HPM通訊

第十三卷 第七、八期合刊 目錄（2010年8月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（英國劍橋李約瑟研究所）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

2010 年維也納歐洲暑期大學之行

劉柏宏
國立勤益科技大學 博雅通識教育中心

「歐洲暑期大學」(European Summer University, ESU) 源起於 1980 年代初期，由法國的數學教育研究院 (Institutes of Research on Mathematical Education) 所發起。自 1993 年起，整個會議的主題就逐漸聚焦於數學史和數學認識論的範疇上，因此，會議的全名就稱為 European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education。以往每隔三到五年不定期舉辦，自今年起，執行委員會議決定與 HPM 會議一樣，固定每四年舉行一次，並且和 HPM 相互錯開，也就是說，以後 HPM 的同好每兩年就會有一次 HPM 的聚會，不必像以往必須苦等四年。

由於筆者曾參加 2007 年在布拉格舉辦的 ESU-5，留下深刻的印象。今年的 ESU-6 於七月十九日到二十三日，在音樂之都維也納舉行，當然也不能錯過。ESU 和 HPM 的主題雖然類似，但其內容上有所不同。HPM 會議主要以論文發表為主，而 ESU 則偏重工作坊的形式。例如，今年在每天的大會演講結束之後，從上午 10:30 開始一直到下午 6:30 為止，共十八個場次的工作坊，而論文發表每天只有一個半小時，大約十二到十五場次。

和許多國際會議不同的是，ESU 沒有訂定會議主題（事實上，以往的 HPM 會議也是），所以，大會邀請的演講也都是自由發揮。不過，這也形成一種特色，可以讓與會者聆聽不同領域學者的高見。我個人覺得今年幾個大會演講的主題選擇得相當不錯，理論與實務兼具。例如，Uffe Thomas Jankvist 和 Michael Glaubitz 的演講題目都是以教育研究法的角度，設計嚴謹的教學實驗，以探究數學史教學模組的成效。Constantinos Tzanakis（前任 HPM 主席） 和 Evelyne Barbin（現任 HPM 主席） 所主持的專家論壇，則各自分享歐洲各國如何將數學史融入教科書

和師資培育之中。這也顯示出 HPM 逐漸走出紙上談兵的窠臼，開始邁入現實的教學場域。雖然我個人覺得教育研究法用於 HPM 的研究終究有其侷限，但打開大門接受這種「擬實證科學」的檢驗，也可以替 HPM 研究開創出一個新方向。

另一方面，以色列學者 Michael N. Fried 的演講主題“History of Mathematics in Mathematics Education: Problems and Prospects”，則提醒我們，於教學現場應用數學史時，切忌因為教學目的而忽略或扭曲數學歷史發展的本質。事實上，Michael N. Fried 早於 2001 的一篇文章 “Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?”[1] 中就提到教學本質與歷史本質可能的衝突。2003 年在夏威夷的 PME 會議上，我初次碰到他，就半開玩笑地對他抱怨那一篇文章可能毀了許多人的 HPM 研究計畫。他也承認他的觀點相當 critical，不過，他主要目的是提醒大家對此議題的關心。從 HPM 的立場來看，我個人認為如何應用數學史於教學現場應視教師的目的而定，只要達到某種程度的忠實，倒不必太拘泥於歷史的詮釋。畢竟歷史的詮釋或者史家的觀點一直呈現一種動態的流變，隨波逐流的我們如何認定何者才是正宗？太強調史觀，倒會使教學喪失許多樂趣。比方說，對學生講解如何欣賞蘇東坡的文章時，如果不能說說他「八風吹不動，一屁過江來」的逸聞趣事，似乎就無法全然體會蘇東坡的天真與灑脫。不過話說回來，真正無視歷史發展和扭曲人類認知歷史本質的元兇，不就是現今教科書的演繹式安排？所以，我個人對這議題的看法倒是有些「*爾愛其羊*，吾愛其禮」的味道。

每次出國參加學術會議都趁機在當地做一趟歷史之旅。這次在維也納也偷得半日閒，前去參拜幾個科學景點。從市中心搭上環城大道的公車，很快就可以到達有六百多年歷史的維也納大學。雖然歷史悠久，但是主建築物是十九世紀末興建，外觀相當新穎，入口處展現出些許非凡的氣勢，而我最欣賞的是校園的中庭。維也納大學的中庭花木扶疏，綠意盎然，學子或坐或倚，悠然地浸淫書中風華，與台灣喧鬧的大學校園相比，默默地散發一絲優雅的氣質。也許就是這種氣質才能孕育出哥德爾（Kurt Gödel）這般非凡的思想家。哥德爾 1930 年取得維也納大學博士學位，隔年便發表讓形式主義學派（Formalism）掌門人希爾伯特（Hilbert）傷心欲絕的「哥德爾不完備定理」，當時哥德爾才 25 歲。哥德爾不完備定理說，一個符合內部一致性的（consistent）公理化系統，一定是不完備的(incomplete)，也就是系統內必存在一個命題，無法被系統內自身的命題證明或證否，而必須引進另一公理化系統。換句話說，要靠單一抽象的公理化系統追尋永恆的數學真理是不可能的，一定會形成公理系統無限擴張的過程，「哥德爾不完備定理」也因此不僅消弭了數學基礎主義學派（Foundationism）之間的戰爭，更終結數學確定真理性的大夢。為了表彰哥德爾的貢獻，維也納大學在郊區設立一座「哥德爾數學邏輯研究中心」，其主建築物外牆爬滿綠藤，頗有遠離街道喧囂之意，恰符合哥德爾的性格特質。

維也納大學校門入口

維也納大學中庭

哥德爾數學邏輯研究中心

薛丁格研究院

而在離「哥德爾數學邏輯研究中心」相距不到一公里處，就是紀念另一位維也納大學之光，量子力學大師薛丁格（Erwin Schrödinger）的「薛丁格研究院」。1906 年，也就是哥德爾出生那年，薛丁格就進入維也納大學學習物理與數學，以短短四年時間取得博士學位。薛丁格一生重要的成就，首推 1926 年所提出的「薛丁格方程式」。簡單來說，透過薛丁格方程式我們可以解出一個波函數，用來描述電子的量子行為，所以，薛丁格方程式能幫助我們掌握原子中電子的行為，以了解微觀世界。不過，薛丁格最為膾炙人口的想法是那隻所謂「薛丁格的貓」。「薛丁格的貓」事實上是薛丁格思想實驗中可憐的主角，其說法是假設有一個封閉的盒子，裡面放了一隻貓、一個放射性原子核和一個裝有毒氣的偵測器。假設這個放射性原子核在一個小時內有一半的機率發生衰變。如果發生衰變，它將會發射出一個粒子，觸發裝有毒氣的偵測器，從而殺死這隻貓。由於原子的衰變與否決定貓的生死，因此我們可以將這隻貓的生或死的狀態對應於原子

衰變的波。如果我們不打開盒子進行觀測，原子核永遠處於已衰變和未衰變這兩種可能情形的疊加狀態，也就是說貓是處於既死又生的一種模糊狀態之中。但是，如果在一個小時後把盒子打開，霎那間兩個波函數疊加的結果，會形成一種確定狀態，因此實驗者只能看到「衰變的原子核和一隻死貓」或者「未衰變的原子核和一隻活貓」，而不是未打開盒子前的那隻「不知死活」的貓。這個思想實驗說明了觀察者本身的行為可能影響觀察結果的詭異現象，而這種情形在古典物理學中是不可能發生的。一隻貓的生死也從確定性的物理科學問題變成一個可能性的科學哲學問題。

談到科學哲學，我們又必須提到另一位維也納大學引以為傲的人物：卡爾波普（Karl Popper）。波普在 1918 年進入維也納大學當一位旁聽生，那一年第一次世界大戰德奧宣告戰敗，一個混亂但也充滿活力的新世界於焉展開，這段期間波普在維也納大學瘋狂地閱讀、辯論與研究。1919 年是影響波普科學思想最關鍵的一年。那年 5 月 29 日英國愛丁頓（A. S. Eddington）爵士所率領的考察團隊，在不同地點測量光線在太陽引力場的軌跡，證實了愛因斯坦的預言。波普出席了那年愛因斯坦在維也納的演講，深受愛因斯坦的科學觀點所折服。愛因斯坦直率地說，即使他的預言被這次的觀察所證實，並不意味他的學說是真理，因為只要未來某一次的觀察結果不相符，就可以證明他的理論是錯的。也就是說，一次觀察所得的事實不能證明理論的正確性，卻能推翻（refute）（或者說證否 falsify）相關的理論。這也形成波普主張「不能被證否的理論就不算是科學」的思想源頭。波普最後在 1922 年通過入學考試成為正式生，並在 1928 年取得博士學位。而如今波普的思想不僅影響自然科學思想，也終結了邏輯實證主義，正如同晚他兩屆的學弟哥德爾終結形式主義一般。維也納大學對波普的禮遇不亞於獲得諾貝爾獎的薛丁格，他和薛丁格的塑像都陳列於中庭旁的長廊，僅僅數尺之距。

維也納大學校園薛丁格塑像

維也納大學校園波普塑像

我常想像著薛丁格、波普、和哥德爾這三位成長於相同年代的科學思想家，是否曾在維也納大學中庭的大樹下促膝長談，彼此交會出智慧的火花？或是曾在那深邃長廊六目相視，激蕩出數學、科學與哲學的黃金交叉？維也納大學在各項世界大學評比中早列百大，而台灣目前正計畫以大筆預算設法打入排行。薛丁格、波普、和哥德爾的學術生涯都孕育於生活艱苦的第一次大戰前後，當時何來百億？想起被清華大學師生尊為永遠校長的梅貽琦先生曾說過：「所謂大學者，非謂有大樓之謂也，有大師之謂也」。大學之所以能成其大唯有透過歷史的粹鍊與累積，而非金錢的建構與堆積，殊不知金錢如流水，來得快去得也快。梅校長不僅與薛丁格都是物理同行，且生卒年也約莫相同（梅貽琦校長 1889~1962；薛丁格 1887~1961），猜想梅校長可能也有相同的想法，因而有感而發吧？

參考文獻

Fried, *Michael N*. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* 10: 391-408.

解說《括要算法》亨卷「剪管術」

邱珮瑜
國立臺灣師範大學數學系碩士班

一、前言

提到和算，一定會談到關孝和 (1642 – 1708)，他出身在最繁榮，被號稱是日本文藝復興的時代，也是和算發展最黃金的一段時間。這一期間的數學成就與發展，也形成了一股不同於中國數學的氣象，他是和算史上數學開拓最多的數學家，和算受其影響很深。我們研讀和算文本也從關孝和的著作開始，從《發微算法》、《三部抄》，一直到最近的《括要算法》(1712)。其中，我們發現了許多相同與不同於中國數學的特色及成就，也從原本以為和算只是相近於中算的抄本內容，到現在漸漸開始欣賞和算的獨特風格，除了驚艷於古人的成就與數學素養之外，也更崇拜當時為了數學努力的各門流派。當時這種自然成形的數學研究風氣，就像很多國外的大學校園裡，常常看到兩、三位學生就地討論起數學的樣子，著實令人羨慕！

關孝和正式出版的著作不多，《括要算法》就是其弟子荒木村英 (Araki Murahide, 1640 – 1718) 與孫弟子大高由昌 (Ohtaka Yoshimasa) 在關孝和死後，將其遺稿整理出版，序跋時間是寶永六年 (1709)，刊行時間是正德二年(1712)。此書共分為元卷、亨卷、利卷與貞卷共四卷[1]。其中，亨卷又分為『諸約術』與『剪管術』，主要是探討不定分析的問題。『諸約術』的內容，又分成互約、逐約、齊約、遍約、增約、損約、零約、遍通、以及剩一等術。不過，本文主要論述剪管術。

二、傳自中國的剪管術

剪管術是有關求解一次同餘式組的問題，且讓我們回到中算史脈絡探索其根源。這歷史可說是十分悠久，並且有許多古人著墨，成就非凡。從中國的《孫子算經》（大約在 280 - 420）卷下 26 問「物不知數」(又稱孫子問題) 開始，以下即文本內容：

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三

術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三

[1] 參考徐澤林（2008）〈和算選粹〉之《括要算法》提要，pp. 145 – 149。

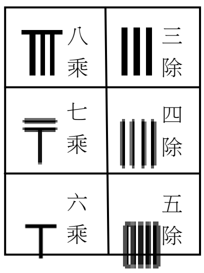
數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

以下將上述文字，轉為現代作法及科學符號：

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{3} \\ N \equiv 3 \pmod{5} \\ N \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \quad N = 70\times 2 + 21\times 3 + 15\times 2 - 105\times 2 = 23$$

雖然《孫子算經》中已出現求一術，集大成的卻是南宋秦九韶。他所做的工作是將物不知數問題推廣到任意的模數（非兩兩互質）及餘數，此方法，稱為「大衍總數術」，他先將模數化為兩兩互質，再利用「大衍求一術」（《括要算法》『求一術』類似此術）求解。這也就是《括要算法》的『剪管術』。到了中國明代，程大位《算法統宗》(1592) 中，[2]就有孫子歌曰：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百令五便得知。」在當時流行編成歌訣，廣為流傳。在剪管術的文本中，也可見此歌訣。

這裡所提及之剪管術的練習題目共有九題，每一題均以「今有」為開頭命題，皆有「答曰」、「術曰」、「解曰」三個部分，答曰提供了答案；術曰則像套入既定的公式，代入該題的數字即可得出答案；而解曰則是將實際運用之前所介紹的方法，[3]以及對術曰中的數字多加說明，甚至會用更小的字體多加說明。搭配解曰的說明，讀者可以更了解該術的做法，在後面幾題更以圖的方式來做籌算的計算，如圖。



這九題分別由易至難，第一與第二題為兩個同餘式的問題，只是模數為互質與不互質兩種；[4]第三與第四題為三個同餘式方程組，模數為兩兩互質以及兩兩不互質的情況；第五題為四個同餘式方程組；第六題與第七題為三個同餘式方程

---

[2] 《算法統宗》（程大位，1592），傳日時間不詳。1627 年，吉田光由（Yoshida Mitsuyoshi, 1598 - 1673）的《尘劫記》是根據此書編寫的。該書對江戶初期的和算影響頗大。

[3] 此方法指《括要算法》亨卷的『諸約之法』。

[4] $aX \equiv c \pmod{b}$，b：模數，a：乘數，X：此稱為總數。

組，而多了乘數不為 1 的情況；第八與第九題為總數已知，乘數未知的同餘式方程組。以下列出文本內容的題目與現代符號的表示方法：

X：總數

a：乘數

1	今有物，不知總數，只云：五除餘一個，七除餘二個，問總數幾何？	$\begin{cases} X \equiv 1 \pmod 5 \\ X \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$
2	今有物，不知總數，只云，三十六除餘二個，四十八除餘一十四個，問總數幾何？	$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{36} \\ X \equiv 14 \pmod{48} \end{cases}$
3	今有物，不知總數，只云，三除餘二個，五除餘一個，七除餘五個，問總數幾何？	$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod 3 \\ X \equiv 1 \pmod 5 \\ X \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$
4	今有物不知總數，只云，六除餘三個，八除餘三個，十除餘五個，問總數幾何？	$\begin{cases} X \equiv 3 \pmod 6 \\ X \equiv 3 \pmod 8 \\ X \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$
5	今有物、不知總數，只云，五除餘三個，七除餘二個，九除餘二個，十一除餘七個，問總數幾何？	$\begin{cases} X \equiv 3 \pmod 5 \\ X \equiv 2 \pmod 7 \\ X \equiv 2 \pmod 9 \\ X \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$
6	今有物、不知總數，只云，三十五乘，四十二除，餘三十五個，四十四乘、三十二除，餘二十八個，四十五乘，五十除，餘三十五個，問總數幾何？	$\begin{cases} 35X \equiv 35 \pmod{42} \\ 44X \equiv 28 \pmod{32} \\ 45X \equiv 35 \pmod{50} \end{cases}$
7	今有物、不知總數，只云，八乘三除餘二個，七乘四除餘三個，六乘五除餘三個，問總數幾何？	$\begin{cases} 8X \equiv 2 \pmod 3 \\ 7X \equiv 3 \pmod 4 \\ 6X \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$
8	今有物，總數三十四個，不知相乘數，只云，八除餘六個，二十除餘一十四個，二十七除餘二十三個，問相乘數幾何？	$\begin{cases} a*34 \equiv 6 \pmod 8 \\ a*34 \equiv 14 \pmod{20} \\ a*34 \equiv 23 \pmod{27} \end{cases}$
9	今有物，總數一十三個，不知相乘數，只云：七除餘三個，九除餘八個，問相乘數幾何？	$\begin{cases} a*13 \equiv 3 \pmod 7 \\ a*13 \equiv 8 \pmod 9 \end{cases}$

在下文中，將介紹及分析「剪管術」。

三、「剪管術」分析

如前所述，剪管術等價於秦九韶的大衍總數術，其子算法 - 剩一術 類似於秦九韶的大衍求一術。因此，先介紹括要算法中的剩一術，文本內容如下：

> 今有以左一十九累加之得數，以右二十七累減之，剩一，問左總數幾何？
> 答曰：左總數一百九十。
> 術曰：以左一十九除右二十七，得商一，不盡八，為甲。以甲不盡八除左一十九，得商二，不盡三，為乙。以乙不盡三除甲不盡八，得商二，不盡二，為丙。以丙不盡二除以不盡三，得商一，不盡一，為丁乃餘左O一而止。
>
> 甲商與乙商相因，加定一，得三，為子。子與丙商相因，加甲商，得七，為丑。丑與丁商相因，加子，得一十是左段數，以左一十九乘之，得左總數一百九十，合問。

以現代的符號呈現則如下：

乙 2	19 16	27 19	1 甲
丁 1	3 2	8 6	2 丙
	1	2	

⇨

1	× 2	+	1	=	3	
甲	乙		定一		子	
3	× 2	+	1	=	7	
子	丙		甲		丑	
7	× 1	+	3	=	10	
丑	丁		子		左段數	
10	× 19		=		190 (左總數)	

解法分成兩個部分，第一部份，也就是上圖左，事實上，就是我們所熟知的「輾轉相除法」，將其寫成算式如下：

$$27 = 19 \times 1 - 8$$
$$19 = 8 \times 2 - 3$$
$$8 = 3 \times 2 - 2$$
$$3 = 2 \times 1 - 1 \quad \text{-------------------------------}(1)$$

第二部分，也就是右邊的部份則是先將(1)式改寫如下：

$$8 = 27 - 19 \times 1$$
$$3 = 19 - 8 \times 2$$
$$2 = 8 - 3 \times 2$$
$$1 = 3 - 2 \times 1 \quad \text{--------------------------------(2)}$$

接著，從 (2) 式的最後一個式子往回推到只有 27 與 19 的式子，如下：

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \times 1 \\ &= 3 - (8 - 3 \times 2) \times 1 = 3 \times 3 - 8 \\ &= (19 - 8 \times 2) \times 3 - 8 = 19 \times 3 - 8 \times 7 \\ &= 19 \times 3 - (27 - 19 \times 1) \times 7 = 19 \times 10 - 27 \times 7 \end{aligned}$$

這裡的 10 就是右邊所求的左段數。

解法的第一部分與現在的輾轉相除法相同，第二部分也就是找出 ax+by=1（a, b 已知整數）的最小整數解的方法。透過這個方法，可以得到 ax 的值，這個方法就是所謂的剩一術。

現在，我們就正式介紹剪管術的做法，此以第三題為例，文本內容如下：

> 今有物，不知總數，只云，三除餘二個，五除餘一個，七除餘五個，問總數幾何？
>
> 答曰：總數二十六個。
>
> 術曰：三除餘以七十乘之，得一百四十個，五除餘以二十一乘之，得二十一個，七除，餘以一十五乘之，得七十五個，三位相並，共得二百三十六個，滿一百零五去之，餘二十六，為總數，合問。
>
> 解曰：依逐約術，三，五，七皆不約五、七相因，得三十五，為左，以三為右，依剩一術得七十，為三除法。三、七相因，得二十一，為左，以五為右，依剩一術得二十一，為五除法。三、五相因，得一十五，為左，以七為右，依剩一數得一十五，為七除法。三、五、七相乘、得一百零五、為去法。

以現代的符號呈現如下：

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod 3 \\ X \equiv 1 \pmod 5 \\ X \equiv 5 \pmod 7 \end{cases} \quad \text{X：總數}$$

術曰的部分：

$2_{（三除餘）} \times 70 ＝ 140$；$1_{（五除餘）} \times 20 ＝21$；$5_{（七除餘）} \times 15 ＝ 75$

$140 ＋ 21 ＋ 75 ＝236$

$236 － 105 － 105 ＝26$。

解曰的部分說明如下：

因為模數 3、5、7 皆互質，根據逐約術，[5]不用再化簡。接著將 5 乘以 7，得到 35，將 35 與 3 利用剩一術得到 70，式子為

$35 \times 2 － 3 \times 23 ＝ 1$。

同樣地，將 3 乘以 7，得到 21，再將 21 與 5 利用剩一術得到 21，式子為

$21 \times 1 － 5 \times 4 ＝ 1$。

最後，將 3 乘以 5，得到 15，再將 15 與 7 利用剩一術得到 15，式子為

$15 \times 1 － 7 \times 2 ＝ 1$。

得到 70 這個數字，但是並不滿足第一個式子，因為

$35 \times 2 － 3 \times 23 ＝ 1$

代表 $70 \equiv 1 \pmod 3$，70 除以 3 的餘數為 1，因此，將 70 乘以 2（即三除餘），得到 140，除以 3 的餘數就為 2；同樣地，將 21 乘以 1（即五除餘），得 21；接著將 15 乘以 5（即七除餘），得到 75。將此三數相加，滿足此同餘式方程組。再減去 105（三、五、七相乘，稱之去法）的倍數，就可以得到 26 為其解。

而遇到模數兩兩不互質的情況，就需要利用諸約術來作調整，如第二題就要互約數，第四題就要利用逐約術來調整模數。

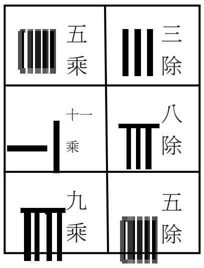
更進一步地，如果是像第六、七題的情形，出現乘數的時候，也要先作調整，如第七題，式子如下：

$$\begin{cases} 35X \equiv 35 \pmod{42} \\ 44X \equiv 28 \pmod{32} \\ 45X \equiv 35 \pmod{50} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5X \equiv 5 \pmod 6 \\ 11X \equiv 7 \pmod 8 \\ 9X \equiv 7 \pmod{10} \end{cases}$$

因為 $35X \equiv 35 \pmod{42}$，可以寫成 $35X = 42Y + 35$，所以，先約分 7 得

[5]《括要算法》亨卷的『諸約之法』的逐約術，參考徐澤林（2008）〈和算選粹〉之《括要算法》，頁 184。

到 $5X=6Y+5$，得到新的同餘式方程式，就變成模數兩兩不互質的同餘式方程組。透過逐約術調整模數之後，就得到如下圖的新乘數與新模數，文本中就出現如下的籌算圖：



至此，同餘方程式中的乘數仍不為 1，因此，要調整成乘數為 1 的情況，便可以利用第三題的解題方法。文本中，調整的動作如下：

> 以五乘為左，三除為右，依剩一術得左二段。以一十一乘為左，八除為右，依剩一術得左三段。以九乘為左，五除為右，依剩一術得左四段。

以現在的符號來寫就是：

$5Y\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow Y=2$

$11Y\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow Y=3$

$9Y\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow Y=4$ [6]

實際上，就是再用一次剩一術。接著再利用第三題的方式，得到最小整數解。

第八、九題將方程式寫出來之後，就是第三題問題的形式。

四、感想與結論

我們可以發現剪管術其實與中國的內容大同小異，儘管再多作了一些延拓。由此可知，十七世紀中國算書如《楊輝算法》、《算學啟蒙》和《算法統宗》對日本和算初期的影響有多深遠。我們甚至可以猜測在當時，這也是很熱門的數學問題之一。

剪管術在大學數論 (Number Theory) 課堂上是一定會出現的單元，它其實也就是所謂的中國剩餘定理。然而，在數論的課堂當中，通常不會介紹如此多的題目，甚至有些題目只是出現在習題練習當中。而在此一和算文本中，它卻是將許多常見的情況皆呈現出來。和算家雖然沒有解釋理由，然而，這種呈現卻也可刺激讀者深入思考，嘗試不同的解題方法，再參考「解曰」的部份，再進一步推廣

---

[6] 如果(a , n)=1，則存在一個整數 b，使得 $ab\equiv 1 \pmod n$ 。

到其他的情況。因此，就算沒有老師講解，也能夠做為自我練習教材。

在研讀完剪管術的內容之後，我對於大學所學的中國剩餘定理，有了更多不一樣的歡喜與感受。除了比較有名的中國剩餘定理或同餘定理之外，我們發現日本也發展出相同的剪管術，從它的編排來看，由簡至難的設計，讓讀者可以一步步深入學習。而關孝和更是很有耐心地，將每一題的「術曰」與「解曰」皆詳細說明，對於學習者來說，是一本非常有用的參考書目，無怪乎和算與關流的關聯如此密切。

參考文獻

文耀光 (1999).〈大衍求一術與二元一次不定方程〉,《數學傳播》23(2): 86-92。
徐澤林 (2008).《和算選粹》(1 版)，北京：科學出版社。
洪萬生 (2009).〈求一術的出路：同餘理論有何教學價值與意義？〉,《數學快遞》第 2 期：1 - 8。

後記：

最近，由台師大數學系博士班黃俊瑋學長所組成的讀書會，都在閱讀有關日本數學 (通常稱為「和算」) 的內容 。說起來真是一種緣分，這一本出版不到兩年，熱騰騰的《和算選粹》(徐澤林，2008)，在我們讀書會成立的時候，由洪老師的推薦之下，成為了我們新的學習內容。有關日本數學，對於我們來說都是新穎的內容，而我們也從一開始的毫無頭緒到今天讀了不多也不少的內容，這樣的小成果，我的心中充滿悸動，尤其是對於這篇內容，儘管只是歷史上的這一個小段落，我已經從古代愛到現代。最後，感謝我們這個讀書會的成員，大家都用心準備，更在每次讀書會的時候熱情參與分享，給予我許多協助與意見，讓我每次都有許多收穫與成長。

國立清華大學歷史所博士論文摘要--
《唐代算學與社會》

陳敏晧
國立蘭陽女中

本論文的研究角度是從算學的角度出發，根據唐代時期的算經十書為本，輔以數學史家的研究專著，在這一基礎上，結合史家有關唐代的生活史、社會經濟史以及文化史之研究，利用內史與外史證據相互檢驗，說明數學與唐代社會經濟與文化發展之互動關係，目前有關唐代生活史、經濟史與文化史的研究專書，鮮少根據算學的面向出發，因此，在本論文的第一章所強調的研究獨特性，在於開發唐史研究的另一面向，以期豐富唐代史學的多元論述。

第二章的討論在於算學與算學制度的研究，筆者將釐清算學與大唐社會文化的層面，同時論及唐代的算學教育方式；第三章中的討論在於算經文本與算學家成就，深入研究的議題是李淳風與王孝通的算學成就；第四章討論唐代算學在公領域的應用，其中包含測量、工程與天文曆算，同時關注點放在曆法改革層面，另唐代出現世界上最早的正切函數值表，筆者將研究其文本意義；第五章討論糧倉問題，回溯算經中糧倉的形狀與容量，這是算經在生活史領域極為重要的表現，也關係到庶民的生存之道，內容也將以實際考古的含嘉倉作為佐證資料；第六章的重心落在日常生活的算學應用，如納稅或借貸等經濟問題，是從不同的角度審視大唐帝國的經濟議題，我將以具體實例如利息與定腳價問題，反映唐代特殊的歷史現象；第七章我將大唐的疆土延伸到西域，思索敦煌算書的歷史背景與其應用情形，順便再將佛學與算學做適當的聯結，此對於唐代算學研究將趨於完整性；第八章筆者將觸角延伸到唐代算學的東漸與中印算學交流，討論中國與日本及朝鮮算學交流的文化層面。

總之，由於中國傳統算學在唐代已經具備算學舉才的制度，在此制度的烘托之下，算學成為經濟活動或社會文化的一部分，同時唐朝出現多元的算學風貌，也使唐朝算學史研究趨於專業性與獨特性，因此，本論文雖然是從算學史的角度出發，可是，內容卻是結合財政、經濟、社會、文官制度、曆法、軍事、考古、佛教、文化交流等綜合性研究論述。

附註：本論文在清大歷史所賴瑞和教授與台灣師大數學所洪萬生教授聯合指導下完成，在撰寫博士論文的過程中，兩位教授諄諄教誨、細心斧正、耐心引導，令筆者十分感動與感謝，特為之註。

博士論文摘要--

南秉吉 (1820-1869) 對古典算學的重新詮釋

英家銘

臺灣師範大學數學系博士班

摘要：

本篇論文討論韓國朝鮮王朝末期數學家南秉吉 (1820-1869) 的算學研究。南秉吉共寫下七部算學著作，是當時朝鮮算學家中的代表。這七部著作為《緝古演段》、《無異解》、《測量圖解》、《算學正義》、《劉氏勾股述要圖解》、《九章術解》、《玉鏡細草詳解》，其中《劉氏勾股述要圖解》是南秉吉對勾股術的專著，《算學正義》是包含東算所有重要主題的教科書，其餘五部均為對古典中算內容的注解或討論。

朝鮮王朝末期的算學家，其算學知識來自兩個傳統。其一為中國宋元時期傳入高麗王朝，基於籌算的算學著作，後來被朝鮮王朝保留並列為算學取才科目。其二為中國明清時代的算學家與耶穌會傳教士所編著之西方數學著作，以康熙時代編纂之中西數學融合的百科全書《數理精蘊》為代表。從南秉吉的算學研究內容，也可以看出這兩個傳統的融合。南秉吉的勾股理論研究主要來自《數理精蘊》；幾何圖形均為類似歐氏幾何之頂點標號靜態圖形；論證風格則透過《數理精蘊》間接受到巴蒂版《幾何原本》的影響，強調以直覺理解。南秉吉的代數研究，聚焦於基於籌算的宋元代數方法「天元術」，與耶穌會傳教士傳入清國之代數方法「借根方」之間的差別。南秉吉早期認為兩種方法無異，但到晚年學習過「四元術」後，則較傾向使用「天元術」。

南秉吉的對古典中算內容的注解或討論，也充分展現這種融合的傳統。以《九章術解》為例，他使用「四率比例」注解今有術與盈不足術，而「四率比例」正是中西數學融合的例證。此外，他使用類似歐氏幾何的圖形，但在解題時也用到接近「出入相補」的手法。另外，他在生涯早期完全以借根方解天元術，後期則用借根方為天元術背書之後再將之擴充至四元術。

綜觀南秉吉的算學研究，發現他大多是用《數理精蘊》為代表的中西融合算學知識重新詮釋古典算學。借用西方正典的概念，筆者認為，南秉吉在生涯早期希望以清帝國與朝鮮共同認定的數學正典《數理精蘊》來詮釋古典算學的知識，到生涯後期則希望寫出朝鮮自己的正典，在大多數數學主題保留《數理精蘊》的知識，但在代數方面強調天元術與四元術，最後編成《算學正義》。南秉吉所代表的，是 19 世紀初葉至中葉，朝鮮算學家以當代知識重新詮釋古典算學的努力。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（文華中學）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！