HPM通訊

第十四卷 第十二期 目錄（2011年12月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

數學史融入教學—以克拉瑪公式為例

林倉億
國立台南一中

一、前言

在現行的 **99** 課程綱要中，克拉瑪公式被分成兩個部分編入不同的章節。第三冊第三章最後一節先引入二階行列式及二階克拉瑪公式，到了第四冊第一章最後一節再介紹三階行列式與三階克拉瑪公式，而這一節還是 **A** 版所沒有的。如此編排的好壞，見仁見智！然而，在以往二階、三階克拉瑪公式一起介紹的「年代」，學生在課堂上學到的是克拉瑪公式從二階推廣到三階，用相同的方式，還可以推廣到 ***n*** 階。雖然實際解二元或三元一次聯立方程組時，克拉瑪公式不見得比加減消去法好用，三階行列式更常常計算錯誤，但只要老師在旁敲邊鼓，說明它可結合資訊科技，寫成程式讓電腦幫人類解聯立方程組，多半的學生大概都能感受到克拉瑪公式一般性的威力與形式簡潔之美。

今年的高二是 **99** 課綱的第一屆，筆者在教克拉瑪公式之前，就一直擔心學生感受不到它的價值。果不其然，介紹完克拉瑪公式並做完幾個例題之後，筆者任教的兩個班級中，都有幾位學生在下課後問到類似的問題：「學克拉瑪公式幹嘛？國中的方法好用多了！」雖然筆者在課堂上有提到三階克拉瑪公式並強調可推廣到 ***n*** 元一次聯立方程組，然後交由電腦去算，但畢竟只是點到為止，自己講起來都十分心虛。由學生的提問，筆者很清楚地意識到，即便在課堂上說得口沫橫飛，學生對克拉瑪公式仍是無感的。因此，才想藉由數學史的引入，試著讓學生感受到克拉瑪公式的優點。附錄是筆者上課用的投影片，大約需 **1.5~2** 節時間實施此份教材。另外，電腦檔案會附在《**HPM** 通訊》的網站上和大家分享。

二、投影片內容說明

前兩張投影片是介紹克拉瑪 **(Gabriel Cramer)**的生平。克拉瑪 **1704** 年出生於日內

瓦，**1752** 年到法國養病時逝世。克拉瑪的父親是日內瓦的醫學教授，他另外兩個兄弟也都表現不俗，一個與父親一樣是醫學教授，另一個則成為法學教授。克拉瑪在 **18** 歲時就以一篇聲學的論文獲得博士學位。兩年後，他與兩位競爭者爭取日內瓦克萊文學院 **(Académie de Clavin)**的哲學教職。由於三位都十分傑出，所以克萊文學院就將教職分成哲學與數學兩個，由克拉瑪與另一位年僅 **21** 歲的競爭者卡蘭德利尼 **(Giovanni Ludovico Calandrini)**[1]共享數學教職，克拉瑪教授幾何學與力學，卡蘭德利尼教授代數學與天文學。這份教職最特別之處是，克萊文學院要求這兩位年輕人都必須花兩到三年的時間到外地去拜訪其他學者。克拉瑪獲得教職的三年後，到歐洲各地旅行兩年，認識了許多數學家，如約翰·伯努利 **(Johann Bernoulli)**、歐拉 **(Euler)**、哈雷 **(Halley)**、棣美弗 **(de Moivre)**、史特林 **(Stirling)**等人，克拉瑪得到這些數學家的友誼與認同，這對他往後的職業生涯有很大的幫助與影響。比如說，約翰·伯努利生前堅持只有克拉瑪才能夠編輯並出版他的《全集》**(*Complete Works*)**，這四冊於 **1742** 年出版。不止如此，約翰·伯努利還託克拉瑪編輯他已逝的哥哥雅克布·伯努利 **(Jacob Bernoulli)**的《全集》**(*Works*)** 共兩冊，並於 **1744** 年出版。伯努利兄弟是當時歐洲頂尖的數學家，能受到約翰·伯努利的信任，代表克拉瑪在數學能力與地位上，都不同於一般的數學家。由此也就不難得知，何以克拉瑪能成為英國皇家學會、柏林科學院、法國、義大利等多個學會的成員了。

克拉瑪在 **1750** 年出版的《代數曲線的分析導論》一書，主要在探討曲線，特別是求通過平面上若干點的曲線，例如求過平面上五個已知點的二次曲線。在這本書的附錄一中，出現了今日所謂的「克拉瑪公式」，而這就是第 **3~9** 張投影片的主題。以三元一次聯立方程組為例作說明：

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 \cdot z + Y_1 \cdot y + X_1 \cdot x \\ A_2 = Z_2 \cdot z + Y_2 \cdot y + X_2 \cdot x \\ A_3 = Z_3 \cdot z + Y_3 \cdot y + X_3 \cdot x \end{cases} \quad \begin{array}{l} A_1 \sim A_3\text{是常數項，}Z_1 \sim Z_3\text{，}Y_1 \sim Y_3\text{，} \\ X_1 \sim X_3\text{分別是未知數 } z\text{，}y\text{，}x\text{ 的係數} \end{array}$$

$$z = \frac{A_1Y_2X_3 - A_1Y_3X_2 - A_2Y_1X_3 + A_2Y_3X_1 + A_3Y_1X_2 - A_3Y_2X_1}{Z_1Y_2X_3 - Z_1Y_3X_2 - Z_2Y_1X_3 + Z_2Y_3X_1 + Z_3Y_1X_2 - Z_3Y_2X_1}$$

克拉瑪給了一套法則，告訴讀者如何求出未知數之值：

(1) 分母中的每一項都形如 $Z_aY_bX_c$，其中 a、b、c 就是數字 **1**、**2**、**3** 所有的排列情形：**123**、**132**、**213**、**231**、**312**、**321**，所以分母總共會有 $3\times2\times1=6$ 項。

(2) 數一數每一項中 a、b、c「錯置」的次數，若次數是偶數，則該項前的運算符號是「＋」，反之則為「－」。所謂「錯置」就是未符合 $a<b<c$ 的條件。例如 $Z_3Y_1X_2$ 中出現了兩次錯置：**3** 在 **1** 前面與 **3** 在 **2** 前面，所以 $Z_3Y_1X_2$ 這一項是要被加起來的。又如 $Z_3Y_2X_1$ 中有三個錯置：**3** 在 **1** 前面、**3** 在 **2** 前面與 **2** 在 **1** 前面，故 $Z_3Y_2X_1$ 這一項是要減去的。完成此步驟之後，也就得到分母了。

[1] 誰是卡蘭德利尼？上網搜尋後發現在史都華 (Ian Stewart)《生物世界的數學遊戲》的第六章「費布納西的花朵，碎形的莖枝」中有提到這號人物：「針對植物的幾何與數目模式所做的研究稱為「葉序」（phyllotaxis），這類研究的歷史和文獻可列出一大串。在十八世紀中葉，就有兩位科學家研究過冷杉毬果裡的螺線，這兩位數學家分別是龐內（Charles Bonnet, 1720-1793）及卡蘭德利尼（G. L. Calandrini）。」（引自http://www.bookzone.com.tw/Publish/book.asp?bookno=cs061）

(3) 將分母中的Z_1、Z_2、Z_3依序改為A_1、A_2、A_3，就得到了分子，分子除以分母就是z值。

(4) 若將分母中的Y_1、Y_2、Y_3依序改為A_1、A_2、A_3，就會得到y值的分子，而分母與z值的分母相同。以此類推，可得到其他未知數之值。

這一套法則所寫出來的公式，雖然和今日用行列式展開的式子相同，但克拉瑪當時並沒有行列式，他僅僅是利用排列的概念，然後再去算每一項的錯置數就寫出來了。換句話說，今日的學生雖然還沒有學到三階行列式，但他們仍可以利用克拉瑪的方法寫出三階公式，甚至是更高階的公式，因此，筆者才會安排接下來的第 **10**、**11** 張投影片。

經過了三階與四階的「折磨」後，學生都感受到克拉瑪這套方法雖然可以推廣到如他自己所說的 ***n*** 個未知數，但寫起來可是十分驚人！所以，當筆者在秀出第 **12** 張投影片時（一開始只有五元一次聯立方程式，沒有下方的問題），就有學生發出驚呼聲，這聲音代表他們很清楚光是分母就要寫 **5! = 120** 項。不過，筆者並不是要一項一項寫出，而是要學生利用已學過的排列組合直接求出諸如 $Z_1X_aY_2V_bU_c$ 中有多少項是「+」的問題。第 **12** 張投影片中的問題，對學生還不致於造成太大的困難，不過，第 **13** 張投影片的問題，就非常有挑戰性了。這一張投影片其實與克拉瑪公式沒有直接的關聯，算是從克拉瑪的方法延伸出來的數學問題，然而，這延伸倒是連結到了 **20** 世紀的組合學，筆者再另外撰文說明。第 **13** 張投影片結束後，有 **2** 位同學對這些問題非常感興趣，已埋頭苦幹去了，對於接下來的內容，再也沒聽進去了！

第 **14~19** 張投影片則是介紹麥克勞林 **(Colin Maclaurin, 1698~1746)**的《代數學》(***Treatise of Algebra***)。麥克勞林生於蘇格蘭，也死於蘇格蘭。**21** 歲就當選英國皇家學會的會員，這比克拉瑪早了 **30** 年。**27** 歲的時候獲得牛頓 **(Newton)**的推薦擔任愛丁堡大學數學教授一職，麥克勞林可說是將他的一生都奉獻給了故鄉蘇格蘭。若說克拉瑪身後有約翰•伯努利的支持，那麥克勞林也有牛頓這有力人士的幫忙，這倒也是個有趣的對比。筆者之所以會介紹麥克勞林，是因為在他死後兩年(**1748** 年)才出版的《代數學》一書中，也有今日所謂的「克拉瑪公式」，而且，對我們來說，親切易懂！筆者在課堂上秀出麥克勞林書中的內容時（第 **16**、**17** 張投影片），學生從熟悉的數學式中知道這就是他們所學的克拉瑪公式，只差在沒有用行列式表示而已。至此，一個有趣的歷史優先權問題產生了，既然麥克勞林早在 **1729** 年就已寫出公式了（第 **19** 張投影片），而且其《代數學》一書也比克拉瑪的《代數曲線的分析導論》早出版兩年，那為何不叫做「麥克勞林公式」，而要稱為「克拉瑪公式」呢？筆者在最後一張投影片就要學生去比較兩人的方法。

最後一張投影片（第 **20** 張投影片）先問學生喜歡那一人的公式。統計結果，兩個班共 **85** 位學生中，喜歡克拉瑪的只有 **2** 位，喜歡麥克勞林的有 **30** 位，都不喜歡的則有 **33** 位，有 **20** 位學生未表示意見。理由則是克拉瑪的方法太麻煩了，麥克勞林的容易多了。這結果一點都不讓人意外，因為麥克勞林的方法就是來自學生們熟悉的加減消去法。至於第二個問題：「該稱為『克拉瑪公式』還是『麥克勞林公式』？」也是支持麥克勞林的聲音比較大。不過，令筆者欣喜的是，有學生注意到麥克勞林只有寫出三個未

知數的公式（雖然他有告訴讀者仿照他的方法，可以寫出四個未知數的公式），而克拉瑪的方法卻可以寫出任意多個未知數的公式，因此他選擇支持克拉瑪。此意見一出之後，支持麥克勞林的氣勢就為之大挫了。筆者在此加碼演出，要學生想想「巴斯卡三角形」與「楊輝三角形」，就時間點來說，楊輝早於巴斯卡，然而巴斯卡優於楊輝之處在於藉組合符號之助，巴斯卡可以直接寫出任一列，而不需要從頭開始一列一列的算。「克拉瑪 **VS** 麥克勞林」與「巴斯卡 **VS** 楊輝」，還頗有異曲同工之妙！

投影片中的最後一個問題：「現今用行列式的表示法，有什麼優點？」可以這麼說，整份教的最終目的，就是要讓學生感受到用行列式表示克拉瑪公式的優點：簡潔、便於推廣、以簡御繁……等都是可以預期的答案，然而，筆者更希望有學生能發現行列式的運算性質可以幫助簡化計算，讓手算求解變得比較容易可行。在第一個班級實施時，並沒有學生發現這一點，讓筆者有些失望，好在第二個班級有學生提出這個觀點，彌補筆者心中的遺憾。

三、課後省思

這份教材在第二個班級實施時，筆者找了實習教師張竣堯老師進到教室現場觀察，課後並與他共同討論整份教材及上課流程，感謝他給予筆者非常寶貴的建議，也提醒筆者在過程中沒有注意到的細節。以下是我們共同討論後的整理，以及筆者個人的心得與省思。

(1) 整份教材可以帶給學生不同的視野，讓學生知道數學不是只有課本、講義上的知識或題目，數學的發展過程並不如想像的那般平順，其中經歷許多人的心血結晶，才有今日的模樣。

(2) 透過比較「克拉瑪的公式」、「麥克勞林的公式」與課本上的「克拉瑪公式」，學生比較能夠感受到符號的威力，以及數學以簡御繁的精神。另外，藉由優缺點的討論，學生不再是被動地接受數學知識，而能在整個討論過程中，慢慢培養「數學品味」。

(3) 依循克拉瑪的符號來介紹其方法，雖然忠於原味，但對學生來說可能是一個負擔，改成學生習慣的符號來說明，更能幫助學生掌握克拉瑪的方法。

(4) 在第 **11** 張投影片時，筆者僅讓學生們略作思考後就將 **24** 項全部呈現出來。此處若能多留點時間讓學生親自寫出四階克拉瑪公式的分母，那學習效果應該會更好。不過，也必須考慮如何才能讓學生真的動手寫，畢竟 **24** 項是有點多。分組競賽或許是可行的方式，最快寫出且正確的一組，可以獲得獎勵。

(5) 第 **13** 張投影片可停留更多的時間，讓學生能更充分的思考，並鼓勵他們發表自己的想法。

(6) 麥克勞林的方法學生接受度較高，若能先介紹他的方法，再引入克拉瑪的方法，應該會有更好的效果。

(7) 這次實施的班級都是自然組的學生，我們觀察到他們對於歷史的「胃口」似乎不是很好，因此，在歷史的部分著墨太多，學生們反而會覺得無趣，多一點數學挑戰比較能激起他們的學習。這一點也有可能是筆者個人教學技術不佳所致。

(8) 教材的實施時機不是非常合宜。這一點是筆者個人覺得此次教學中的最大遺憾與敗

筆。筆者在整個課程內容都教完後，才實施此份教材，當時距離學生的第三次段考只剩下 **6** 天的時間，有好幾位學生已無心於這個與考試無關的教學，不是顧著做題目準備即將到來的段考，就是顯得意興闌珊，不想投入學習。經與張老師討論後，我們覺得這份教材修改後，可以在二階行列式之後、克拉瑪公式之前實施，透過這份教材連接課本中的克拉瑪公式，應該能有水到渠成的效果。

以上就是此次教學後的心得與檢討。平心而論，雖然沒有達到筆者預期的成效，但仍有不少收穫。往後若再教到這個單元，筆者還是會再試試看，一回生、二回熟，相信下一次一定能有更好的效果。

註：投影片中克拉瑪與麥克勞林的肖像，取自「**The MacTutor History of Mathematics archive**」網站，兩人著作的圖片，則取自 **Google** 電子書。至於麥克勞林手稿的圖片，則取自楊浩菊的博士論文《行列式理論歷史研究》(中國西北大學)。特此聲明。

參考資料

單維彰 **(2010).**〈「行列式」從何而來？〉,《科學月刊》**41(6): 420-421**。

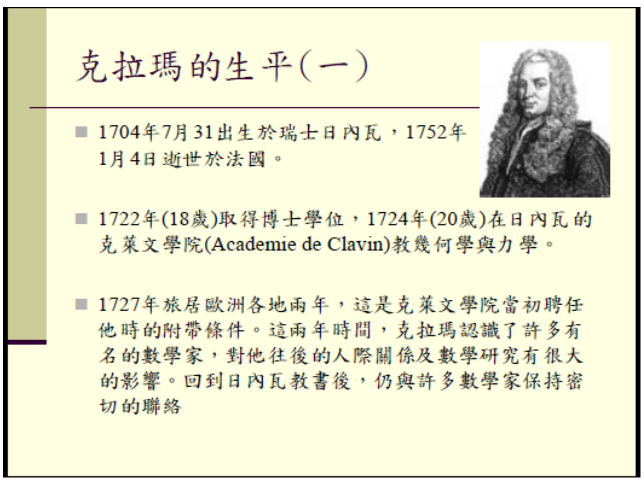
O'Connor, John and Robertson, Edmund (1996). "Matrices and determinants", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html#35

O'Connor, John and Robertson, Edmund (1999). "Colin Maclaurin", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maclaurin.html

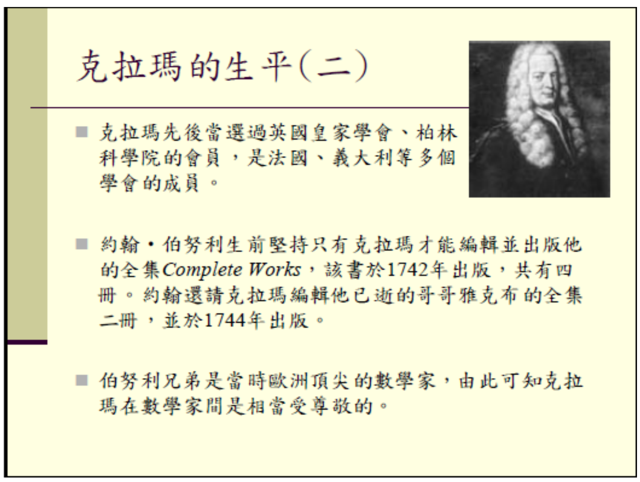
O'Connor, John and Robertson, Edmund (2000). "Gabriel Cramer", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer.html

Chabert, Jean-Luc (Ed.) (1999). ***A History of Algorithms: From th Pebble to the Microchip.*** **New York: Springer.**

附錄



1



2

克拉瑪的著作

- 1750年出版《代數曲線的分析導論》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrique*)，這本書主要是在探討曲線，特別是求通過平面上若干點的曲線，例如求過平面上五個已知點的二次曲線。
- 在這本書的附錄一中，出現了今日所謂的克拉瑪公式

3

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A GENEVE,
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.
MDCCL.

4

APPENDICE. 657

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient plusieurs inconnues $z, y, x, v,$ &c. & autant d'équations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c.$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c.$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c.$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c.$$
&c.

où les lettres $A^1, A^2, A^3, A^4,$ &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme &c. équation. De même $Z^1, Z^2,$ &c. sont les coëfficients de z; $Y^1, Y^2,$ &c. ceux de y; $X^1, X^2,$ &c. ceux de x; $V^1, V^2,$ &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes. Oooo

658 *APPENDICE.*

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a $[1 \times 2 \times 3 =]$ 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes + ou −, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'apellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il est pair ou nul, le terme aura le signe +; s'il est impair, le terme aura le signe −. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2V^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le signe +. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe +, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le signe −.

Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ses termes, Z en A. Et la valeur d'y est la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une maniére semblable la valeur des autres inconnues.

5

附錄一之翻譯(一)

有若干個未知數 z、y、x、v、……等，還有個數相同的方程式：

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \cdots\cdots$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \cdots\cdots$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \cdots\cdots$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \cdots\cdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

這裡諸如 A^1、A^2、A^3、A^4、……等並非如同平常那樣代表 A 的次方，而是代表第一個、第二個、第三個、第四個……方程式的左側，假定是已知的。類似地，Z^1、Z^2、……是 z 在第一個、第二個……方程式的係數；Y^1、Y^2、……是 y 在第一個、第二個……方程式的係數；X^1、X^2、……是 x 在第一個、第二個……方程式的係數；V^1、V^2、……是 v 在第一個、第二個……方程式的係數。

6

附錄一之翻譯(二)

利用這符號，如果只有一個方程式及一個未知數 z，我們可以得到 $z = \frac{A^1}{Z^1}$。如果有兩個方程式及兩個未知數 z 和 y，我們可以得到 $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$，$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$。如果有三個方程式及三個未知數 z、y 和 x，我們可以得到

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

7

附錄一之翻譯(三)

細察這些公式，給了我們一個一般性的法則。方程式與未知數的個數都是 n，我們可以得到每一個未知數之值，方法是寫出 n 個分母相同的分數，其分母的項數與 n 個不同物的排列數相同，每一項都是由字母 $ZYXV$ …保持這個順序組成，而指數則是前 n 個數字的所有排列情況。因此，當我們有三個未知數的時候，分母會有 $[1\times2\times3=]6$ 項，由字母 ZYX 依序搭配指數123、132、213、231、312、321而組成。

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

8

附錄一之翻譯(四)

我們再根據以下的法則將這些項標上＋或－。在同一項中，當某一個指數大於下一個或是更後面的指數時，我稱爲錯置。數一數每一項錯置的數目，如果是偶數或零，那這一項的符號就是＋；如果是奇數，那這一項的符號就是－。舉例來說，在 $Z^1Y^2X^3$ 中並沒有錯置的情況，所以這一項的符號是＋。$Z^3Y^1X^2$ 的符號也會是＋，因爲有兩個錯置：3 在 1 前面與 3 在 2 前面。而 $Z^3Y^2X^1$ 有三個錯置：3 在 2 前面、3 在 1 前面與 2 在 1 前面，所以它的符號會是－。

當共同的分母寫出來後，我們將分母中的 Z 改成 A，然後放在分子，如此就能得到 z 的值。y 的值是一個有相同分母的分數，而分子則是將分母中的 Y 改成 A。依此方式就可以得到其他未知數之值。

$$z=\frac{A^1Y^2X^3-A^1Y^3X^2-A^2Y^1X^3+A^2Y^3X^1+A^3Y^1X^2-A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

$$y=\frac{Z^1A^2X^3-Z^1A^3X^2-Z^2A^1X^3+Z^2A^3X^1+Z^3A^1X^2-Z^3A^2X}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

9

用克拉瑪的方法解下列聯立方程式

$$\begin{cases}6=3\cdot z+2\cdot y+1\cdot x\\ 1=1\cdot z+1\cdot y-1\cdot x\\ 4=5\cdot z-3\cdot y+2\cdot x\end{cases}$$

$$z=\frac{A^1Y^2X^3-A^1Y^3X^2-A^2Y^1X^3+A^2Y^3X^1+A^3Y^1X^2-A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

$$=\frac{6\cdot1\cdot2-6\cdot(-3)\cdot(-1)-1\cdot2\cdot2+1\cdot(-3)\cdot1+4\cdot2\cdot(-1)-4\cdot1\cdot1}{3\cdot1\cdot2-3\cdot(-3)\cdot(-1)-1\cdot2\cdot2+1\cdot(-3)\cdot1+5\cdot2\cdot(-1)-5\cdot1\cdot1}=\frac{-25}{-25}=1$$

$$y=\frac{Z^1A^2X^3-Z^1A^3X^2-Z^2A^1X^3+Z^2A^3X^1+Z^3A^1X^2-Z^3A^2X}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

$$=\frac{3\cdot1\cdot2-3\cdot4\cdot(-1)-1\cdot6\cdot2+1\cdot4\cdot1+5\cdot6\cdot(-1)-5\cdot1\cdot1}{3\cdot1\cdot2-3\cdot(-3)\cdot(-1)-1\cdot2\cdot2+1\cdot(-3)\cdot1+5\cdot2\cdot(-1)-5\cdot1\cdot1}=\frac{-25}{-25}=1$$

$x=1$

10

四階克拉瑪公式

$$\begin{cases}A_1=Z_1\cdot z+Y_1\cdot y+X_1\cdot x+V_1\cdot v\\ A_2=Z_2\cdot z+Y_2\cdot y+X_2\cdot x+V_2\cdot v\\ A_3=Z_3\cdot z+Y_3\cdot y+X_3\cdot x+V_3\cdot v\\ A_4=Z_4\cdot z+Y_4\cdot y+X_4\cdot x+V_4\cdot v\end{cases}$$

- 分母共有 4!=24 項
- 分母 $=+Z_1Y_2X_3V_4-Z_1Y_2X_4V_3-Z_1Y_3X_2V_4+Z_1Y_3X_4V_2+Z_1Y_4X_2V_3-Z_1Y_4X_3V_2$

$-Z_2Y_1X_3V_4+Z_2Y_1X_4V_3+Z_2Y_3X_1V_4-Z_2Y_3X_4V_1-Z_2Y_4X_1V_3+Z_2Y_4X_3V_1$

$+Z_3Y_1X_2V_4-Z_3Y_1X_4V_2-Z_3Y_2X_1V_4+Z_3Y_2X_4V_1+Z_3Y_4X_1V_2-Z_3Y_4X_2V_1$

$-Z_4Y_1X_2V_3+Z_4Y_1X_3V_2+Z_4Y_2X_1V_3-Z_4Y_2X_3V_1-Z_4Y_3X_1V_2+Z_4Y_3X_2V_1$

11

五階克拉瑪公式(一)

$$\begin{cases}A_1=Z_1\cdot z+Y_1\cdot y+X_1\cdot x+V_1\cdot v+U_1\cdot u\\ A_2=Z_2\cdot z+Y_2\cdot y+X_2\cdot x+V_2\cdot v+U_2\cdot u\\ A_3=Z_3\cdot z+Y_3\cdot y+X_3\cdot x+V_3\cdot v+U_3\cdot u\\ A_4=Z_4\cdot z+Y_4\cdot y+X_4\cdot x+V_4\cdot v+U_4\cdot u\\ A_5=Z_5\cdot z+Y_5\cdot y+X_5\cdot x+V_5\cdot v+U_5\cdot u\end{cases}$$

- 分母共有 5!=120 項。
- 問題1：$Z_aX_bY_cV_dU_5$ 中有 12 項是「+」的。
- 問題2：$Z_1X_aY_2V_bU_c$ 中有 3 項是「+」的。
- 問題3：$Z_4X_aY_bV_2U_c$ 中有 3 項是「+」的。
- 問題4：分母中有 60 項是「+」的。

$Z_1X_3Y_2V_5U_4$

$Z_1X_4Y_2V_3U_5$

$Z_1X_5Y_2V_4U_3$

$Z_4X_1Y_3V_2U_5$

$Z_4X_3Y_5V_2U_1$

$Z_4X_5Y_1V_2U_3$

12

五階克拉瑪公式(二)

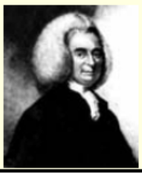
$$\begin{cases}A_1=Z_1\cdot z+Y_1\cdot y+X_1\cdot x+V_1\cdot v+U_1\cdot u\\ A_2=Z_2\cdot z+Y_2\cdot y+X_2\cdot x+V_2\cdot v+U_2\cdot u\\ A_3=Z_3\cdot z+Y_3\cdot y+X_3\cdot x+V_3\cdot v+U_3\cdot u\\ A_4=Z_4\cdot z+Y_4\cdot y+X_4\cdot x+V_4\cdot v+U_4\cdot u\\ A_5=Z_5\cdot z+Y_5\cdot y+X_5\cdot x+V_5\cdot v+U_5\cdot u\end{cases}$$

- 進階思考題
- 問題1：錯置數有多少種？
- 問題2：錯置數為 4 的有多少項？
- 問題3：若錯置數為 n 的共有 $f(n)$ 項，則 $f(n)=$？
- 問題4：試著將問題 3 的結果推廣到任意正整數階的克拉瑪公式。

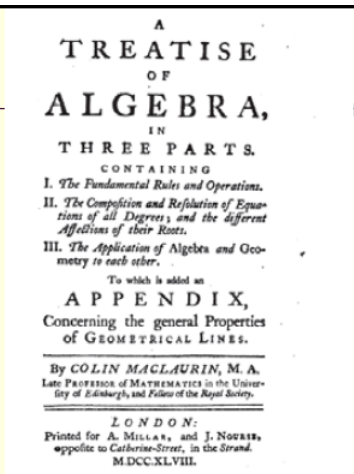
13

麥克勞林的《代數學》

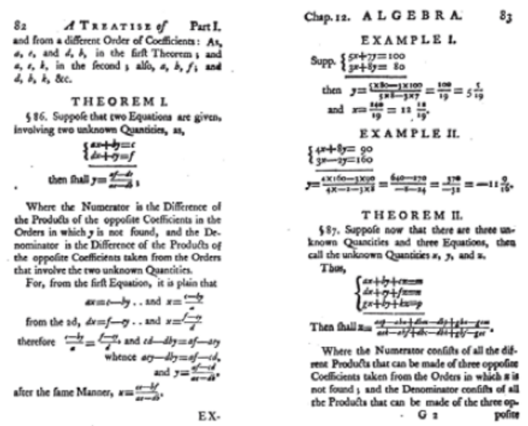
- 1698年2月出生於蘇格蘭，1746年6月14日逝世於蘇格蘭愛丁堡。1719年當選英國皇家學會會員(克拉瑪在1749年當選)。1725年獲牛頓推薦，擔任愛丁堡大學的數學教授。
- 死後兩年(1748年)，其《代數學》一書才出版。此書中也有今日所謂的「克拉瑪公式」(比克拉瑪的書早兩年)



14


A
TREATISE
OF
ALGEBRA,
IN
THREE PARTS.
CONTAINING
I. *The Fundamental Rules and Operations.*
II. *The Composition and Resolution of Equations of all Degrees; and the different Affections of their Roots.*
III. *The Application of* Algebra *and* Geometry *to each other.*
To which is added an
APPENDIX,
Concerning the general Properties of GEOMETRICAL LINES.
By *COLIN MACLAURIN*, M. A.
Late PROFESSOR of MATHEMATICS in the University of *Edinburgh*, and *Fellow of the Royal Society*.
LONDON:
Printed for A. MILLAR, and J. NOURSE, opposite to *Catherine-Street*, in the *Strand*.
M.DCC.XLVIII.

15


82 *A* TREATISE *of* Part I.

and from a different Order of Coefficients: As, *a*, *e*, and *d*, *b*, in the first Theorem; and *a*, *e*, *k*, in the second; also, *a*, *b*, *f*; and *d*, *b*, *k*, &c.

THEOREM I.

§ 86. Suppose that two Equations are given, involving two unknown Quantities, as,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

then shall $y=\frac{af-dc}{ae-db}$;

Where the Numerator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients in the Orders in which y is not found, and the Denominator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients taken from the Orders that involve the two unknown Quantities.

For, from the first Equation, it is plain that

$ax=c-by$ . . and $x=\frac{c-by}{a}$

from the 2d, $dx=f-ey$ . . and $x=\frac{f-ey}{d}$

therefore $\frac{c-by}{a}=\frac{f-ey}{d}$, and $cd-dby=af-aey$

whence $aey-dby=af-cd$,

and $y=\frac{af-cd}{ae-db}$.

after the same Manner, $x=\frac{ce-bf}{ae-db}$.

EX-

Chap. 12. ALGEBRA. 83

EXAMPLE I.

Supp. $\begin{cases} 5x+7y=100 \\ 3x+8y=80 \end{cases}$

then $y=\frac{5\times80-3\times100}{5\times8-3\times7}=\frac{100}{19}=5\frac{5}{19}$

and $x=\frac{240}{19}=12\frac{12}{19}$.

EXAMPLE II.

$\begin{cases} 4x+8y=90 \\ 3x-2y=160 \end{cases}$

$y=\frac{4\times160-3\times90}{4\times-2-3\times8}=\frac{640-270}{-8-24}=\frac{370}{-32}=-11\frac{9}{16}$.

THEOREM II.

§ 87. Suppose now that there are three unknown Quantities and three Equations, then call the unknown Quantities x, y, and z.

Thus,

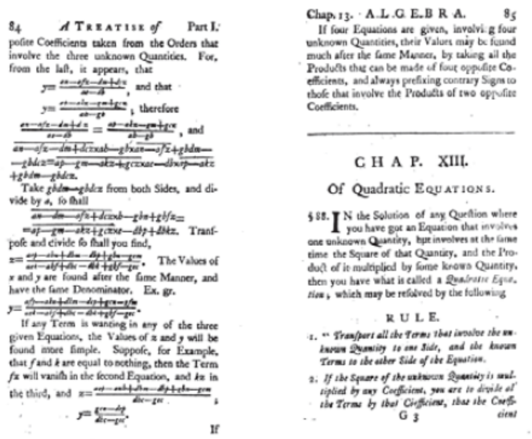
$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases}$$

Then shall $z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$.

Where the Numerator consists of all the different Products that can be made of three opposite Coefficients taken from the Orders in which z is not found; and the Denominator consists of all the Products that can be made of the three op-

G 2 posite

16


84 *A* TREATISE *of* Part I.

posite Coefficients taken from the Orders that involve the three unknown Quantities. For, from the last, it appears, that

[illegible], and that

[illegible], therefore

[illegible], and

[illegible]

Take [illegible] from both Sides, and divide by *a*, so shall

[illegible]. Transpose and divide so shall you find,

$z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$. The Values of x and y are found after the same Manner, and have the same Denominator. Ex. gr.

$y=\frac{afp-akn+dkm-dcp+gcn-gfm}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$.

If any Term is wanting in any of the three given Equations, the Values of x and y will be found more simple. Suppose, for Example, that f and k are equal to nothing, then the Term fz will vanish in the second Equation, and kz in the third, and [illegible];

[illegible]

If

Chap. 13. ALGEBRA. 85

If four Equations are given, involving four unknown Quantities, their Values may be found much after the same Manner, by taking all the Products that can be made of four opposite Coefficients, and always prefixing contrary Signs to those that involve the Products of two opposite Coefficients.

CHAP. XIII.

Of Quadratic EQUATIONS.

§ 88. IN the Solution of any Question where you have got an Equation that involves one unknown Quantity, but involves at the same time the Square of that Quantity, and the Product of it multiplied by some known Quantity, then you have what is called a *Quadratic Equation*; which may be resolved by the following

RULE.

1. "*Transport all the Terms that involve the unknown Quantity to one Side, and the known Terms to the other Side of the Equation.*

2. *If the Square of the unknown Quantity is multiplied by any Coefficient, you are to divide all the Terms by that Coefficient, that the Coeffi-*

G 3 cient

17

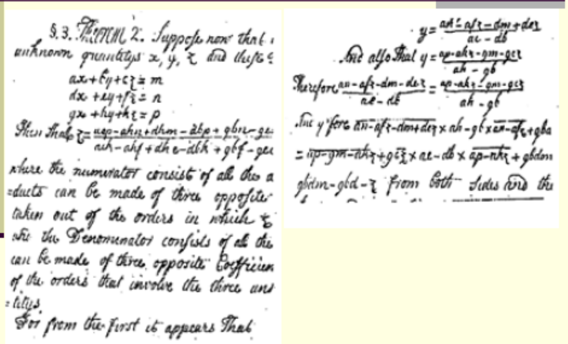
麥克勞林的公式

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-db} \\ y=\dfrac{af-dc}{ae-db} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ekm-bfm+bcn-bkn+bfp-cep}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \\ y=\dfrac{afp-akn+dkm-dep+gcn-gfm}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \\ z=\dfrac{aep-abn+dbm-dbp+gbn-gem}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \end{cases}$$

18

麥克勞林1729年的手稿


§ 3. Theorem 2. Suppose now that [illegible] unknown quantitys x, y, z and these [illegible]

$ax+by+cz=m$
$dx+ey+fz=n$
$gx+hy+kz=p$

Then shall $z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$

where the numerator consist of all the [illegible] ducts can be made of three opposite [illegible] taken out of the orders in which z [illegible] the Denominator consists of all the [illegible] can be made of three opposite Coefficien[ts] of the orders that involve the three [un]knowns

For from the first it appears that

$y=\frac{an-afz-dm+dcz}{ae-db}$

and also that $y=\frac{ap-akz-gm-gcz}{ah-gb}$

Therefore $\frac{an-afz-dm-dcz}{ae-db}=\frac{ap-akz-gm-gcz}{ah-gb}$

[illegible]

[illegible] from both sides [illegible]

19

克拉瑪 V.S. 麥克勞林

- 你喜歡誰的公式？為什麼？
- 你認為應該稱為「克拉瑪公式」還是「麥克勞林公式」？為什麼？
- 現今用行列式的表示法，有什麼優點？

20

討論區 以下為 **HPM** 團對伙伴間，針對對此主題討論的 **e-mail**：

2011/12/28

倉億及各位伙伴！

有關行列式與線性變之連結，也很值得後續討論。因為有了矩陣理論，所以，行列式可以有個鉤子可掛，而不會淪落成為一個孤立的方法。因此，線性代數的歷史風貌非常值得瀏覽一下。 萬生

2011/12/31

老師及各位伙伴：

關於行列式的討論，倉億開了頭。接下來，順著脈絡將行列式與矩陣關連起來，趁機跨進線性代數的洪流掏洗一番。

聽來是個不錯的主意！不知有誰可以接棒下去？倉億，不妨將這個部份處理下去，你看如何？俊鴻

2012/1/3

倉億：

我覺得學生在克拉瑪公式的學習中，最大的疑問是：為何要學克拉瑪公式 ？它會比加減消去法或代入消去法來得好？我覺得具有「機械性」的規律是它最大的特色，進而便於一般化的表示與推廣。或許找個例子能讓學生對比一下。俊鴻

2012/1/3

學長：

問題就出在 99 課綱將三階行列式放在第四冊，所以，我覺得在二元一次的限制之下，再怎麼做都無法讓學生感受到「機械性」規律的好處，所以，我在此是利用學生們還沒學過三階行列式的時候，讓他們「累一次」，待第四冊的時候，應該就可以感受到用行列式來表示克拉瑪公式的優點了。以上是我的預期啦，實際如何，還得等下學期才知道。不過，學長倒是提醒我一點，增加一個實例讓學生知道克拉瑪公式要怎麼用，謝謝！

倉億

2012/1/4

學長們:

學弟現醜一下我在教學(主要是程度比較好的學生，或是將來要以理工科為目標的學生)過程中，會跟學生亂哈拉的‥

我覺得這個公式不單只用在實用解題本身(畢竟對學生而言，真的需要用到的場合並不多‥低次也相對不實用‥很少真的用克拉馬去解)

我會強調它的一般性，與可以推廣性，可以程式化地交由電腦處理等意義，以及數學簡單之美(以簡御繁之力量)‥‥

我會先提，國中時期，學過一元一次方程式，一元二次方程式與二元一次方程組

一元一次方程式，有沒有公式解? 有！一元二次呢？也有！那你們學過的二元一次方程組呢?
然後，帶他們找到二元一次方程式的克拉瑪公式解‧‧‧‧
數學的力量在於以簡御繁
二元一次方程組的解，可以表徵用行列式表徵成簡單的樣子。那接下來，數學家會怎麼想呢?三元一次方程組呢?
(以下看情況，可能只是介紹性地提一下，不一定真的去提三階行列式的展開，看學生程度與能力‧‧畢竟三階展開還算好記‧‧)
數學家費了九牛二虎再加兩隻象之力，終於發現三元一次方程組的解，剛好又可以用行列式來表徵成簡單的樣子
有些學生會問(或反問)，二次的公式解好像沒有比較簡單，好像還比較麻煩‧‧
這時，拿出一個 4 次或 5 次的方程組‧‧‧‧
解它需要花一點力氣‧‧ ‧‧(不一定要讓他們解，主要嚇嚇他們‧‧)
這時，我可以馬上就又寫出 4 次或 5 次的公式解 (和二次的長得一模一樣‧‧然後，嘿嘿‧‧‧‧)
也就是克拉瑪公式的重要性與優點，也在於可以一般化與可推廣性‧‧‧‧
不止二元一次，三元一次，四次以上亦然‧‧‧‧
處理任意 n 元一次方程組等等，這個公式都可以繼續推廣上去，還是保持"一模一樣"的格式‧‧
這也方便相關理論的建立
當二元一次方程組，克拉馬公式看似化簡為繁，但等到數學家處理高次的問題時‧‧就顯現出他的好處了‧‧‧‧
有時間的話，我會順便跟學生分享一下，大一上被 n 維向量荼毒的歷程:世上有種怪物叫數學家，他們通常不喜歡只處理二維三維的問題，還喜歡推廣，跑到 n 維世界去搗蛋‧‧‧‧
另外，對比一下二次與三次多項方程式的公式解(一直到五次以上多項方程式沒有公式(根式)解‧‧)， 就發現克拉馬這個公式的利害
然後，提一下三次到五次方程式公式解的故事，順便說說，我那可憐的悲情"伽羅瓦"的故事‧‧‧‧(我是這個家族的= =)
也就是說，只要一個"克拉瑪公式"加上行列式的展開法‧‧就可以把原本很複雜的解方程組問題通通變成機械化的公式算則‧‧‧‧
看似不起眼的小公式，竟然可以處理這麼多問題‧‧
順便提一下，複習一下，數學家的特色:喜歡長話短說 :**解 n 次方程組的千言萬語全寫在一個公式中**
但是，要會使用這個公式，其中的行列式的部份與怎麼展開行列式就反而變成重要的問題了‧‧‧‧
所以，引入要為什麼還要學行列式性質
最後，會提一下，數學家發明公式之後，聰明的現代人更可以進一步利用相關公式原理寫"程式"，命令電腦解之‧‧‧‧
然後，回顧一下剛學過的高斯消去法(有系統地加減消去)也有類似的優點與功能，也可以程式化‧‧‧‧

兩個看似比加減消去法都麻煩的方法，都可以一般化與推廣
在處理複雜問題時，反而更有序，也符合呆呆電腦的機械性思維
都可以程序化，程式化
也會跟學生說，電腦笨笨的，他不會像人類聰明地觀察係數，有效地做加減消去法，但是給他一個程式，再複雜的情況都可以一步一腳印地處理‥ ‥
人類發明公式與程式，複雜計算交給電腦
不選，將來有一天要奴役電腦之前，請先學會原理與理論‥‥‥
這也就是為什麼數學家比電腦聰明的地方囉!!!!
以上，是之前教學中引發學生學克拉馬公式，以及行列式性質動機的方法‥
亂七八糟說了一堆，還請學長姐們海涵與指正。俊瑋

2012/1/4
Hi~
在以前的課程架構下，有高斯消去法、聯立方程組求解，所以，很容易引進些有的沒有的。但是現在的課程，第三冊最後一節是「面積與二階行列式」，只談「面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定」與「兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式」(以上摘自課綱)。簡單地講，克拉瑪公式在此非常地單薄，若想要豐富其內容，勢必要談到三階以上的克拉瑪公式。那在現行的課程架構下，該如何是好呢？我們都是對數學史極有興趣的夥伴，可以集思廣益：如果要在「面積與二階行列式」這一節融入數學史的話，除了講講歷史外，還有沒有其他的方式？腦力激盪一下，或許會有很好的想法。倉億
PS1. 靜如問過我為什麼不停在三階克拉瑪公式就好，還要進入四階，甚至是五階。理由有二：一是讓學生真的看到，的確是可以推廣到高階去的，<u>而且是用他們手邊現有的工具就可以辦到(照著一定的規律寫出，而不需要真的解方程式)</u>，當然，會很辛苦，所以，以後學了高階行列式後，套句俊瑋的話：「數學的力量在於以簡御繁」。回顧歷史，在沒有行列式之前，這公式是「以繁御繁」，想法是簡單的，但寫法真的是繁。
理由二是：各位有沒有試過在黑板上寫出一個四階行列式，然後問學生它的值是多少？絕絕絕大多數的學生一定是仿照三階那樣的繞法將它乘開，所以只有 8 項。我記得自己在大一線代課算四階行列式的時候，也是傻傻地用這個方法。在克拉瑪的方法中，分母有 24 項，就是四階行列式展開的項數，我試著在這個地方 do something，像是打預防針吧。
PS2. 俊瑋文中有提到：「數學家費了九牛二虎再加兩隻象之力終於發現三元一次方程組的解，剛好又可以用行列式來表徵成簡單的樣子。」我以前也會用類似的說法，相信這也是許多老師的說法。可是看了這段歷史之後，才發現這樣子的說法似乎隱含時間倒置的問題，也就是說，暗示先有三階行列式，然後才有克拉瑪公式。事實上，是對聯立方程組的研究才導致出矩陣、行列式的出現，然後克拉瑪公式才會改觀(從克拉瑪到凱萊差不多過了 100 年)，也因此克拉瑪公式才會有機會進入高中數學課程之中。如果只是教書，時間先後的問題其實大可不必理會它，但我就是想在這邊試試看。教書還是以學生的學習為重，如果效果不如預期，我會再想想如何調整，也有可能這一節(第三冊最後一節)的確是不該讓數學史進來太多。

2012/1/4

感謝學長拋問題與回答，讓我有進一步反思的機會

課程編排或教學上，常以邏輯性與教學方便性為主，未必考量了歷史發展的順序或成因‥我想我也是常犯這類的問題‥

如何適當地安插入歷史以利教學與學生概念的學習果然是一大課題‥

我前面的想法主要是，回應克拉瑪公式的部份‥(不過，以前沒特別去研讀相關歷史(汗||)所以主要單純就是以自己的想法與引發動機為目的

畢竟，單從解方程式而言，而不考慮推廣與數學之美，對大多數學生而言，它是麻煩，甚至是多而不實用的工具

(光是順利流暢地解三元一次方程組對不少高中學生而言都不是件易事了‥‥以學測均標常是 5~6 級分來看‥‥顯見數學對大多數中學生是"難"呀難‥‥)

過去的課程克拉馬公式與高斯消去法放在同一節，確實還可以進一步讓學生討論反思比較數學"方法"上優缺點 (實際手算以及加上電腦程式設計計算上的觀點‥以及理論的建立)

一般消去 vs 高斯 vs 克拉馬

手算上高斯消去法與克拉馬公式雖看似是以繁御繁，但是從數學理論的建立與電腦程式化(建立程序性算則與公式)的觀點，就大不同了‥

數學家發明了解理論，才有辦法設計好的程式，使用電腦來解決問題‥

當然少部份特別喜歡解題 sop 標準流程或代公式的學生，自然看到公式就情有蜀獨鍾，不管三七二十一想拿來用了(程序化反而對這部份學生是種簡單的事‥)

另外，提一點對行列式的想法‥‥

近 10 多年來，高中已不教授 4 階行列式的展開(當然降階法可(自然地)推廣上去)，所以，即使會跟部份提到 4 階以上克拉馬公式，主要還是和學生討論"數學的推廣與一般化"，至於細節也無法太著墨‥

若從降階的角度來看，反而比較能展現 4 階展開為 24 項而非 8 項(降成 4 個 3 階行列式)然從一般繞圈圈的"速記展開法"則容易產生"迷失概念"(misconception)，學生的認知基模誤以為 4 階以上可以以此類推‥但偏不是

(關孝和，他自推的 5 階行列式公式即有誤(1680 年代。不過從他更早的算書的解題過程中， 推測就用到類似行列式(2~3 階)的關係來列方程式，但沒有明寫‥這還需進一步考查，然而井關知辰(1690)的降階法，推到 5 階以上則對的‥)

降階法比較是 n 階行列式的自然推廣，而繞圈圈則上 2 階到 3 階的自然推廣(4 以上便不那麼適用‥)

所以，課程與教學方法的安排上，各有其優缺點‥

當然若高中只是教二階三階，繞圈圈法就夠且適合學生記與用‥但多數學生可能會終身抱持 4 階以上仍可如此的迷失概念‥‥（此法則要引入排列組合，才有辦法講清楚，為什麼是 24 項）萬一這些學生將來念到 4 階以上行列式有關的東西，就需要花點力氣打破"這個迷失概念"了

所以，以此來看降階法反而是正統‥2 階 3 階的速記法反而是巧合的特例‥該與學生強調只是三階的展開式剛好可以這樣記!??

(不知學長們教學上 是如何安排)
單就現在的課綱(目前我還沒實際教過 99 綱第三冊的學生，所以並不是很透徹‥)
單就課綱與課本來看，第三冊的行列式特別與面積與掛勾(提供坐標平面上求解面積的另一好用公式)，還有判斷直線關係‥
似乎一開始是為了用一個新符號來表徵一個比較複雜的關係式 ac-bd
接著，便先起個頭介紹行列式這個概念和一些基本性質
由於二階的相關性質比較顯然，又有面積表徵可參照這些性質的幾何意義，有利學生學習這些性質
在二年級時，先讓學生從二階行列式，初步認識"行列式"這個新概念與符號與相關性質之後三年級再推廣到三階(這部份比較屬螺旋式課表安排，一年一年循序漸近)就比較輕鬆了‥
從幾何來促進學生學習行列式概念的理解是課本的徑路
至於單就二階行列式而不再考慮其它問題，是不是在這部份歷史除了動機考量之外，對於概念學習就更難有發揮的空間了
以上，再請學長們有空時給與指教與!!
感恩!感恩! 俊瑋

2012/1/4
各位伙伴：
覺得俊瑋所言「二階的相關性質比較顯然，又有面積表徵可參照這些性質的幾何意義，有利學生學習這些性質 」這個解讀深有同感。這也是我覺得 99 課綱 3-4 可以好好發揮的部份，可惜的是，課本對於行列式的性質與(有向)面積的連結不重視。 俊鴻

2012/1/5
老師、大家好：
南一版課本對面積與行列式的連結有比較多的著墨，可是必須都是在行列式值為正的情況之下才成立。
我教這地方的時候，並沒有提這一部分，一來龍騰版的課本沒有這一部分(所以搭配的《新突破講義》也就沒有，作者是北一女的蘇 x 鴻)，我就真的給他忘記了，是後來看到科內老師的教學觀摩有教這一段，才突然想起來。二來，該連結只能在行列式值為正的情況，那行列式值為負的時候要怎麼樣？若要引入有向面積，我覺得會太複雜了，反而不利學生學習，畢竟這裡的有向面積並不像用黎曼和求積分的有向面積那樣單純。所以，最後我還是決定不跟學生補充這一部分。俊鴻學長若有好的教法，趕快提出來分享吧！雖然我花了不少時間做克拉瑪公式的 PPT，但我內心真正的聲音是：「把二階克拉瑪公式移到第四冊去吧！」不知道大家以為如何？另外，在我做的 PPT 中留了一個思考題(第 12 張投影片)，這一兩天經科內老師與實習老師的協助，有了初步的成果，我覺得還蠻有趣的，先簡略地呈現(請見附加檔)，等這一段時間忙完後，再寫一篇較詳細的說明。順便再請教大家，附加檔中的成果，是否有其他對應的數學問題或定理，有的話還請告訴我，謝謝！ 倉億

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）英家銘（中國醫藥大學）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

HPM 高中教室

單元五：函數概念的發展

蘇惠玉
台北市立西松高中

配合課程單元：**99** 課綱數學 **I**，多項式函數

一、前言

函數是 **99** 課綱數學 **I** 教材的主題重點，**99** 課綱在附錄說明中提到：

> **近年來，由於許多學科的數量化與數學化的需求，使得各國的高中數學教育特別重視函數及其應用。…本次課綱修訂，也加強函數這個主題。**

函數的基本定義在國中已經學習過，然而學生的函數的瞭解，大部分停留在「代值」與「找函數值」的表面意涵，更由於解方程式過度強調的影響，讓學生分不清何時應當使用函數，何時應當是求方程式的解。因此本單元希望通過對數學史中函數的概念發展過程的瞭解，讓學生瞭解與欣賞函數的基本概念，以及更加瞭解與函數在數學上的重要性。

函數的概念（**idea of function**），如果我們以『後見之明』來看的話，似乎很早就有，例如小石頭與數數之間的一一對應關係。數學史家**V. Katz**就曾提出一個問題：我們能否在托勒密 **(Ptolemy,** 約 **100~178)** 的中「弦表」看到現代函數概念的萌芽？[2]托勒密的弦表為為角度與正弦值（圓心角所對的弦長）的對應，這是否是一種函數？「函數」的觀念只在於「表格」中的「對應」而已嗎？隨便一張兩個數量間的表格都能說成有函數概念蘊含其中嗎？**Katz**認為雖然托勒密除了制訂表格之外，還能應用所謂的「線性內插法」來得到「獨立變數」的任何值所對應的函數值，然而只能說托勒密具有現在所稱的函數關係這個概念，然而並沒有討論過函數的一般概念。

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

然則函數的主要概念到底是什麼？我們在國小、國中時早就學過「比例」關係中的一對一關係，但是，我們並不會將它們冠上「函數」的名稱，而要在什麼時候、什麼單

---

[2] 托勒密的《數學大全 Mathematiki Syntaxis》對希臘人的宇宙模型給出了完整的數學結構，書中第一次定義何謂正弦（圓心角所對的弦）與餘弦，並製作出弦表，給出角度與弦長的對應值，後來伊斯蘭數學家將此書改成《大成 Almagest》。

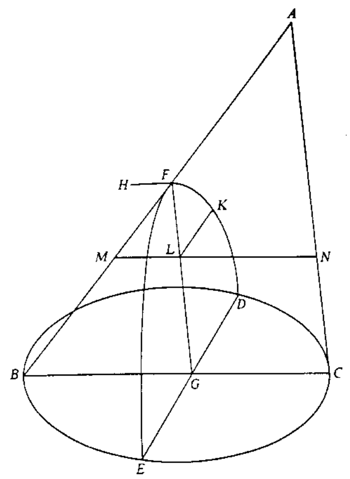
元才稱得上在學習「函數」呢？

有鑑於此，本單元在論及函數的概念歷史發展時，從國小、國中、高中有關函數概念教學的這個角度與需求出發，並不論及較為一般化的函數「定義」，只著重在與初等教育較為相關的「解析式(**analytical expression**)」的函數「定義」，因此著重在數學家的研究主題必須以「變量之間的關係」來處理者，例如曲線軌跡、極值、微積分等等，也就是說，希望從「變量」這個角度，來考察函數概念的發展與其在學生學習方面的啟示與幫助。

二、變量與曲線軌跡

在歷史上，藉著兩個變量之間的關係，通過圖形來呈現曲線的軌跡，在阿波羅尼斯（**Apollonius,**約西元前 **262～190**）的《錐線論》已經出現。若以現在的符號來說明，可以看出他是以任一點的縱坐標（變量）所成的正方形，與橫坐標（變量）及正焦弦（常數）所成的矩形作比較，來決定什麼樣的「曲線」稱為拋物線、橢圓或雙曲線。例如阿波羅尼斯在《錐線論》第一卷命題中寫道：

> **設有一圓錐，頂點為 A，底為圓 BC。令其被過軸的平面所截成的三角形為 ABC。又圓錐被另一與底交於直線 DE 的平面所截，DE 與直線 BC 垂直。設這樣在圓錐表面形成的截痕為 DFE，其直徑為 FG，平行於軸三角形的一邊 AC。又設過 F 點作直線 FH 垂直於直線 FG，並且使它按比例：正方形 BC：矩形 BA, AC:: FH : FA 作出。**
>
> **在<u>截線上任取點K</u>，過K作直線KL平行DE。**
>
> **我認為正方形 KL＝矩形 HF, FL。**

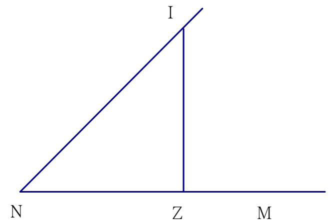


也就是說，若以直角座標系的角度來看，任一點 **K** 的縱座標（**y** 座標）為 **KL**，橫座標（**x** 座標）為 **LF**，即可得方程式 $y^2 = px$ ，此處 $\boldsymbol{p}$＝**HF**，滿足這樣關係式的圖形軌跡即為拋物線。

在此之後，當然還有很多數學家論述或使用軌跡的觀念，他們將變量間的關係利用圖形（即軌跡）來表徵並提出通則。其中最有貢獻者，當屬笛卡兒及費馬的解析幾何之誕生。

費馬創立平面坐標系的目的，或者是對於方程式研究的關心所在，迥異於笛卡兒。對比笛卡兒著重方程式根的「幾何作圖法」，費馬則強調方程式中兩未知量關係所決定出的軌跡。他在 《平面與立體軌跡引論 ***Introduction to Plane and Solid Loci***》 **(1679)** 中寫道：

每當兩個未知量（unknown magnitudes）出現在最後方程式中時，我們就得到一個軌跡，兩未知量中的一個的端點（extremity）描繪出一條直線或曲線。……
為了有助於方程式的概念，我們希望（desirable）讓這兩個未知量形成一個角，通常假設它是直角，其中一個未知量的位置與另一未知量的端點是確立的。……



接下來，費馬將各種「方程式」的軌跡分類說明，例如軌跡是直線時，如圖，設 **NZM** 為一給定位置的直線，其中 **N** 點的位置固定，設 **NZ** 為一未知量 **a**（現代符號一般表示表示為 **x**），**ZI**（從角 **NZI** 而畫的線段）為另一未知量 **e**（現代符號表示為 **y**）。若 **da=be**（即 **dx=by**），由 $\frac{b}{d}=\frac{a}{e}$ 的比例關係及 **N**、**NZ** 的位置固定，我們就可決定另一未知量端點所描繪的軌跡 **NI**。

從費馬對軌跡的描述中，我們可以清楚看出，他將變量間的關係，轉化成幾何關係，即是所謂的軌跡。事實上，在函數觀念被完全認識之前，歷史上有很長一段時間被當成曲線來研究，尤其是由運動學所衍生出的曲線，譬如『求方曲線』、阿基米德螺線、擺線，甚至是伽利略所定義的拋物線。

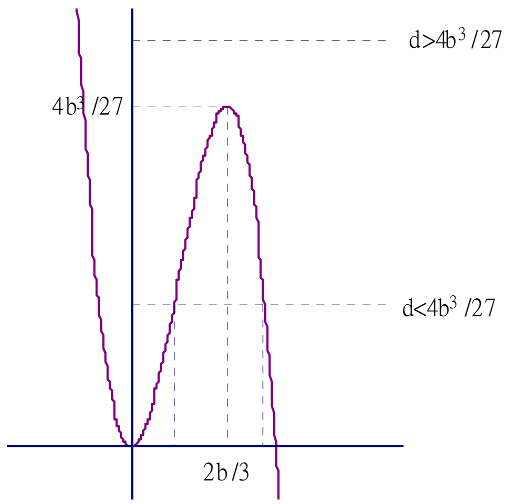
伽利略的《兩種新科學》（***Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences***）（**1638**）的貢獻之一，在於他使用數學模型的抽象化來討論物理現象。在本書（包括有三天的對話錄）中，充斥著以比例形式寫成的定理、命題，例如：第一天討論的「兩個體積相同的圓柱體的表面積，若底部不計，其比值等於它們的長度的平方根之比」、「有相同曲面積的兩個正圓柱體，其體積的反比等於高度之比」；第三天中的「一個從靜止開始的等加速度運動的物體，所經過的距離之比等於時間的平方之比」等等，這些比例關係都是有關兩個變量之間關係的呈現方式之一。顯然，十七世紀西方數學家或科學家從對運動學的研究中，引起對變量間的關係之重視，而導出一個極重要的觀念，亦即是函數，然後，它在微積分的發明及使用過程中，逐漸成熟並且被廣為接受。

三、變量與極值

導致微積分發明的四大問題之一，即是求極大值與極小值。為了求出所謂的極值，必須先有所謂的變量之觀念，然後，變量的變化會得到另一相對應的結果，如此才能求對應值（即所謂的函數值）的極值。其實，早在 **13** 世紀初的阿拉伯世界，即有數學家 **Sharaf al-Dīn al-Tūsī** 應用極值的觀念來求得方程式的解。

Sharaf al-Dīn al-Tūsī（約 **1213** 年）一開始跟他的前輩 **Al-Khayyāmī** 一樣，也是先將三次方程式分類，但是，由於他的焦點在於方程式解（正根）的個數與係數的關係，

所以，他的分類方式與 **Al-Khayyāmī** 不同。在討論型如 $x^3+d=bx^2$ 這類的方程式時，他採取了不一樣的策略。首先，他將方程式改寫成 $x^2(b-x)=d$，他認為這個方程式有沒有解，在於 $x^2(b-x)$ 能不能達到 **d** 這個值。他宣稱當 $x_0=\frac{2b}{3}$ 時，$x^2(b-x)$ 有最大值，也就是說，當 $0<x<b$ 時，$x^2(b-x)\le(\frac{2b}{3})^2(\frac{b}{3})=\frac{4b^3}{27}$。當 **d** 的值大於 $\frac{4b^3}{27}$ 時，方程式沒有解（正根）；若 **d**$=\frac{4b^3}{27}$ 時，有一解；若 **d**$<\frac{4b^3}{27}$ 時，有兩解，參見下圖：



Sharaf al-Dīn al-Tūsī 並沒有提及他是如何找到 $x_0=\frac{2b}{3}$，但是，他提供了幾何證明，指出 $x_0=\frac{2b}{3}$ 確實是極大值所在。不管如何，他確實考慮了變量，以及變量的對應值，不管他有沒有使用相關的術語。

而微積分的發明與使用，確實使函數概念更進一步成熟與廣泛被接受。例如，牛頓在 **1676** 年回答有關萊布尼茲的詢問的一封信中提到，他看到沃利斯(**Wallis**) 論級數的書中提到有關圓、雙曲線在 **0** 與 **1** 之間曲線下的面積時，他進一步將曲線下的面積以 **x** 的「函數」的形式來表示，即使他並沒有提到「函數」這個字眼：

> **事實上是，在一系列以 x 為公共底或軸線，縱坐標分別為**
>
> $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$，$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$，$(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$，$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$，$(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$，$(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ **等等，**
>
> **它們的面積分別為**
>
> x，$x-\frac{1}{3}x^3$，$x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$，$x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ **等等……**

在後期的《曲線求積》(***Tractatus de quadratura Curvarum***) 中，牛頓更認為：

> 在此我並不將數學量看成是微小量之聚集，而是連續運動之結果。對直線的描述不再是相同部分的延展，而是點的連續運動。…
> 因此考慮那些在相同時間增加的量，以及透過增加所生成的量，它們變化的快慢取決於增加及生成速度的快慢。我找到了一種由運動或是增加的速度來決定生成量的方法，稱那些運動或增加的速度為流數(fluxions)，那些生成量為流量(fluents)…

牛頓雖然沒有使用「函數」**(function)** 這個字眼，不過，從上述引文我們可以看出實際上牛頓已經使用了函數的概念。而萊布尼茲則直接在 **1673** 年的手稿中，使用 **"function"** 這個字來指曲線上各點之間量的變化。

等到函數的概念更加被廣泛應用之後，它的定義也越來越不再侷限於解析的形式。尤拉在 ***Introductio in analysin infinitorum***（無限解析入門，**1748**）中，原來將函數定義成：

「一個變量的函數為一個解析式，由變量與數字，或是常數量，以各種方式構成。」而到 **1755** 年，他就將函數的定義修改成：**「如果某些量依靠在一些量上，當後者改變時，前者跟著改變，則前者稱為後者的函數。」**

我想每一個學過高等數學的人，都能夠明白函數的重要性，也都知道函數的一般化定義決不是一個如 **Euler** 早期的「解析式」定義這麼簡單，但是如同蕭文強老師提出的問題一樣，當初等教育只牽涉到「解析式」時，如何讓學生瞭解函數真正核心的概念與重要性？從上述簡單的函數概念的「啟蒙」發展過程來看，函數的概念出現在數學課程各個單元，各個階段的學習過程中，以各種形式來呈現，例如比例，方程式，曲線圖形等等。在數學學習的過程中，尤其是現今的數學教材，如果能時時刻刻從教材中「體會」與「欣賞」到函數的概念與妙用，數學的學習將可呈現結構性的一貫，以即出現許多意想不到的樂趣。

Exercise

1. 兩個集合 **A**、**B**，請寫出由 **A** 對應到 **B** 的函數定義。

2. 所謂線性內差法，即假設函數的變數 **x** 與其對應值 **y** 的關係為一線性函數。
若已知此線性函數圖形上的兩點 **A(1, 5)**，**B(3, 9)**，求 **x=2** 所對應的函數值為何？

3. 以下為費馬求極大值時所舉的一個例子：

將線段 AC 分成兩段，分段點 E，使得 AE×EC 有最大值。

設 $\overline{AC}$ ＝**b**，求 $\overline{AE}$ ＝？時會使得 $\overline{AE} \times \overline{EC}$ 有最大值，最大值為何？（以 **b** 表示）

4. 以 **Sharaf al-Dīn al-Tūsī** 的方法，就 **k** 的範圍討論 $-x^3+3x=k$ 實數解的個數。

5. 你覺得下列牛頓的引言中，哪個部分蘊含有函數的概念？並說明你的理由。

> 在此我並不將數學量看成是微小量之聚集，而是連續運動之結果。對直線的描述不再是相同部分的延展，而是點的連續運動。…
> 因此考慮那些在相同時間增加的量，以及透過增加所生成的量，它們變化的快慢取決於增加及生成速度的快慢。我找到了一種由運動或是增加的速度來決定生成量的方法，稱那些運動或增加的速度為流數(fluxions)，那些生成量為流量(fluents)…

參考文獻

Kline, M. (1983).《數學史—數學思想的發展》，林炎全、洪萬生、楊康景松譯。台北：九章出版社。

李文林主編 **(2000).**《數學珍寶》，台北：九章出版社。

Calinger, R. ed. (1995). ***Classics of Mathematics*****. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.**

Katz, V.J. (1993). ***A History of Mathematics—an Introduction*****. New York: HarperCoollins College Publishers.**

Siu, Man-keung(1995). "Concept of Function—Its History and Teaching", in ***Learn From the Masters!*** **Edited by Frank Swets** ***et al*****, MAA.**

Dawn Leigh Anderson e***t al*****., (2004). "Function", in** ***Historical Modules Project*****, MAA.**

克拉瑪的生平(一)

- 1704年7月31出生於瑞士日內瓦，1752年1月4日逝世於法國。
- 1722年(18歲)取得博士學位，1724年(20歲)在日內瓦的克萊文學院(Academie de Clavin)教幾何學與力學。
- 1727年旅居歐洲各地兩年，這是克萊文學院當初聘任他時的附帶條件。這兩年時間，克拉瑪認識了許多有名的數學家，對他往後的人際關係及數學研究有很大的影響。回到日內瓦教書後，仍與許多數學家保持密切的聯絡

克拉瑪的生平(二)

- 克拉瑪先後當選過英國皇家學會、柏林科學院的會員，是法國、義大利等多個學會的成員。
- 約翰·伯努利生前堅持只有克拉瑪才能編輯並出版他的全集*Complete Works*，該書於1742年出版，共有四冊。約翰還請克拉瑪編輯他已逝的哥哥雅克布的全集二冊，並於1744年出版。
- 伯努利兄弟是當時歐洲頂尖的數學家，由此可知克拉瑪在數學家間是相當受尊敬的。

克拉瑪的著作

- 1750年出版《代數曲線的分析導論》(*Introduction à l‘analyse des lignes courbes algébrique*)，這本書主要是在探討曲線，特別是求通過平面上若干點的曲線，例如求過平面上五個已知點的二次曲線。
- 在這本書的附錄一中，出現了今日所謂的克拉瑪公式

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.

Par

GABRIEL CRAMER,

Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A GENEVE,

Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.

MDCCL.

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c.$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c.$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c.$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c.$$
$$\&c.$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. sont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes $+$ ou $-$, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il est pair ou nul, le terme aura le signe $+$; s'il est impair, le terme aura le signe $-$. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2X^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le signe $+$. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe $+$, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le signe $-$.

Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ses termes, Z en A. Et la valeur d'y est la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une maniére semblable la valeur des autres inconnues.

附錄一之翻譯(一)

有若干個未知數 z、y、x、v、……等，還有個數相同的方程式：

$$
\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \cdots\cdots \\
A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \cdots\cdots \\
A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \cdots\cdots \\
A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \cdots\cdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

這裡諸如 A^1、A^2、A^3、A^4、……等並非如同平常那樣代表 A 的次方，而是代表第一個、第二個、第三個、第四個……方程式的左側，假定是已知的。類似地，Z^1、Z^2、……是 z 在第一個、第二個……方程式的係數；Y^1、Y^2、……是 y 在第一個、第二個……方程式的係數；X^1、X^2、……是 x 在第一個、第二個……方程式的係數；V^1、V^2、……是 v 在第一個、第二個……方程式的係數。

附錄一之翻譯(二)

利用這符號，如果只有一個方程式及一個未知數 z ，我們可以得到 $z=\dfrac{A^1}{Z^1}$。如果有兩個方程式及兩個未知數 z 和 y ，我們可以得到 $z=\dfrac{A^1Y^2-A^2Y^1}{Z^1Y^2-Z^2Y^1}$，$y=\dfrac{Z^1A^2-Z^2A^1}{Z^1Y^2-Z^2Y^1}$。如果有三個方程式及三個未知數 z 、 y 和 x ，我們可以得到

$$z=\frac{A^1Y^2X^3-A^1Y^3X^2-A^2Y^1X^3+A^2Y^3X^1+A^3Y^1X^2}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2}$$

$$y=\frac{Z^1A^2X^3-Z^1A^3X^2-Z^2A^1X^3+Z^2A^3X^1+Z^3A^1X^2}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2}$$

$$x=\frac{Z^1Y^2A^3-Z^1Y^3A^2-Z^2Y^1A^3+Z^2Y^3A^1+Z^3Y^1A^2}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2}$$

附錄一之翻譯(三)

細察這些公式，給了我們一個一般性的法則。方程式與未知數的個數都是n，我們可以得到每一個未知數之值，方法是寫出n個分母相同的分數，其分母的項數與n個不同物的排列數相同，每一項都是由字母$ZYXV\cdots$保持這個順序組成，而指數則是前n個數字的所有排列情況。因此，當我們有三個未知數的時候，分母會有$[1\times 2\times 3=]6$項，由字母ZYX依序搭配指數123、132、213、231、312、321而組成。

$$z=\frac{A^1Y^2X^3-A^1Y^3X^2-A^2Y^1X^3+A^2Y^3X^1+A^3Y^1X^2-A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

附錄一之翻譯(四)

我們再根據以下的法則將這些項標上＋或－。在同一項中，當某一個指數大於下一個或是更後面的指數時，我稱為錯置。數一數每一項錯置的數目，如果是偶數或零，那這一項的符號就是＋；如果是奇數，那這一項的符號就是－。舉例來說，在 $Z^1Y^2X^3$ 中並沒有錯置的情況，所以這一項的符號是＋。$Z^3Y^1X^2$ 的符號也會是＋，因為有兩個錯置：3在1前面與3在2前面。而 $Z^3Y^2X^1$ 有三個錯置：3在2前面、3在1前面與2在1前面，所以它的符號會是－。

當共同的分母寫出來後，我們將分母中的 Z 改成 A，然後放在分子，如此就能得到 z 的值。y 的值是一個有相同分母的分數，而分子則是將分母中的 Y 改成 A。依此方式就可以得到其他未知數之值。

$$z=\frac{A^1Y^2X^3-A^1Y^3X^2-A^2Y^1X^3+A^2Y^3X^1+A^3Y^1X^2-A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

$$y=\frac{Z^1A^2X^3-Z^1A^3X^2-Z^2A^1X^3+Z^2A^3X^1+Z^3A^1X^2-Z^3A^2X}{Z^1Y^2X^3-Z^1Y^3X^2-Z^2Y^1X^3+Z^2Y^3X^1+Z^3Y^1X^2-Z^3Y^2X^1}$$

用克拉瑪的方法解下列聯立方程式

$$\begin{cases} 6 = 3\cdot z + 2\cdot y + 1\cdot x \\ 1 = 1\cdot z + 1\cdot y - 1\cdot x \\ 4 = 5\cdot z - 3\cdot y + 2\cdot x \end{cases}$$

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$= \frac{6\cdot 1\cdot 2 - 6\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 1} = \frac{-25}{-25} = 1$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$= \frac{3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot 6\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 1 + 5\cdot 6\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 1} = \frac{-25}{-25} = 1$$

$$x = 1$$

四階克拉瑪公式

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 \cdot z + Y_1 \cdot y + X_1 \cdot x + V_1 \cdot v \\ A_2 = Z_2 \cdot z + Y_2 \cdot y + X_2 \cdot x + V_2 \cdot v \\ A_3 = Z_3 \cdot z + Y_3 \cdot y + X_3 \cdot x + V_3 \cdot v \\ A_4 = Z_4 \cdot z + Y_4 \cdot y + X_4 \cdot x + V_4 \cdot v \end{cases}$$

- 分母共有 <u>4!=24</u> 項
- 分母= $+Z_1Y_2X_3V_4 - Z_1Y_2X_4V_3 - Z_1Y_3X_2V_4 + Z_1Y_3X_4V_2 + Z_1Y_4X_2V_3 - Z_1Y_4X_3V_2$

$$- Z_2Y_1X_3V_4 + Z_2Y_1X_4V_3 + Z_2Y_3X_1V_4 - Z_2Y_3X_4V_1 - Z_2Y_4X_1V_3 + Z_2Y_4X_3V_1$$

$$+ Z_3Y_1X_2V_4 - Z_3Y_1X_4V_2 - Z_3Y_2X_1V_4 + Z_3Y_2X_4V_1 + Z_3Y_4X_1V_2 - Z_3Y_4X_2V_1$$

$$- Z_4Y_1X_2V_3 + Z_4Y_1X_3V_2 + Z_4Y_2X_1V_3 - Z_4Y_2X_3V_1 - Z_4Y_3X_1V_2 + Z_4Y_3X_2V_1$$

五階克拉瑪公式(一)

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 \cdot z + Y_1 \cdot y + X_1 \cdot x + V_1 \cdot v + U_1 \cdot u \\ A_2 = Z_2 \cdot z + Y_2 \cdot y + X_2 \cdot x + V_2 \cdot v + U_2 \cdot u \\ A_3 = Z_3 \cdot z + Y_3 \cdot y + X_3 \cdot x + V_3 \cdot v + U_3 \cdot u \\ A_4 = Z_4 \cdot z + Y_4 \cdot y + X_4 \cdot x + V_4 \cdot v + U_4 \cdot u \\ A_5 = Z_5 \cdot z + Y_5 \cdot y + X_5 \cdot x + V_5 \cdot v + U_5 \cdot u \end{cases}$$

- 分母共有 5!=120 項。
- 問題1：$Z_a X_b Y_c V_d U_5$中有 12 項是「+」的。
- 問題2：$Z_1 X_a Y_2 V_b U_c$中有 3 項是「+」的。
- 問題3：$Z_4 X_a Y_b V_2 U_c$中有 3 項是「+」的。
- 問題4：分母中有 60 項是「+」的。

$Z_1 X_3 Y_2 V_5 U_4$

$Z_1 X_4 Y_2 V_3 U_5$

$Z_1 X_5 Y_2 V_4 U_3$

$Z_4 X_1 Y_3 V_2 U_5$

$Z_4 X_3 Y_5 V_2 U_1$

$Z_4 X_5 Y_1 V_2 U_3$

五階克拉瑪公式(二)

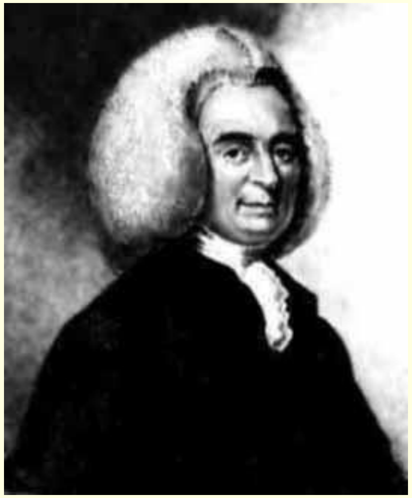
$$\begin{cases} A_1 = Z_1 \cdot z + Y_1 \cdot y + X_1 \cdot x + V_1 \cdot v + U_1 \cdot u \\ A_2 = Z_2 \cdot z + Y_2 \cdot y + X_2 \cdot x + V_2 \cdot v + U_2 \cdot u \\ A_3 = Z_3 \cdot z + Y_3 \cdot y + X_3 \cdot x + V_3 \cdot v + U_3 \cdot u \\ A_4 = Z_4 \cdot z + Y_4 \cdot y + X_4 \cdot x + V_4 \cdot v + U_4 \cdot u \\ A_5 = Z_5 \cdot z + Y_5 \cdot y + X_5 \cdot x + V_5 \cdot v + U_5 \cdot u \end{cases}$$

- 進階思考題
- 問題1：錯置數有多少種？
- 問題2：錯置數為 4 的有多少項？
- 問題3：若錯置數為 n 的共有 $f(\text{n})$ 項，則 $f(\text{n}) = ?$
- 問題4：試著將問題 3 的結果推廣到任意正整數階的克拉瑪公式。

麥克勞林的《代數學》

- 1698年2月出生於蘇格蘭，1746年6月14日逝世於蘇格蘭愛丁堡。1719年當選英國皇家學會會員(克拉瑪在1749年當選)。1725年獲牛頓推薦，擔任愛丁堡大學的數學教授。

- 死後兩年(1748年)，其《代數學》一書才出版。此書中也有今日所謂的「克拉瑪公式」(比克拉瑪的書早兩年)



A

TREATISE

OF

ALGEBRA,

IN

THREE PARTS.

CONTAINING

I. *The Fundamental Rules and Operations.*

II. *The Composition and Resolution of Equations of all Degrees; and the different Affections of their Roots.*

III. *The Application of* Algebra *and* Geometry *to each other.*

To which is added an

APPENDIX,

Concerning the general Properties of GEOMETRICAL LINES.

By *COLIN MACLAURIN*, M. A.
Late PROFESSOR of MATHEMATICS in the University of *Edinburgh*, and *Fellow* of the *Royal Society*.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, and J. NOURSE, opposite to *Catherine-Street*, in the *Strand*.
M.DCC.XLVIII.

and from a different Order of Coefficients: As, a, e, and d, b, in the first Theorem; and a, e, k, in the second; also, a, b, f; and d, b, k, &c.

THEOREM I.

§ 86. Suppose that two Equations are given, involving two unknown Quantities, as,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

then shall $y=\frac{af-dc}{ae-db}$;

Where the Numerator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients in the Orders in which y is not found, and the Denominator is the Difference of the Products of the opposite Coefficients taken from the Orders that involve the two unknown Quantities.

For, from the first Equation, it is plain that

$$ax=c-by \ldots \text{and } x=\frac{c-by}{a}$$

from the 2d, $dx=f-ey$ . . and $x=\frac{f-ey}{d}$

therefore $\frac{c-by}{a}=\frac{f-ey}{d}$, and $cd-dby=af-aey$

whence $aey-dby=af-cd$,

and $y=\frac{af-cd}{ae-db}$.

after the same Manner, $x=\frac{ce-bf}{ae-db}$.

EX-

EXAMPLE I.

Supp. $\begin{cases} 5x+7y=100 \\ 3x+8y=\ \ 80 \end{cases}$

then $y=\frac{5\times80-3\times100}{5\times8-3\times7}=\frac{100}{19}=5\frac{5}{19}$

and $x=\frac{240}{19}=12\frac{12}{19}$.

EXAMPLE II.

$$\begin{cases} 4x+8y=\ \ 90 \\ 3x-2y=160 \end{cases}$$

$$y=\frac{4\times160-3\times90}{4\times-2-3\times8}=\frac{640-270}{-8-24}=\frac{370}{-32}=-11\frac{9}{16}.$$

THEOREM II.

§ 87. Suppose now that there are three unknown Quantities and three Equations, then call the unknown Quantities x, y, and z.

Thus,

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases}$$

Then shall $z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$.

Where the Numerator consists of all the different Products that can be made of three opposite Coefficients taken from the Orders in which z is not found; and the Denominator consists of all the Products that can be made of the three op-

 posite

posite Coefficients taken from the Orders that involve the three unknown Quantities. For, from the last, it appears, that

$$y=\frac{an-afz-dm+dcz}{ae-db}, \text{ and that}$$

$$y=\frac{ap-akz-gm+gcz}{ab-gb}; \text{ therefore}$$

$$\frac{an-afz-dm+dcz}{ae-db}=\frac{ap-akz-gm+gcz}{ab-gb}, \text{ and}$$

$$\overline{an-afz-dm+dcz}\times ab-gb\times\overline{an-afz}+gbdm-gbdcz=\overline{ap-gm-akz+gcz}\times ae-db\times\overline{ap-akz}+gbdm-gbdcz.$$

Take $gbdm-gbdcz$ from both Sides, and divide by a, so shall

$$\overline{an-dm-afz+dcz}\times b-gbn+gbfz=$$
$$=\overline{ap-gm-akz+gcz}\times e-dbp+dbkz.$$

Transpose and divide so shall you find,

$$z=\frac{aep-abn+dbm-dbp+gbn-gem}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gec}.$$

The Values of x and y are found after the same Manner, and have the same Denominator. Ex. gr.

$$y=\frac{afp-akn+dkm-dep+gcn-gfm}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gec}.$$

If any Term is wanting in any of the three given Equations, the Values of z and y will be found more simple. Suppose, for Example, that f and k are equal to nothing, then the Term fz will vanish in the second Equation, and kz in the third, and $z=\dfrac{aep-anb+dbm-dbp+gbn-gem}{dbc-gec}$;

$$y=\frac{gcn-dep}{dbc-gec}.$$

If

If four Equations are given, involving four unknown Quantities, their Values may be found much after the same Manner, by taking all the Products that can be made of four opposite Coefficients, and always prefixing contrary Signs to those that involve the Products of two opposite Coefficients.

CHAP. XIII.

Of Quadratic Equations.

§ 88. IN the Solution of any Question where you have got an Equation that involves one unknown Quantity, but involves at the same time the Square of that Quantity, and the Product of it multiplied by some known Quantity, then you have what is called a *Quadratic Equation*; which may be resolved by the following

RULE.

1. " *Transport all the Terms that involve the unknown Quantity to one Side, and the known Terms to the other Side of the Equation.*

2. *If the Square of the unknown Quantity is multiplied by any Coefficient, you are to divide all the Terms by that Coefficient, that the Coefficient*

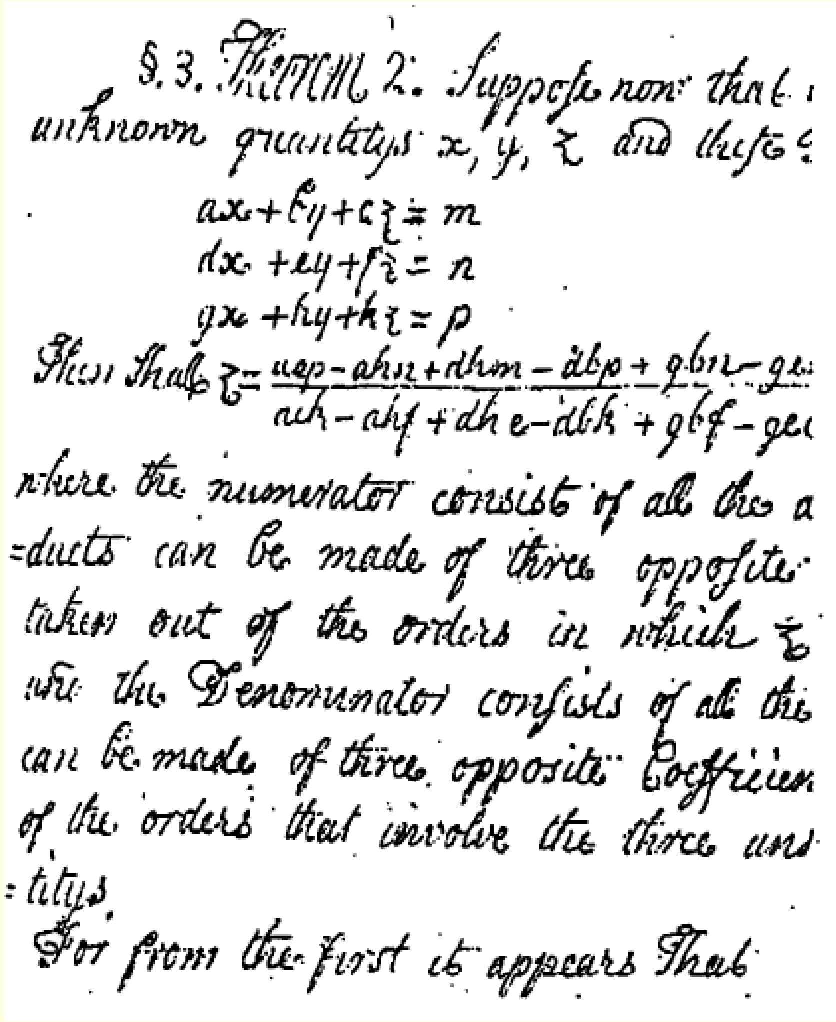
cient

麦克劳林的公式

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-db} \\ \\ y=\dfrac{af-dc}{ae-db} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ekm-bfm+bcn-bkn+bfp-cep}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \\ \\ y=\dfrac{afp-akn+dkm-dep+gcn-gfm}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \\ \\ z=\dfrac{aep-abn+dbm-dbp+gbn-gem}{aek-abf+dbc-dbk+gbf-gce} \end{cases}$$

麦克劳林1729年的手稿



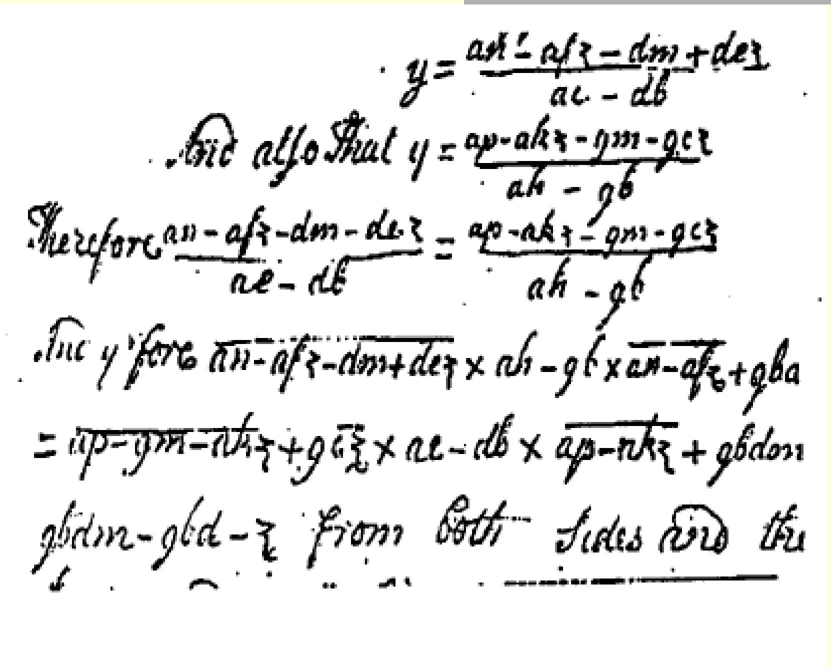
§.3. Theorem 2. Suppose now that ... unknown quantitys x, y, z and these e...

$$ax+by+cz=m$$
$$dx+ey+fz=n$$
$$gx+hy+kz=p$$

Then shall $z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-ge\ldots}{aek-ahf+dhe-dbk+gbf-gec}$

where the numerator consists of all the ... -ducts can be made of three opposite ... taken out of the orders in which z ... and the Denominator consists of all the ... can be made of three opposite Coefficien... of the orders that involve the three un... -titys

For from the first it appears that



$y=\frac{an-afz-dm+dez}{ae-db}$

And also that $y=\frac{ap-akz-gm-gcz}{ah-gb}$

Therefore $\frac{an-afz-dm-dez}{ae-db}=\frac{ap-akz-gm-gcz}{ah-gb}$

And y'fore $\overline{an-afz-dm+dez}\times ah-gb\times\overline{an-afz}+gba$

$=\overline{ap-gm-akz+gcz}\times ae-db\times\overline{ap-nkz}+gbdm$

gbdm − gbd − z from both sides and the

克拉瑪 V.S. 麥克勞林

- 你喜歡誰的公式？為什麼？
- 你認為應該稱為「克拉瑪公式」還是「麥克勞林公式」？為什麼？
- 現今用行列式的表示法，有什麼優點？