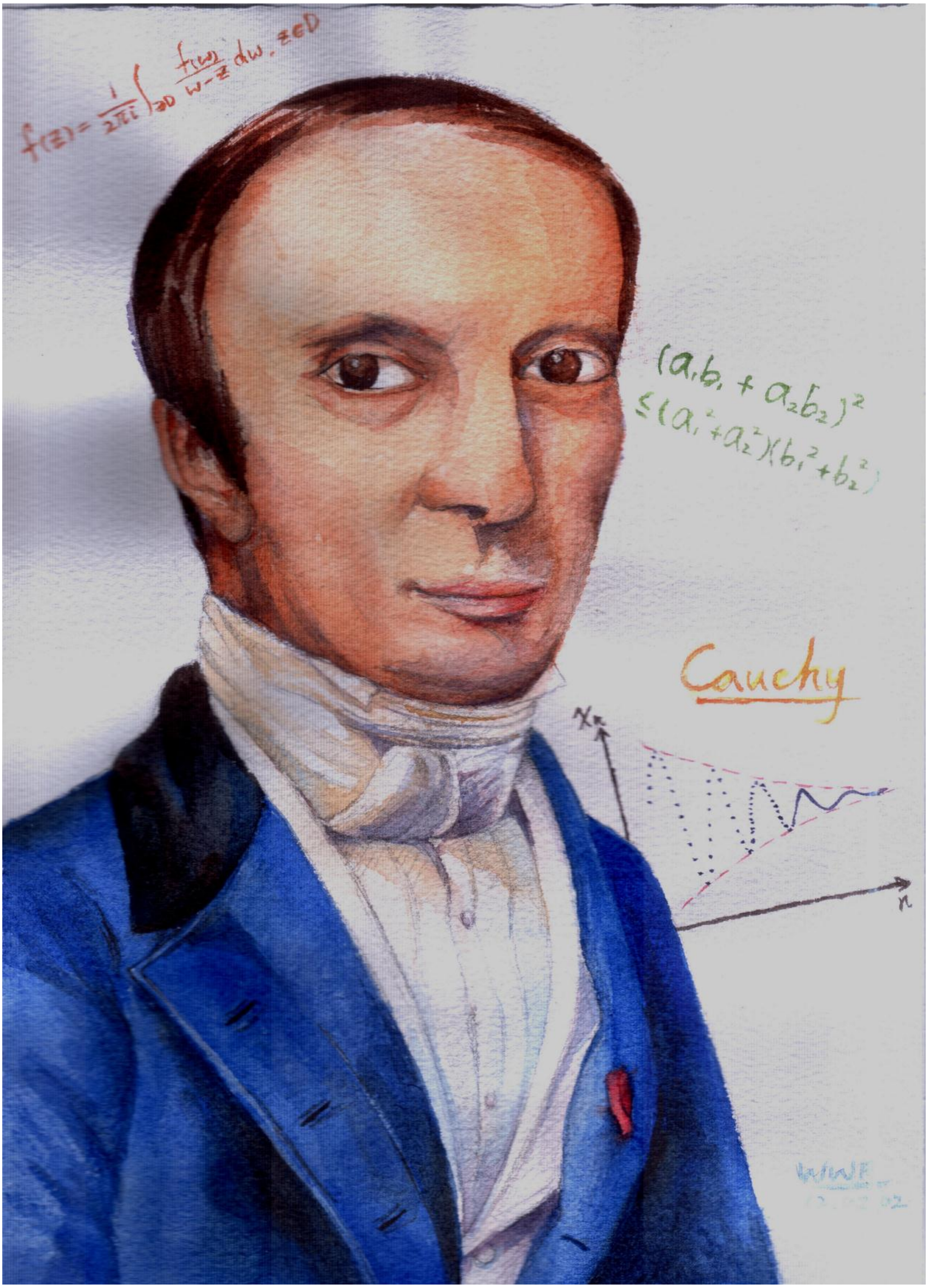
洪萬生（**2011**），〈三次、四次方程解法：一個歷史的回顧〉，《**HPM** 通訊》第十四卷第六期。

柯西畫像：創作理念

吳宛柔
國立交通大學應用數學所碩士班

柯西不等式，又稱柯西 － 施瓦茨不等式 **(Cauchy-Schwartz inequality)**，是中學數學重要的不等式之一，其證明方式有好幾種，應用之廣不在話下。然而隨著年齡的增長，我學到以柯西 **(Augustin-Louis Cauchy)** 命名的定理或公式，也越來越多。不過，與白努力家族 **(Bernoulli)** 不同的是，所有掛名柯西的公式都出自同一個人 －**Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)**，讓人不禁更佩服這位偉大的數學家。柯西是開創實變與複變分析的始祖，貢獻橫跨數學多個領域如微分方程、機率論與數學物理等等，此外，他在高等微積分課本中，也以分析學基礎（**foundations of analysis**）的奠定者，留下不朽的聲名。他為後人留下了大量的論文，是一位才華橫溢、非常多產的數學家。

拉格朗日 **(Joseph-Louis Lagrange)** 曾預言柯西日後必成大器，果不其然，柯西 **27** 歲便取得教授職位，且同年被任命為法國科學院院士。因此，我希望可以畫出意氣風發的柯西，藉由群青色 **(Ultramarine)** 的外套象徵年輕卻又不失穩重的柯西，略少的髮量表現出柯西不斷地思考的頭腦。也許是為了彌補我本身的小眼睛，所以，在人像的處理上，總是希望主角的眼睛越大越好，畫中的柯西就有著一雙洞悉數學之美的大眼睛。其中背景的地方，我選擇中學數學的柯西不等式、複變數函數核心理論的柯西積分公式 **(Cauchy integral formula)**，以及跟極限概念密切相關的柯西序列 **(Cauchy sequence)**。雖然還有很多與柯西相關的定理或公式，但限於畫面篇幅，只能做出這樣的取捨，期許哪天再畫出另一個不一樣的柯西，並將其他成就都放進畫中，與大家分享柯西的喜悅！



$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}dw,\ z\in D$
$(a_1b_1+a_2b_2)^2$
$\le(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$
Cauchy
x_n
n