HPM通訊

第十三卷 第十二期 目錄（2010年12月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘 謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

淺談數學與數學建模

蔡天鉞
台灣師範大學數學系退休教授

數學在各個領域受到廣泛的重視，對一個國家的科技發展亦有深遠的影響。對大部分的人而言，學習數學的目的，是為了解決其所面對的數學問題，而非要成為一個數學家。就如對大部分的人而言，學習語言目的是要學會如何與人溝通、如何充分表達自己的想法，或欣賞文學作品，而非成為語言學家、文學家等。如果，學習數學的目的，是為了解決其所面對的數學問題，那麼我們對數學的內涵與如何應用數學似乎應有些基本的認識，本文試著對這兩個問題作一簡單介紹。

首先，我們試著介紹數學的內涵。由於每一門學科都有其探討的對象與探討的方法。那麼，數學探討的對象是什麼？探討的方法又如何呢？一般而言，數學常在探討一些抽象化後的東西，將這些東西收集在一起形成所謂的集合。對於數學的兩大領域：代數與分析，簡略說明如下。

對於單一集合，我們考慮如何表示集合、元素個數與子集合等問題。對於兩個集合，則考慮它們是否相等、如何結合在一起：運算（交集、聯集、差集　、積集）與運算性質（結合性、交換性、分配性）、元素間的對應關係(函數)等問題。

對於單一集合 S，我們更進一步討論元素間的關係，其方法是：

1. 引入函數 $f: S\times S\to S$ ，稱為二元運算，將集合間的元素結合成新的元素，定義二元運算的一些性質：結合性、單位元素、反元素、交換性、分配性(兩個二元運算)，再根據這些運算性質定義群、環、體等。

   例如：討論群 $(G,\otimes)$ 時，

   (1) 會考慮 $(G,\otimes)$ 是否為交換群，若不是，則考慮

      (a) 會與每一個元素都可交換的元素，這些元素所形成的集合稱為群的心(center) $Z(G)=\{x\mid x\otimes g=g\otimes x,\forall g\in G\}$ 。

      (b) 會與每一個元素都可交換的子群 $N, Ng=gN,\forall g\in G$ ，稱為群的 正規子群

(normal subgroup)。

(2) 兩個群間的函數，則會考慮函數是否會保持群的運算 $f:(G_1,\oplus)\to(G_2,\otimes)$，$f(x\oplus y)=f(x)\otimes f(y)$

稱為同態 (homomorphism)。另外，兩向量空間的線性變換,亦是相同的想法。

2. 利用函數 $d:S\times S\to R$：描述元素（點）與元素（點）間的距離。

d 稱為距離，滿足下列性質

(i) $d(x,y)\ge 0$

(ii) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(iii) $d(x,y)=d(y,x)$

(iv) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

(S,d) 稱為距離空間。 例如：(R, d), d(x,y)=|x-y|。有了距離的概念，就可引入極限，描述一點列的分布情形，是否會集中到某個點或某幾個點？可以討論兩個距離空間的函數是否連續？這為分析學的主要工具。

例如：從實數到實數的函數：$f:[a,b]\to R$，由於實數有代數結構（體）：加（減）乘（除）運算，又有距離（絕對值），因此，可以定義

(1) 微分：$\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c},c\in(a,b)$（減、除與極限）

(2) 積分：$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$，（加、乘與極限）其中

$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\},x_0=a,x_n=b$ 為 $[a,b]$ 的一分割，$t_k\in[x_{k-1},x_k]$

微分可用來描述一些與動態或瞬間變化率有關的問題（如後文介紹的，例七生態問題，與例八策略問題）。積分可用來求面積。微積分基本定理則將微分與積分連結在一起。微分與積分兩者間的關係猶如加法與減法或乘法與除法互為逆運算。

在積分定義 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$ 中，

(1) x_k-x_{k-1} 為區間 $[x_{k-1},x_k]$ 的長度，因此，對於數線上的任意子集合是否亦可給予某一個量？由此延伸出測度 (measure) 的概念。

(2) $\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$（長方形面積和）為階梯函數 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\chi_{[x_{k-1},x_k]}(x)$ 的積分。

因此，積分的定義可描述如下：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})\overset{def}{=}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

即透過階梯函數 f_n 逼近函數 f 與階梯函數 f_n 的積分（長方形面積和）來定義函數 f 的積分。

一般而言，設 $f_n,f:[a,b]\to R$ 且 $f_n\to f$ 為逐點收斂時，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

並不一定會成立，但當 $f_n\to f$ 為均勻收斂時，則會成立（高等微積分重要課題之一）。

(3) 上述積分稱為黎曼 (Riemann) 積分，是將定義域加以分割。其實，亦可考慮將值域加以分割，此時，將形成所謂的簡單函數 (simple function) f_n（需利用測度的概念

來定義），在某些條件下，這些 簡單函數 f_n 將逼近原函數 f ，再利用這些簡單函數 f_n 的積分來定義函數 f 的積分，這種新的積分定義方式稱為 Lebesque 積分。

測度與 Lebesque 積分為實變數函數論討論的主題之一，為 Fourier 級數、小波理論、泛函分析與機率論等學科的基礎。

對於數學思考方式有了些基本認識之後，我們再繼續介紹如何應用數學，其基本想法是數學建模。

前面提過，對一般人而言，學習數學的主要目的是為了解決他們所遇到的一些數學問題，而非成為數學家。因此，如何將所遇到的問題轉換成數學問題：數學建模，就成為一個重要課題。其流程如下：

真實世界裡的問題（自然現象、工程、物理、…）	→	數學模型（問題）	→	求解、檢驗與修正數學模型（解釋解的意義並與實際資料作比較，若不合理則修正模型）	→	分析使用（預測）

傳統的數學教育只著重在數學模型（問題）的解決，忽略了其他部分。以致於許多學生往往不知道他們所學到的數學究竟有何用途，可以解決什麼樣的實際問題，這實在是非常可惜的事。最近，數學教育界相當重視此一問題。請參考：*Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004*, A Report by the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of The Mathematical Association of America, September 22,2003。

將實際問題轉換為數學問題，需清楚的描述假設、瞭解系統中重要的概念、將問題抽象化與簡化、找出所有的變數與參數與各個量間的關係，最後再由所描述的關係導出數學關係式（方程式或方程組），對於這些關係式（方程式），可利用等號兩邊的單位是否一致,初步判斷每個關係式是否合理。（請參閱：劉來福、曾文藝編著：《數學模型與數學建模》，北京師範大學出版社, 1997）當然，這個過程並非都是簡單的問題（如：例三）。底下，介紹幾個例子。

例一：雞兔同籠。設籠子裡有雞與兔子，共有 30 隻腳、10 個頭，問雞、兔各有幾隻？

雞兔同籠問題或許是一人為的問題，可是當我們將其改為買鉛筆和原子筆時，假設鉛筆每支 2 元、原子筆每支 4 元，共花了 30 元，買了 10 支，試問各買幾支？似乎就更實際些。兩個問題似乎是不同的問題，卻可以具有相同數學形式。

在小學時，解此問題完全是以邏輯思考的方式來處理。假設籠子裡全部是雞，所以共有 20 隻腳，比實際上的 30 隻腳少了 10 隻腳。這是因為把每隻兔子都算成兩隻腳，每隻兔子少算兩隻腳，所以，兔子應有 5 隻，雞亦應有 5 隻。

可是，在國中時，學過方程式（組）、加法與乘法的運算性質。因此，根據每隻兔子 4 隻腳，每隻雞 2 隻腳這一事實，可將此一實際問題轉換成方程組（數學問題）。設兔子有 x 隻，雞有 y 隻，則

$$\begin{cases} 4x+2y=30 \\ x+y=10 \end{cases}$$

第一個方程式,等號兩邊都表示幾隻(腳), 第二個方程式,等號兩邊都表示幾個(頭).再利用加法與乘法的運算性質（代數）解此方程組。

到了高中階段，可將其表示為

$$x\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$$

因此，求 x 與 y 的值，即求向量$\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$是否可表示為向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$與向量$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$的線性組合？或向量$\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$是否在由向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$與向量$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$所張開的平面上？如果，向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$與向量$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$可以構成一組基底，則答案是肯定的。

例二：瞬間速率。設某人沿著福爾摩沙高速公路，由台北開往高雄，共開了 5 個小時 400 公里，試說明在高速公路上，必有某一瞬間的速率為 80 公里。

此問題亦可以邏輯思考的方式解決：若任何時間，速率都低於 80 公里，則不可能 5 個小時開了 400 公里，表示必有某些時間的速率高於 80 公里，可是當他通過收費站時，速率必須降至零或 50 公里以下（ETC 車道），由於速率是隨時間作連續變換，因此必有某一瞬間速率為 80 公里。

可是，當您學過微積分，由微分均值定理知：「必有某一瞬間速率等於平均速率」，所以，必有某一瞬間速率為 80 公里。

上述兩個例子說明，在不同的階段學到不同的數學知識，讓我們對於同一個實際問題或數學問題，有不同的思考與處理方式。當然，並非所有的實際問題都像上面的例子，很快地就可找到適當的數學模型與知識加以解決。底下的例子，從實際觀察到的自然現象，數學模型的提出，到問題的解決，共花了一百多年的時間。

例三、孤立子 (Soliton) 新的數學概念的誕生。在 1834 年，John Scott Russell 在英國愛丁堡的一條河流，發現有一個水波沿著河流前進並不會消失。後來在實驗室模擬，直到 1895 年，由 Korteweg & de Vries 提出此一問題的數學模型：稱為 KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

此方程式為一非線性偏微分方程。最後在 1967 年，由 Gardner, Greene, Kruskal, Miura 四個人提出解決的方法，稱為散射、逆散射理論（Method of solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19, pp. 1095-1097）。解決的過程需用到量子力學中的 *Schrödinger* 方程。而量子力學是在 1900 年代才產生的。亦即若無量子力學，此問題可能需要更多的時間或永遠無法獲得解決。這方程式的解稱為孤立子。其特徵是：(a) 波峰較高的孤立子，其速率較快。(b) 兩個波峰高度不同的孤立子，若波峰較高的由後面追趕波峰較低者時，當它們碰撞分開之後，還是各自保持原來的高度與速度。這些都和一般的水波的性質不同，為一非線性現象。

底下例四與例五，學過數學的人大概都知道的結果，可是，卻可能忽略了其應用。

例四：三圓共點。這個概念（數學模型）學數學的都知道，地震學家就是利用三圓共點的概念來找出震央：

	民國 88 年 9 月 21 日凌晨 1 時 47 分 15.9 秒發生了芮氏 7.3 級地震，震央南投縣集集鎮，因此又名「集集大地震」，這是一百年來，台灣最嚴重的一次地震.

（取自《全華高中數學》第三冊，另請參閱：中央氣象局，《地震百問》）

例五：雜訊的去除。在高中學習三角函數，大都把焦點放在三角測量上，而較少注意到 $\cos(nt)$ 和 $\sin(nt)$ 都是頻率為 n 的函數及其在數位訊號上的應用。

一般訊號可分為類比訊號、數位訊號，從數學的觀點來看：類比訊號為時間的連續函數，由於電腦無法處理無理數（無限的非循環小數），因此，將類比訊號取樣、量子化（類似於四捨五入）後得到數位訊號，數位訊號為一數列。

另一方面，一個訊號亦可視為由不同頻率的訊號組成的，此即 Fourier 級數：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)]$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt$$

一般而言，雜訊的頻率較高，因此，當要處理雜訊時，只需保留 n 較小的部分而將 n 較大的部分去掉，即可達到去除雜訊的目的。注意：上式 a_n 與 b_n 分別為函數 f 與 $\cos(nt)$ 與 $\sin(nt)$ 的內積.這與在 R^2 上取向量 $\vec{i}=(1,0),\ \vec{j}=(0,1)$ 為正交基底,則對 R^2 上的任一向量 $\vec{v}$ 都可表示為

$\vec{v}=<\vec{v},\vec{i}>\vec{i}+<\vec{v},\vec{j}>\vec{j}$

的想法是一樣的差別是：一為有限項的和,另一為無限項和（須考慮收斂問題）。

由於 Fourier 級數在應用上的一些缺陷，例如：兩個看起來很不一樣的訊號其 Fourier 係數卻相同。當一個訊號局部上發生變化時，其 Fourier 係數卻可能沒有改變。由於這些問題，大家都想找到能彌補這些缺陷的方法。[1]幸運的是，自 1980 年代開始，數學界有一新的結果產生：小波理論，此項結果彌補了這些缺陷。

例六：小波理論。事實上，Fourier 在 1807 年提出：任何週期為 2 π 的函數都可用 sin(nt), cos(nt) 表示。但在 1873 年， Paul Du Bois-Reymond 提出反例，由此產生幾個新的問題：

1. 哪些函數符合上述無窮級數（Fourier 級數）收斂？
2. 新的求和法（Cesaro mean)、收斂方式。
3. 在函數空間（無窮維向量空間）中是否可找到其他正交基底來代替 sin(nt), cos(nt)。（在高中階段學到的是有限維向量空間，其基底的元素個數為有限個。）[2]

上述第三個問題經一百多年的發展，在 1985 年，Y. Meyer 與 S. Mallat 提出 multiresolution analysis，其概念是，例如：當要量較短的距離時，會用較小的測量單位（例如：公分、奈米等），而當要量較長的距離時，則會用較大的測量單位（例如：公里、光年等），即根據所欲觀測對象的大小，選擇不同的測量尺度（scale）。在 1987 年，I. Daubechies 根據此一結果找到 compact supported wavelet（在某一範圍內的函數值不為零，其他位置都為零的函數）。從此，小波理論就被廣泛的應用到各個不同的領域上。像 JPEG2000 的壓縮技術、美國 FBI 的指紋辨識等。

小波基底是由一個母函數ψ經伸縮與平移得到的

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

當然，ψ需滿足某些條件。則對於滿足某些條件的函數f：

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha(j,k)\psi_{jk}(x)$$

其中$\alpha(j,k) = < f, \psi_{j,k} > = 2^{j/2}\int f(x)\psi(2^j x - k)dx$。

例七：生態問題。在 1926 年，一位義大利生物學家 Humberto D'Ancona 發現，Fiume 及 Trieste 兩個港口的魚貨，在一次大戰期間（1914 年 7 月 28 日～1918 年 11 月 11 日）及剛結束時，大魚 (predator) 所占的比例較高。（如下表）

TABLE 2.6.1 Percentages of Predators in the Total Catch (Predators + Prey)

Port	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Fiume	12%	21%	22%	21%	36%	27%	16%	16%	15%	11%
Trieste	14%	7%	16%	15%	—	18%	15%	13%	11%	10%

他請教他的岳父 Vito Volterra（義大利著名的數學家）是否有數學模型可解釋上述現象。後來，Volterra 建立了一個微分方程組模型，稱為 predator-prey 模型或 Lotka-Volterra 模型：

$$\begin{cases} x' = -ax + bxy \\ y' = cy - kxy \end{cases}$$

其中 x(t)大魚數量，y(t)小魚數量，a, b, c, k 為大於零的常數，並根據此一模型解釋了上述現象。(取自 R. L. Borreelli & C. S. Coleman: D*ifferential Equations*, 2^{nd} ed., John Wiley & Sons Inc, 2004)

例八：策略（戰略）理論

$$S_t = f(t, S, S_0, u)$$

其中$S(t)$描述一個國家或一家公司的狀態（隨著時間改變），S_0為現狀，u表示所採取的策略。此方程式（組）為最佳控制理論 (optimal control theory) 討論的對象。

以上這些例子，顯示了跨領域學習的重要性與數學在各個領域所扮演的角色，而當我們要描述各變量間的動態變化關係，則需要極限與微積分，這也許部分回答了為何要學習微積分。期望各位數學老師們能找出更多適合於中小學的例子，讓學生們更能感受到學習數學的好處與重要。

附註：

1. 參考 http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTpart1.html。
2. 請參閱：S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan: Wavelets, Tools for Science & Technology, *SIAM*, 2001.

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：英家銘（中原大學）許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（文華中學）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

數學史融入教學—以對數表為例

林倉億
國立台南一中

「對數」的出現，是為了簡化繁雜的乘、除及開方運算，直到 1970 年代，要算出 $\sqrt[3]{493.8\times 23.67^2\div 5.104}$ 的近似值，[1]仍要使用對數表。然而，在電子計算工具發達的今日，高中學生並無法感受到對數的「便利」，事實上，對許多學生來說，對數不就是一堆運算規則，麻煩的很！

如何在一開始引入對數時，就讓學生感受到對數的出現是來自於計算上的需求，在這一方面洪誌陽的〈對數隨筆〉與蘇俊鴻的〈數學史融入教學—以對數為例〉已有所介紹。然而，在今日課程綱要的架構下，對數是接在指數函數及其圖形之後，先是對數的定義及運算規則（第一冊第 3-3 節），再是對數函數及其圖形（第一冊第 3-4 節），最後才是指數與對數的應用（包含對數表）（第一冊第 3-5 節）。依此順序，教師要讓學生在開始接觸到對數後，就能體認到對數是為了化乘除為加減而產生的，並因而對人類計算造成深遠的影響，平心而論，這還真的是件高難度的任務。因此，筆者採取不同的策略，在教完對數函數的圖形之後，利用數學史來引入對數表，希冀由此讓學生體驗到前人製作對數表的堅持與辛苦，然後，思考為何要花數十年的時間製作它，它對當時的人們到底有什麼重要性？筆者設計了一系列的學習單，並已實際在任教的班級使用，學生的反應還不錯，給了筆者不少的信心，所以，才斗膽在此將它們與大家分享。

以下是各學習單的說明與實際使用的細節，囉哩囉嗦的，還委請讀者耐心一併參閱文後所附的學習單。特別的是，這一系列學習單需要使用到計算機，所以，筆者有事先要求學生攜帶至少能算 8 位數字以上的計算機，最好是能算到 10 位數字。[2]

第一張主要是法國數學家尼可拉斯‧許凱 (Nicholas Chuquet, 1455~1488) 的觀察。[3]許凱對後世的數學影響並不大，但他從 $2^1\sim 2^{20}$ 中觀察到兩數相乘與指數相加間有對應的關係，這乃是化乘為加的核心概念。此外，許凱所用的符號與今日的符號看起來雖然一樣，但意義卻大不相同。因此，筆者在學習單中翻譯一段許凱的文字讓學生閱讀，再藉由「問題與討論」將學生引向「化乘除為加減」此一關鍵（「問題與討論」第 3 則的用意）。「問題與討論」第 4 則中，設計 $\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[5]{2^3}$ 是引導學生去思考，若有一張底數為 2 且指數為分數的表，那麼求 $\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[5]{2^3}$ 就是小事一件了。設計 2×7 是由此引進所學過的對數

[1] 這是毛爾在《毛起來說 *e*》中的例子，見該書第 24 頁。
[2] 在手機普及的今日，這一點都不是問題，幾乎各家廠牌手機內建的計算機功能，都可以算到 10 位數字以上。
[3] 這一張學習單是以蘇俊鴻〈數學史融入教學—以對數為例〉中的第一張學習單為藍本

$\log_2 7$（並提醒學生 $\log_2 7$ 是無理數），[4]至此可知，光有指數為分數的表仍是不夠的。至於最後的 $\sqrt{123\times 345}$ ，則是要暗示學生別小看許凱的想法，將這小小的想法發揚光大，會產生對人類無以倫比的影響，只要繼續學下去，就可以體會箇中奧妙了！完成第一張學習單後，再將學習單 2-1 發給學生。

學習單 2-1 先是簡短的介紹對數與對數表的起源。筆者之所以會設計這一系列的學習單，起源自一個「錯誤」的問題：納皮爾 (John Napier, 1550~1617) 是怎麼算出 $\log 2$ 的？為什麼說這個問題是「錯誤」的呢？因為在翻查了數學史相關資料後，筆者才驚覺，雖然納皮爾被推認為對數的發明者，但他所發明的對數，並非今日的常用對數，簡單地用今日的符號來表示，N的納皮爾對數為 $\log_{1-10^{-7}} \dfrac{N}{10^7}$。[5]換句話說，納皮爾並沒有算 $\log 2$ ！今日常用對數的發明者其實另有其人，那就是布里格斯 (Henry Briggs, 1561~1630)，他在與納皮爾會面後，開始著手製作常用對數表，所以，第一個算出 $\log 2$ 近似值的人，就是布里格斯。查閱資料至此，筆者才知道找錯人了，因而轉向尋找布里格斯的相關資料，才發現原來布里格斯用來求 $\log 2$ 近似值的第一個方法，不僅教人驚豔，更可以讓高一學生動手做，重新經歷前人的偉大想法，因而才有這一系列的學習單。

布里格斯在其 1624 年發表的著作《對數算術》(*Arithmetica Logarithmica*) 中使用的第一個方法，是利用 2^n 的位數來求 $\log 2$ 的近似值。以今日的符號來說明，當 $n=10$ 時的求法：

$$2^{10}=1024=1.024\times 10^3 \Rightarrow 10\cdot\log 2=\log 1.024+3 \Rightarrow \log 2=\frac{1}{10}\cdot\log 1.024+0.3 \doteq 0.3\cdots\cdots$$

(∗)

「問題與討論」第 1 則就是讓學生拿起計算機，多試幾個不同的 n 值。在嘗試的過程中，會發現當 n 值從 11 開始，$\log 2$ 的近似值反而遠離 0.3010，到了 $n=20$ 又回到 0.3。同樣地，當 n 值從 21 開始，$\log 2$ 的近似值又遠離 0.3010，到了 $n=30$ 才再次回到 0.3。接下來，學生們手上的計算機都已經無法算得 2^{40}（13 位數），此時就可以將目光拉回到(∗)

---

[4] 在現行的課程綱要之下，整數論大體上已從高一課程中移除，故證明一個數是無理數並非學生的學習經驗。

[5] 在實際上課時，有學生提問為什麼納皮爾要用 $1-10^{-7}=0.9999999$ 為底？為什麼要將 10^7 的對數定為 0？這其實是另一個故事。納皮爾當初發展對數時，一個很重要的目的是要增進當時正弦表的精確度，而當時天文學家習慣以 10^7 作為圓的半徑，然後去求正弦值。而之所以要用 1 去減去 10^7 的倒數，則是納皮爾在製作他的對數表時，主要是利用等比數列，簡單地說，以 $1-10^{-7}$ 作為等比數列的公比，數列的變化會十分緩慢，那麼就可以作出比較「精細」的對數表。筆者大體上是照上面的意思去回答學生的，但捨去正弦表這個他們尚未學過的名稱。由於筆者在教完指數函數之後、介紹對數之前，有花一、二十分鐘向學生介紹 Dava Sobel 的《尋找地球刻度的人》（時報出版社），這本好書所介紹的故事主題與背景，與對數的發展背景（天文學上的計算需求）有相關大的關聯。因此，筆者將上述的解釋連結到《尋找地球刻度的人》後（註：當場就有學生拿出這本書），學生們就似懂非懂地讓筆者過關了。

式中，引導學生注意在這個方法中，2^n的值並不是必要的，我們只需要知道2^n是幾位數就已足夠，即：若2^n是M位數，則$\log 2$的近似值為$\frac{M-1}{n}$。剩下的，就是挑戰學生去求2^{100}、2^{1000}、2^{10000}是多少位數。利用學生思考的空檔，可進行「問題與討論」第 2 則，答案是納皮爾爵士與布里格斯教授。完成這則後，若學生沒有提出求位數的方法，就可以發下工作單 2-2。

工作單 2-2 就是布里格斯求$\log 2$近似值的過程。右表是布里格斯書上的表格，中間行代表的是2^n中的指數n，他四個一組隔開，理由是：2^2的平方是2^4，2^4的平方是2^8，$2^8\times 2^2=2^{10}$，再將2^{10}平方後就可得2^{20}，重複上述步驟，就可以得到2^{100}、2^{1000}、2^{10000}。表格的左行就是2^n的值，但是，布里格斯最多只寫出前 15 位，例如2^{80}是 25 位數，其前 15 位數字為 12089,25819,61463，然後，再利用這 15 位數字與2^{20}相乘，就得到乘積2^{100}的前 15 位數字約為 12676,50600,22823，再利用2^{100}的前 15 位數字自乘，得到2^{200}的前 15 位數字，……，最後，得到2^{10000}（原表格中將次方誤值為 1000）的前 15 位數字約為 19950,63116,87912。根據筆者實際的使用經驗，在場沒有一位學生的計算機能夠做 15 位數乘以 15 位數，因此，當筆者再次提醒學生布里格斯是花了十幾年的時間，用手算完成所有的計算，學生莫不露出又欽佩又不可思議的眼神。至於表格中的最右行，就是布里格斯利用其計算所得到2^n的位數，簡單的計算法則是：若A為m位數，B為n位數，則$A\times B$為$m+n$或$m+n-1$位數（「問題與討論」第 1 則）。更驚人的事實是，布里格斯算到 2 的 100 兆次方是 30,1029,9956,6399 位數，

1	0		
2	1		
4	2	1	
16	4	2	Tetras prima
256	8	3	
1024	10	4	
10,48576	20	7	
109,9511627776	40	13	Tetras secunda
12089,25819,61463	80	25	
12676,50600,22823	100	31	
16069,38044,25899	200	61	
25822,49878,08685	400	121	Tetras tertias
66680,14432,87940	800	241	
10715,08607,18618	1000	302	
11481,30695,27407	2000	603	
13182,04093,43051	4000	1205	Tetras quarta
17376,62031,93695	8000	2409	
19950,63116,87912	1000	3011	應是 10000
	Indices	Numerus notarum	

即$2^{10^{14}}=N\times 10^{30,1029,9956,6399-1}$，其中$1<N<10$，所以，

$10^{14}\cdot\log 2=(30,1029,9956,6399\text{-}1)+\log N \Rightarrow \log 2\doteq 0.30102999566398$。至此，筆者從許多學生的口中聽到了由衷的讚嘆聲！

布里格斯將求出$\log 2$近似值的過程，寫在其著作《對數算術》的第 5 章。在該章中，還提到他用相同的方法，求出$\log 7$的近似值為 0.84509804001426，但並沒有像$\log 2$那樣寫出過程。因此，筆者就利用「問題與討論」第 2 則（工作單 2-2），要學生藉助計算機，重新經驗布里格斯的偉大歷程（稍做改變後的歷程）。作法如下：將學生分成四組，第一組是手上計算機能算到 10 位數的，利用其計算機求7^n的前 5 位數字，並在記錄時將第 6 位數字無條件捨去。第二組類似於第一組，只是在記錄時將第 6 位數字無條件進位。第三組是手上計算機只能算到 8 或 9 位數的，利用其計算機求7^n的前 4 位數字，並在記錄時將第 5 位數字無條件捨去。第四組類似於第三組，只是在記錄時將第 5 位數字無條件

進位。[6]先帶領學生做幾個數字，確定學生都理解步驟後，就放手讓學生去算。在一陣「兵荒馬亂」之後，各組大都能完成此項任務，所得 $\log 7$ 的近似值依序為 0.8451、0.8452、0.8451、0.8452。得到這些數字之後，筆者指著第一、二組的數字問學生：「第一組的作法所得到的值會比真正的值大或小？同樣地，第二組的作法所得到的值會比真正的值大或小？」果不其然，有學生意會到分組的目的，也就是真正的值會介於兩者之間，所以，我們可依此確認，$\log 7$ 的小數點後三位必定是0.845！

至此，數學史材料已告一段落，筆者就在學生既滿足又佩服的氣氛下，將剩下的學習單發下。學習單 3-1、3-2、4-1、4-2 與 4-3 主要取材自龍騰出版社的《普通高級中學數學第一冊》課本中之例題，這與一般的上課方式並無不同，在此就略去不附上了。

學習單 5 是取自曹亮吉教授所著《阿草的葫蘆》中的例子，[7]就是利用對數，我們可以「輕易地」發現克卜勒 (Johannes Kepler, 1571~1630) 的「行星第三運動定律」。從學生不時點頭的模樣，相信他們看待對數的角度，也變得不一樣了！[8]

參考資料

毛爾 (Eli Maor)(2000).《毛起來說 *e*》(鄭惟厚譯)，台北：天下遠見出版社。

洪誌陽 (1999).〈對數隨筆〉,《HPM 通訊》2(6): 10-12。

蘇俊鴻 (2001).〈試評析 John Fauvel “Revisiting the History of Logarithm”一文〉,《HPM 通訊》4(6): 8-11。

蘇俊鴻 (2003).〈數學史融入教學〉,《HPM 通訊》6(2, 3): 16-20。

Briggs, Henry (1624). *Arithmetica Logarithmica* (translated by Ian Bruce). http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html

Chabert, Jean-Luc (Ed.) (1999). *A History of Algorithms: From th Pebble to the Microchip*. New York: Springer.

Fauvel, John and Gray, Jeremy (Ed.) (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. London: Macmillan Education Ltd.

附錄：學習單

[6] 事實上只需要第一組及第二組，但鑑於有學生的計算機功能無法求出 10 位數，所以才增加第三、四組。

[7] 書中的數據有誤，再加上現在太陽系只有 8 顆行星，故筆者利用網路搜尋相關的數據，略加以修改。不夠專業之處，還請包涵。

[8] 教材進行至此，課本中有關對數表查表及反查的例題均已教授，但另一個重要的內容「首數與尾數」則未提及，這部分則回歸至課本（或講義）中進行。附帶一提的，最早提出首數與尾數的，正是布里格斯！

學習單 1　尼可拉斯．許凱的觀察

在西元前 1800 年左右，巴比倫人在一塊泥板上寫下一些數字，用今日的印度—阿拉伯數碼表示，即：

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

到了 1484 年，文藝復興時期法國數學家尼可拉斯．許凱 (Nicholas Chuquet, 1445~1488) 寫出下列數字：

Numbers	Denomination	Numbers	Denomination	Numbers	Denomination
1	0	128	7	16384	14
2	1	256	8	32768	15
4	2	512	9	65536	16
8	3	1024	10	131072	17
16	4	2048	11	262144	18
32	5	4096	12	524288	19
64	6	8192	13	1048576	20

並進一步研究 Numbers 與 Denomination 之間的關係，寫下他的觀察：

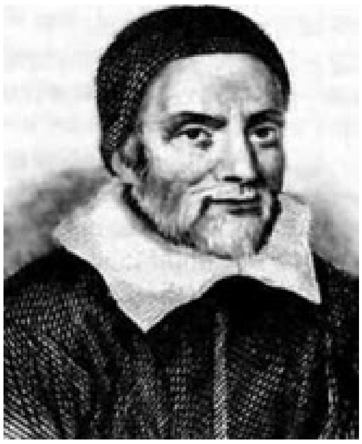
> 無論誰將 2^1 乘以 2^1，都會得到第二個數字 4，因此，這個乘積等於 4^2。這是因為將 2 乘以 2 會得到 4，並將 denominations 加起來，即 1 加 1 等於 2。由此可知，任何人將第一項乘以第一項就會得到第二項。同樣地，無論誰將 2^1 乘以 4^2，都會得到 8^3，因為 2 乘以 4 且 1 加上 2 就會得到 8^3。所以，任何人將第一項乘以第二項，就會得到第三項。同樣地，無論誰將 4^2 乘以 4^2，就會得到第四個數字 16，由此可知，任何人將第二項乘以第二項，就會得到第四項。……無論誰將第七個比例數 128 乘以第九個比例數 512，就可以得到第 16 個數 65536。

問題與討論

1. 許凱的 4^2 與 8^3 的意義為何？有何優缺點？
2. 試藉由上表推算出 512^9 乘以 2048^{11} 之值，以及 524288^{19} 乘以 8192^{13} 之值。
3. 請試著說明許凱觀察到 Numbers 與 Denomination 之間有什麼運算上的關係。
4. 若要用許凱的方法求今日符號的 $\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[5]{2^3}$ 、 2×7 、 $\sqrt{123\times 345}\ (\doteq 206)$，該怎麼辦？

學習單 2-1　$\log 2 =$ ？

約翰‧納皮爾 (John Napier, 1550~1617，左下圖) 是最早提出「對數」的人之一，但他定義對數的方式與今日並不相同，比如說納皮爾並不是以 10 為底，而是以 $1-10^{-7}=0.9999999$ 為底（若用今日的符號表示，N 的納皮爾對數為 $\log_{1-10^{-7}}\dfrac{N}{10^{7}}$），且是把 10^{7} 的對數定為 0。納皮爾花了 20 年的時間製作了對數表，於 1614 年以《對數的奇妙準則》為名發表，並隨即得到科學界的熱烈歡迎與讚賞！（這麼奇怪的東西竟然會大受歡迎！？）



亨利‧布里格斯 (Henry Briggs, 1561~1630，右上圖) 知道納皮爾的對數表時，他是倫敦格萊斯罕學院 (Gresham College) 的幾何學教授，為了表示他的敬意，布里格斯決定親自前往蘇格蘭拜訪納皮爾，並提出他的修正建議：把 1 的對數定為 0，以及以 10 為底。

兩人會面之後，納皮爾接授了布里格斯的建議，但那時候納皮爾已經老了，沒辦法再重做一套對數表，所以，製作以 10 為底的對數表就成為布里格斯接下來的任務。1624 年時，布里格斯發表其著作《對數算術》，之中列出了 1 到 20000，以及 90000 到 100000 之間所有整數以 10 為底的對數，且準確到小數點後第 14 位。至於 20001 到 89999 的部分，則由荷蘭人弗萊克 (Adriaan Vlacq, 1600~1667) 完成，並放入 1628 年出版的第二版《對數算術》之中。布里格斯與弗萊克的對數表一直沿用了 300 多年，直到 20 世紀！

既然要製作以 10 為底的對數表，那第一個數當然就是 $\log 2$ 了！布里格斯提在《對數算術》中提出兩種方法來求 $\log 2$，其中一種是利用 2^{n} 的位數來求 $\log 2$ 的近似值。例如當 $n=10$ 時，

$$2^{10}=1024=1.024\times 10^{3} \Rightarrow 10\cdot\log 2=\log 1.024+3 \Rightarrow \log 2=\frac{1}{10}\cdot\log 1.024+0.3\doteq 0.3$$。

問題與討論

1. 拿起你的計算機，利用布里格斯的方法，多試幾個 n 看看。
2. 從流傳下來的兩人畫像，你覺得哪個人的社會地位較高？為什麼？

學習單 2-2　log 2 = ?

布里格斯利用計算再加上巧思，求出2^{10} 、2^{100} 、2^{1000} 、2^{10000}的位數，如下表。

1	0		
2	1		
4	2	1	
16	4	2	Tetras prima
256	8	3	
1024	10	4	
10,48576	20	7	
109,9511627776	40	13	Tetras secunda
12089,25819,61463	80	25	
12676,50600,22823	100	31	
16069,38044,25899	200	61	
25822,49878,08685	400	121	Tetras tertias
66680,14432,87940	800	241	
10715,08607,18618	1000	302	
11481,30695,27407	2000	603	
13182,04093,43051	4000	1205	Tetras quarta
17376,62031,93695	8000	2409	
19950,63116,87912	1000	3011	應是 10000
	Indices	Numerus notarum	

事實上他算出 2 的 100 兆次方是 30,1029,9956,6399 位數，即

$2^{10^{14}} = N \times 10^{30,1029,9956,6399\text{-}1}$ ，其中$1 < N < 10$ ，所以，

$10^{14} \cdot \log 2 = (30,1029,9956,6399\text{-}1) + \log N \;\Rightarrow\; \log 2 \doteq 0.30102999566398$ 。

問題與討論

1. 試用科學記號說明：若 A 為 m 位數，B 為 n 位數，則 $A\times B$ 為 $m+n$ 或 $m+n-1$ 位數。
2. 完成下表，並求出$\log 7$ 的近似值為__________ 。

前 5 位數字	指數	位數	前 5 位數字	指數	位數
49	2	2		200	
2401	4	4		400	
	8	7		800	
	10	9		1000	
	20			2000	
	40			4000	
	80			8000	
	100			10000	

參考答案：

第 6 位無條件捨去： log 7 ≐ 0.8451

前 5 位數字	指數	位數	前 5 位數字	指數	位數
49	2	2	10456…	200	170
2401	4	4	10932…	400	339
57648…	8	7	11950…	800	677
28247…	10	9	12494…	1000	846
79789…	20	17	15610…	2000	1691
63662…	40	34	24367…	4000	3381
40528…	80	68	59375…	8000	6761
32336…	100	85	92684…	10000	8451

第 6 位無條件進位： log 7 ≐ 0.8452

前 5 位數字	指數	位數	前 5 位數字	指數	位數
49	2	2	10475…	200	170
2401	4	4	10973…	400	339
57649…	8	7	12401…	800	677
28249…	10	9	12991…	1000	846
79801…	20	17	16876…	2000	1691
63682…	40	34	28480…	4000	3381
40554…	80	68	81112…	8000	6761
32365…	100	85	13689…	10000	8452

第 5 位無條件捨去： log 7 ≐ 0.8451

前 4 位數字	指數	位數	前 4 位數字	指數	位數
49	2	2	1038…	200	170
2401	4	4	1077…	400	339
5764…	8	7	1159…	800	677
2824…	10	9	1203…	1000	846
7974…	20	17	1447…	2000	1691
6358…	40	34	2093…	4000	3381
4042…	80	68	4380…	8000	6761
3223…	100	85	6337…	10000	8451

第 5 位無條件進位： log 7 ≐ 0.8452

前 4 位數字	指數	位數	前 4 位數字	指數	位數
49	2	2	1050…	200	170
2401	4	4	1103…	400	339
5765…	8	7	1217…	800	677
2825…	10	9	1278…	1000	846
7981…	20	17	1634…	2000	1691
6370…	40	34	2670…	4000	3381
4058…	80	68	7129…	8000	6761
3239…	100	85	1169…	10000	8452

學習單 5　克卜勒的行星第三運動定律

若我們以地球上的一年為時間的 1 單位，地球公轉軌道的半軸長為距離的 1 單位，則太陽系的八大行星之週期與軌道半軸長之資料如下表：

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
週期 T	0.24	0.615	1	1.88	11.86	29.46	84.01	164.8
半軸長 a	0.39	0.72	1	1.5	5.2	9.5	19.2	30.1

克卜勒的行星第三運動定律告訴我們，T^2 與 a^3 成正比，即 $\dfrac{T^2}{a^3}$ 是個定值。由上表的資料想要看出 $\dfrac{T^2}{a^3}$ 是個定值，並不容易，實際計算的結果如下表：

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
週期 T^2	0.0576	0.378225	1	3.5344	140.6596	867.8916	7057.6801	27159.04
半軸長 a^3	0.059319	0.373248	1	3.375	140.608	857.375	7077.888	27270.901
$\dfrac{T^2}{a^3}$	0.971	1.013	1.000	1.047	1.000	1.012	0.997	0.996

假設今天我們並不知道克卜勒的行星第三運動定律，那要如何找出 T 與 a 的關係呢？不妨將 T 與 a 都取常用對數，得下表

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
週期 $\log T$	–0.62	–0.21	0	0.27	1.07	1.47	1.92	2.22
$\log a$	–0.41	–0.14	0	0.18	0.72	0.98	1.28	1.48
$\dfrac{\log T}{\log a}$	1.51	1.5		1.5	1.49	1.5	1.5	1.5

哇！很容易就可以看出 $\dfrac{\log T}{\log a}=1.5=\dfrac{3}{2} \Rightarrow 2\log T-3\log a=0 \Rightarrow \log\dfrac{T^2}{a^3}=0 \Rightarrow \dfrac{T^2}{a^3}=1$。有了對數還真是件不錯的事！

「數學史融入教學─以對數表為例」課後問卷分析

林倉億
國立台南一中

筆者在高一第一冊「3-5 指數與對數的應用」課程開始之初（2010 年 12 月下旬），以布里格斯 (Henry Briggs, 1561~1630)求 $\log 2$ 的方法為主體，設計了一份學習單來引入對數表，並實際在課堂上使用。學習單的內容與使用情形，亦寫成〈數學史融入教學─以對數表為例〉一文，刊載於 2010 年 12 月號的《HPM 通訊》上。而在「3-5 指數與對數的應用」課程結束之後（2011 年 1 月上旬），製作了一份課後問卷（參見附錄），請學生填寫，作為自己教學後的一種檢視。

實施方式是利用某一節課將問卷發下，給一節課的時間寫（不強迫填寫），學生可以翻閱學習單的內容，亦未禁止彼此討論。填寫時間最多就是一節課，先完成者就自習。總共發出 40 份問卷，收回 37 份，其中又有 2 份只作答前兩題。問卷採不記名方式，收回後，筆者再將每份問卷編號（與學生的座號無關）。

從學生填寫的回答中，發現有設計教材之初的預期效果，給予筆者繼續進行類似課程的信心與動力，但也有出乎意料之外的影響，提醒在設計類似教材時，還要多加留意的地方。藉此文與大家分享筆者所得到的收穫。

第一題：在這份學習單中，你印象最深刻的是哪些部分？____________（至多選兩個）
(1) 巴比倫人的泥板 (2) 許凱的方法 (3) 納皮爾及他的對數 (4) 布里格斯的著作《對數算術》與對數表 (5) 布里格斯求 $\log 2$ 的方法 (6) 對數表的使用（學習單中的例題） (7) 內插法 (8) 對數與克卜勒的行星第三運動定律

此題的選項均為學習單中的內容，目的是要了解學生覺得學習單的哪些部分較為特別。統計結果如下表：

選項	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
人數	3	6	15	5	21	6	7	5

如筆者先前所預期的，這份學習單的主角「布里格斯求 $\log 2$ 的方法」獲得近三分之二學生的青睞。不過，「(3) 納皮爾及他的對數」竟獲得近一半同學的支持，筆者倒是感到十分不解，因為它在整份學習單中所佔的比重並不大，不過，在看完學生下一題的回答後，終於豁然開朗。

第二題：你怎麼看待或評價布里格斯求$\log 2$的方法，及他製作的對數表？

學生的回答大抵上可以分成幾類。第一類是佩服布里格斯的巧思，想到利用2^n的位數來估算$\log 2$。經筆者統計，共有 21 位學生表達了對布里格斯方法的讚許、佩服。例如：

編號 4:「真的滿厲害的，要不是有在課業上學習到求$\log 2$的方法，我完全不知到還可以這麼做。」

編號 9：「『天啊！好聰明的人！』在了解這方法後，心中馬上浮現這句話。在沒有各種儀器輔助的幫助下，竟然可以計算出如此複雜的東西，且那不是隨便就能想出的方法，更是令人稱奇啊！」

編號 15：「過程複雜，但技巧令人耳目一新。」

編號 24：「求法相當神奇，完全無法想到。」

第二類則是欽佩布里格斯製作對數表的毅力。例如：

編號 8：「他好強，沒算到「起瘋」，真是佩服佩服。」

編號 16：「布里格斯花了很多年來運算，在那個沒有計算機的時代，竟然能算到那麼精準，由此可見他的毅力真是十分地驚人！」

編號 22：「他製作對數表時，沒有發瘋，真是厲害。」

編號 32：「布里格斯在當時連計算機都沒有的狀況下，利用紙、筆及幾十年的時間，作出了精準的對數表，可見他對數學有多麼大的熱情，堅持幾十年的這股意志也令人甘拜下風」

編號 15：「原來求出對數表是如此辛苦，連用計算機的我們都算（按）的哇哇叫了，更何況是親自計算的呢！」

有趣的是，整份問卷中共有四位學生用了「瘋」字來形容布里格斯製作對數表，很坦率地表達出他們對布里格斯的毅力是感到不可思議的佩服。

第三類與納皮爾有關。例如

編號 17：「把它改成以 10 為底的對數，既簡單又好看，比之前的 log 以$1-10^{-7}$為底的對數表好用多了。」

編號 18：「把原先納皮爾以$1-10^{-7}$為底的對數改成以 10 為底，造福後來的我們，要不是布里格斯把納皮爾那鳥數字改掉，我們現在學第三章就會是悲劇了！」

編號 19：「幸好他改變了納皮爾先生以$1-10^{-7}$為底的 log，才造福了後世的學生（謝謝！！）」

編號 33：「我覺得他把對數表換成以 10 為底，真是個明智の選擇，要不然我們現在算對數就……很 XX 了……（$\log_{1-10^{-7}} \dfrac{N}{10^7}$這什麼鬼東西啊！？XD））」

雖然有些學生的用詞略嫌不文雅，但卻很直接地表達出納皮爾的對數所帶來的震撼，無怪乎在問卷的第一題中，會有那麼多人選擇「(3) 納皮爾及他的對數」。

第三題：完成這份學習單後，有沒有影響你對「對數」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

這一題的回答內容是筆者最為關心的，若能有正面的回饋，不僅是設計教材時的辛勞有了回報，也是繼續類似課程的最大動力。皇天不負苦心人，問卷上呈現的，大多是正向的意見。其中一種是覺得學習對數變得比較有趣，例如

編號 8：「在學習上多了一些趣味，比較不會讓人覺得死氣沉沉。」

編號 9：「本來以為對數是背的東西，沒想到有這麼有趣的方法！！」

編號 12：「覺得這種課外活動有趣且有意義，不只知道 log 怎麼用，也能了解它的發展史，這是從小到大未曾體驗過的經驗。」

編號 33：「在我覺得這份學習單讓我了解到對數の發展史，我覺得收穫滿大的。」

另一種則是了解到對數表的製作的目的、辛苦，以及對數的有用。例如

編號 3：「原本覺得對數只是來整學生，現在發現對數是很有用的。」

編號 6：「我終於了解到對數表是一個大工程，有了對數表，各種天文、航海測量變得更便利，要好好學習前人的方法。」

編號 11：「一開始我認為對數很抽象，但在完成此學習單後漸漸的了解其實對數就是工具。」

編號 13：「有了 log ，除了多了一堆運算律和煩人的題目外，其實它蠻實用的。」

編號 14：「以前都把它當成一個沒有實用性的東西，後來才知道它這麼好用。」

編號 30：「在知悉對數的起源後，不禁對數學家前輩多了許多敬意，為了使如此方便的運算方法發揚光大，不惜花費青春歲月製作『對數表』。」

不過，憑良心說，這一類回答並不能全部歸功於學習單，因為問卷是在整個「3-5 指數與對數的應用」課程結束後填寫的，學生們在另外的教材上做到了許多對數實際應用的題目（任何一本課本、講義都有許多這種問題），這些應用問題也會增強他們認為對數是有用的認知。

還有少數幾個學生認為這份學習單對他們的學習、理解對數有幫助。

編號 2：「對數比較容易理解（跟前幾章節相比）。」

編號 10：「使我更了解其中的內涵，也幫助我使用對數時更容易上手。」

編號 17：「看完了學習單後，覺得對數是比較好玩的數學，沒有什麼死背的公式，要套哪些公

式，就是只要算的時候小心他的陷阱而已，再來就是算的時候要小心而已。」

編號 19：「讓我更了解布里格斯等的想法，並對『對數』有了更深層的認識。」

編號 27：「有，更了解對數。」

老實說，類似的回答對任何一位教師都是一種莫大的鼓勵，筆者也不例外。不過，筆者所受過的數學教育訓練就像是警笛一樣，一直在腦海中響起，不斷地提醒自己：「僅就這些回答就認定這份學習單真的增進學生對對數的理解，這樣也未免太自我感覺良好了。應該要多做一些求證，比如說訪談等，才能知道學生的回答是不是『真的』，又可以進一步知道學習單是『如何』增進理解的。」想到這裡，一種莫名的疲憊感油然而生，轉而不禁佩服數學教育學家的辛苦、偉大。至於筆者這樣小小的高中教師，偶爾的自我陶醉是很需要的，可以維持教書的熱情。

最後，當然也有一些負面，或是非正面的回答，若將這些都視而不見的話，那才真的是「自我感覺良好」。

編號 23：「log－對數，一個看似簡單，但是影響廣泛的東西，有了它，天文學上很多的數字都會變得比較簡單，加速了天文學的進程，只是，我討厭它，對數，好多好難，好討厭。」

編號 24：「令我更加了解對數的功用，稍微改變了原本嫌它麻煩的心情。」

編號 28：「原來要成為現在的對數是那麼艱難的事，而它的影響卻如此深遠，雖然不喜歡它們，但還是克制自己，少罵幾句好了。」

編號 20、31：「沒有。」

第四題：完成這份學習單後，有沒有影響你對「數學」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

將數學史融入教學，學生除了可以學到數學外，更可以多了歷史與人文的關懷，改變對數學的看法。許多研究已經驗證上述的論點，問卷中的這一題並不是要做學術上的檢驗，僅是當作一種回饋資料的收集，自己參考而已。

編號 1：「數學融入有趣的歷史故事可讓上課輕鬆不少。」

編號 5：「現在所學習的"數學"是由過去的學者建立的理論所構成，光只是學習就感覺非常困難，何況是從無到有的過程。若是我們也能有一點點的貢獻給後人，或許就是促成未來科技發展的基礎。」

編號 7：「有，對於數學的東西要了解它可以計算什麼題型，甚至是如何用於生活上的，讓數學不只是應付考試用的。多數數學觀念的產生，如同發明物，和人類需求有關，而了解它的歷史就可以把數學生活化。」

編號 9：「有！我一直沒有利用數學的小故事 or 數學家創造公式……各種不同的有趣方法來學習數學，之前"背"或"了解"，長期下來會對許多有興趣的科目感到無聊，而用這種方法不但會更專心的去聽課，且會對數學更加的喜愛！」

編號 10：「我原本認為數學的各種概念是容易建構的，原來每一種在現代認為理所當然的概念都需透過數學家努力的研究才能統整出來，甚至因此而貢獻一生。」

編號 11：「數學不再只是數學，而是融合了生活周遭事物。」

編號 12：「以前算數學都只是背一些運算公式、理論，也不知道它怎麼來的，這份學習單讓我體認到數學的奧妙！」

編號 15：「數學以這種方式呈現，的確能吸引我們的注意，也較能投入，讓我們了解數學的發展、應用和較有趣的一面。」

編號 23：「數學，不只是算，還有它的歷史一樣是很動人的，或許，想得到更多靈感，就該翻開數學史，看看古人，怎麼算的，想法又是什麼？」

編號 25：「數學不再只是計算，它融入了一些故事，讓無味的數學變得十分有趣。」

編號 32：「透過這份學習單，更瞭解古人研究數學有多麼艱辛，很慶幸自己誕生在這個時代，可以將過去數學家的智慧學起來，真的很幸運。」

其中編號 17 最吸引筆者的目光：「有吧！他讓我比較喜歡去算數學了，尤其是 log 的部分，他影響了我對數學的看法，以前常逃避數學，現在看到數學都想要去了解他。」

同樣地，仍是有另類的回答。

編號 6：「有，原來數學知識深不可測，學得越多，越覺得恐怖。」

編號 20、31：「沒有。」

編號 28：「原來數學家那麼難當，花了自己的一生才創出公式，然後就死去，也沒什麼享受到人生和成就，只供後人景仰，真不知是幸還是不幸。」

編號 33：「唉！那時的人還真命苦，我整天算數學腦漿都乾了，他們竟然一生都在算==，而且還是手算，真是佩服他們的毅力啊！」

第五題：你希望以後能再有類似的學習單嗎？請用數字 1~5 表示，數字越大代表越希望有再次的學習單。_________（限用正整數 1、2、3、4、5）

就有回答此題的 35 份問卷作統計（如右表），平均是 4.1，代表願意填寫問卷的學生，基本上都是期待類似的教學活動，其中填「5」的學生有 15 位，低於 3

數字	1	2	3	4	5
人數	0	1	11	8	15

的只有 1 位。無論學生們期待的理由為何，對筆者來說，這就是設計下一次類似教學活動的最大信心來源。

以上就是問卷中五個問題的分析。整體說來，學生的反應屬於正向的，與筆者當初設計的目的「希冀由此讓學生體驗到前人製作對數表的堅持與辛苦，然後，思考為何要花數十年的時間製作它，它對當時的人們到底有什麼重要性？」算是相當吻合。不過，仍有一些筆者未考慮到的部分，比如說，納皮爾的對數似乎成了「負面的」，這倒是抹煞了他的貢獻，以後有機會應該替他平反平反。另外，學生可能對數學或對數產生的負向想法，下一次使用類似教材的時候，也要多所留意。

最後，筆者在實施這份教材的時候，邀請一位實習教師進教學現場觀察，並在事後提出一些意見。以下就是這位陳俊龍老師事後所寫的心得感想：

> 聽了老師的兩節課後，覺得這份學習單的優點是容易引起學生的學習動機，同時也給了學生一個對數表是怎麼產生的歷史背景，同時每段內容後面都有問題與討論，可以加深學生的學習印象，而且老師上課講解過程都蠻順暢清楚的，整體來說，我覺得學生可以學到東西。至於缺點，真的要雞蛋裡挑骨頭的話，我認為可以讓學生多點練習，像是除了算 log7 以外，也可以讓他們在課堂上算 log3 等等之類的，或是那時上課老師有給他們分組算，那些組之後也可以交換練習，我想這樣他們一定會更熟悉這部分的內容。

缺點的部分（筆者要求一定要寫）陳老師寫得比較含蓄，其實在上完這份教材後，我們有一起討論，陳老師觀察到有部分學生雖然對教材還滿感興趣的，不過就只是自己看教材，並沒有跟著筆者的節奏，也沒有注意聽筆者問了哪些問題、說了什麼。特別是到了後來用計算機求 log 7 的近似值，有少數學生並未參與，而是發呆或是在做其他的數學練習題。陳老師提出的這些現場觀察，的確是筆者當時所疏忽的，非常感謝他的提醒。

以上的分析或檢討，不僅是作為筆者下次教學的努力方向，也可以讓有興趣想要利用數學史來教學的老師作為參考。

附　錄

學習單之課後問卷

一、在這份學習單中，你印象最深刻的是哪些部分？____________（至多選兩個）

(1) 巴比倫人的泥板　(2) 許凱的方法　(3) 納皮爾及他的對數　(4) 布里格斯的著作《對數算術》與對數表　(5) 布里格斯求 $\log 2$ 的方法　(6) 對數表的使用（學習單中的例題）　(7) 內插法　(8) 對數與克卜勒的行星第三運動定律

二、你怎麼看待或評價布里格斯求 $\log 2$ 的方法，及他製作的對數表？

____

____

____

____

____

三、完成這份學習單後，有沒有影響你對「對數」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

____

____

____

____

____

四、完成這份學習單後，有沒有影響你對「數學」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

____

____

____

____

五、你希望以後能再有類似的學習單嗎？請用數字 1~5 表示，數字越大代表越希望有再次的學習單。_________（限用正整數 1、2、3、4、5）