

HPM 通訊

第十二卷 第七、八月合刊 目錄 (2009年8月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ 《莉拉沃蒂》與《九章算術》
- ▣ 碩士論文摘要：《杜知耕及其《幾何論約》之研究》摘要
- ▣ 參加「2009年全國學校經營創新獎——課程教學領導組」競賽感言
- ▣ Information：來函照登

《莉拉沃蒂》與《九章算術》

黃俊瑋

台師大數學系博士班研究生

一、成書與介紹

《九章算術》被譽為中國古算經之首，自其成書後至《孫子算經》誕生的這四至五百年之間，除了依附於九章算術的劉徽注之外，並沒有其它的新數學著作，雖其成書時間目前仍無定論，然在此部成書於漢朝的算書之後，中國的數學著述與研究即以兩種不同的方式展開，一是為《九章算術》作注，二是以《九章算術》為楷模與參考，來編寫新的數學著作。可見其在中國算學史上所帶來造的深遠影響力與重要地位。

再者，一般廣義地來說《九章算術》的傳本包括了其本文、魏劉徽注、唐李淳風等注釋(郭書春，1995)。研究九章算術者，必不可忽略這些注釋內容之於本書的重要性。劉徽以自己的數學知識、想法為主，並集過去與當代人研究之大成，在九章算術的基礎下推動了中國數學的發展。本書內容共分為九章，其主要特色為術文統率應用問題的形式，並密切與實際問題相關聯，從劉徽對篇名的注解文字中，更說明了其以應用為目的特色，書中內容也多以日常之實用問題以及解決這些問題所需之抽象術文為主，可說是以計算、求解為中心。自1774年戴震從《永樂大典》中輯錄出《九章算術》並加校勘200年以來，許多學者都曾投身《九章算術》的研究，關於《九章算術》之研究成果與相關書籍可謂豐碩，並較為一般人熟知，故不多加贅述。

另一方面，《莉拉沃蒂》則是古代印度最典型且最有影響力的算術著作，同時也取代了大多先前使用的數學教材，在印度被作為教科書用了好幾世紀，直至今日一些梵語學校仍在使用的。其成書年代為西元第十二世紀，書名本意「美麗」，傳說是其為自己女兒或妻子所作(另有一說，是為了安慰自己女兒因占卜預言嫁不出去而寫)。而作者婆什迦羅更是勇於突破傳統觀念，透過親切的用語與梵文韻律詩的方式，增加本書的趣味性與通俗性，希望此書能使算術的學習，變成一種愉悅而有趣的活動。讓一般人眼中的數學書，不再只是抽象艱深難懂的法則公式與繁雜的冗長計算。

而中古世紀印度數學由二個主要部份組成，包含了運算法則的數學內容，主要處理模式化的數學問題求解，另外也包含了代數學，使用文字表示未知數的代數方程問題等。至於《莉拉沃蒂》一書的內容屬於運算法則的數學，全書由一系列運算法則以及例題構成，不止涉及了算術，同時也包含幾何、三角法和代數學的相關知識。而《莉拉沃蒂》的手抄本在印度使用了好幾個世紀，完整的《莉拉沃蒂》傳到其它國家大約在 16 世紀，其中手抄本共有 600 種之多，注釋也有 30 餘種。成書後的八百年間在印度被當作教材使用。主因於其中優秀的問題和優美工整的梵語詩句，也傳達了許多宗教戰爭和史詩等方面的信息。梵語寫的注釋開始於 15 世紀，前後共有 35 種。正式出版版本以 1832 年在 Calcutta 出版的為開端，前後約有 17 種。直到 19 世紀後，多種印刷版本也相繼出現。(徐澤林, 2008)

雖然《九章算術》與《莉拉沃蒂》的成書年代先後差距了十個世紀以上，但由上述簡短的介紹，我們可以了解此二書在中國與印度的數學發展中，各有其重要性與影響力，因此，不管是對這兩書本身的內容與體例的比較，或者探討兩書當中所存在的相似、相同問題與數學法則，或者比較後世數學家們注釋的內容與方式進行，都值得我們進一步研究的問題。除更能幫助我們了解來自兩個大國不同文化、地域背景之下所產生的不同數學知識活動，或許也能讓我們從比較之中進一步了解《莉拉沃蒂》的成書之後的年代，中國與其它臨近國家文化交流頻頻的過程中，重要的數學知識會通與對彼此的影響。

二、分章安排與基本架構

在篇章的安排上，《九章算術》分成方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股九章，全書以問題集的形式呈現，共含有 246 個應用問題，其中包括了人們日常生活、生產的實際問題的各個面向。在內容的編排上，各章之篇幅大致相仿，並且大致上是採取先給出一個或一些例題，再於問題後的術文中，給出解決該問題的方法以及解題過程，而多數的術文皆為普遍性的法則，已具有高度的抽象性，因此，讀者或學習者透過這些「術」可以解決書中若干同類的問題。而又一部份的問題，是先給出抽象的術文，而後列出相關問題，再於題目後給出具體的演算術文，諸如粟米章當中先給出今有術，而後羅列出各式穀物換算問題，又如方程章之方程術、損益術與正負術等。最後，書中亦有部份問題的術文內容，並未離開特定對象或數字，直接以題設的具體數字來代替抽象的術文法則。

至於《莉拉沃蒂》原著並不分章節，所有法則與例題等皆羅列一起。後世各種譯本為方便起見而進一步劃分章節，但並不統一。本篇文章所參考之書為徐澤林所譯之版本，其所據底本(林隆夫之日譯本)共分成 8 章，共有 272 個詩節，而各章之篇幅差異甚大，除了第一章的規約、第二章的數位之確定，以及第 8 章的結語外，將主要的數學法則與習題皆置於第 3 章至第 7 章的「基本運算」、「各種算法」、「實用運算」、Kuttaka 與「數字連鎖」之中，其中的第 5 章更是包含了超過一半的 152 個詩節，為本書主要精華之一。

而就這 272 個詩節我們又可以分成三大類：第一類是特殊詩節，第二類是關於各種【算法或法則】的詩節，而第三類則是前述各種算法與法則的相關【例題】

。其中，特殊詩節包含了第 1 詩節與第 9 詩節的【歸命偈】，以及關於重量、長度、面積、容量等單位換算的第 2 至第 8 詩節，介紹印度十進制位值制記數法的第 10 詩節，還有第

五章最後說明三率法重要性的第 241 詩節，以及爲了稱讚第 6 章的第 271 詩節，最後是作爲整本書結語的第 272 章。再來的第二類詩節，則是關於各種算法與法則的介紹，是本書的主要重點，依數學內容又安排在 5 大章，共 21 小類，這些詩節的內容則如同九章中的術文，給出了解決數學問題的一般性方法。至於最後一類的詩節，則是緊接在各算法、法則之後，所提出的相關「例題」，在這些詩節中，作者以活潑而親切的敘述方式，給出了對應於如何應用該算法與法則的問題。此外，在各個例題之後，皆有作者本身的附注，除了給出了問題的答案，並根據相關的法則列出該例題之算法過程。

另外，在處理計算面積、體積或者易物問題時，往往需涉及不同單位之間的換算問題，而《九章算術》與《莉拉沃蒂》在這方面的處理與編排則大不相同。《莉拉沃蒂》利用了第一章的篇幅，整理出包含重量、長度、面積、容量等，所有往後所會用到的各種單位換算規約。然而九章除了在第二章粟米章的開頭，給出了「粟米之法」，即該章中所需使用的各種穀物之間的換算比率之外，其它有關長度、面積等相關的單位換算標準，則是視題目需要時，才於題目之後的「術文」之中加以介紹。也代表著九章算術之度量衡單位及其換算，是散落於各章篇問題之中。

三、書寫體例與特色

《莉拉沃蒂》在體例上的特色，是先在詩節中提出一般的「算法」或「法則」，緊接著算法之後的詩節，就是關於上面算法與法則的相關「例題」，而例題之中只給出題目的敘述，並不給予答案，而在例題之後，緊接著即爲作者婆什迦邏的【附注】，這些附注之中除了給出該例題的答案，並且將例題中的數據完整摘錄出來，根據上面詩節中所提到的運算法則，敘述了該例題的算法或解法過程。這與《九章算術》在問題後即馬上給出答案的編排方式有所不同。而此日譯本中，極少部份關於【例題】的詩節之後並未給出附注，如第 62 詩節、第 71 詩節與第 115 詩節。然而這些少數未給出附注的例題中，我們又可以發現似乎作者將已將附注與例題的答案和作法，放置於該例題體幹之後的敘述中，所以推測可能是當初翻譯者解讀與分析的過程中，誤將該例題的附注置入例題中。

而《九章算術》的編排方式則是先提出問題，然後隨即給出問題的答案，之後才是術文內容。除了介紹所用之算法與法則公式之外，部份術文中也說明了運算的過程，因此，九章算術基本上是採以「題目—答案—術文」的架構，而部份重複或類似的問題，則僅給出答案而不再給出術文。至於《莉拉沃蒂》一書，是以「法則—例題—附注(自注)」的架構來書寫，頗類似現今中學常見的數學講義形式，先給出該章節重要的概念、性質、法則、解法或公式，然後緊接著給出相關或相對應的例題，然後給出其答案與解法。如果我們不看附注的部份，則如同一本空白的數學教學講義，加上附注的答案與解法時，則是雷同於教學講義的詳解。因此，從古今數學教材的對比當中，的確也能佐證《莉拉沃蒂》在其出版後的 800 年間，作爲印度教材教書的說法。

再者，《九章算術》的各章之中，倘若主要問題後面已經給出相關術文，介紹了新術或者說明了算法過程，則其它部份相似或同類形問題，則可能只會給出答案而不再給出相關術文說明，或者術文中僅給出其所引用的術名或僅是提出簡略而提要式的說明，這點在前四章之中尤其明顯。因此，具有一術多題的特色。而《莉拉沃蒂》則是盡可能地採取一

術(法則)一例題的方式,先提出法則後,再搭配一個相對應的例題,並於每個例題之後接著給予其附注。同時大部份的法則只會給出一個相關的例題,因此,如同九章算術之粟米章或方程章那般,在一個法則(術)之後給出許多相似問題的情況在《莉拉沃蒂》當中並不多見。

另外,《九章算術》的題目皆是以「今有」兩字引出問題的內容與相關的情境,緊接著在「答曰」中先給出問題的答案,然後在「術曰」之中,給出解題所需之相關術文內容,以及說明解題的重要步驟與過程。然而《莉拉沃蒂》例題的題目表示方式,則是具有豐富的多樣性,有些例題之中,先直接介紹問題或者直接敘述情境之後,再搭配親切的稱呼(如:小女孩、商人、朋友、數學家)向讀者提出問題,有些時候,則是在題述的開頭就以各種親切的稱呼詞,來稱呼或呼喚作者所提問的對象,然後再敘述問題的內容,又有時是提出問題後,以「請快說出」的方式,要求讀者或學習者儘快說出答案或解決問題的方法。

而相當有趣而值得注意的一點是,《九章算術》對於所有章節以及所有的學習對象,都是採取一視同仁的態度以及制式的方式,通書以「今有……」來給出問題的條件,並大多以「問……幾何?」的形式來向讀者提出問題。而《莉拉沃蒂》則大大不同,為了引發學習者的興趣與動機,作者婆什迦羅依據題目與數學單元的不同難易度,以多元的稱呼來吸引學習者的注意,在第3章的基本運算中,因教材內容為基礎運算,故作者提問之稱多以「女孩Lilavati」作為主要的對象,然而隨著數學知識的難度增加後,提問的對象開始轉為以「朋友」為主,而在第4章之中,我們可以看出不同稱呼之間的過渡情況,除了少數簡單的法則才以「女孩」、「姑娘」作為稱呼的對象外,大多是以「朋友」為主,同時,在部份較為複雜而困難的法則與問題之中,開始出現「博學者」、「數學家」、「通曉數學的人」等等稱呼。另外,關於與商業交易有關的問題,則以「商人」為提問對象,至於涉及更加艱深數學內容的第5章、第6章與第7章之中,「數學家」與「聰明者」更轉變則成為作者主要宣告的對象,或是有時僅是以「請說出……」、「請告訴我……」的形式來要求學習者回答。作者在書中除了充份地利用親切的言詞來降低學習者與抽象數學知識之間的隔閡,並具有因材施教的教育關懷,依不同難度或不同性質的問題,來作為不同對象之學習內容與相對應所需回答的問題。

同時,頗值得一提的,作者在部份非基本的問題中,會在題目的最後加上諸如:「如果你知道……之求法」、「如果你的知識增長至此的話」、「如果你對……充分理解的話」。這也意味著作者對於學習者的提問與要求,並非一定非得回答出正確答案不可,而是容許學習者依自己能力或尊重學生的不同學習情況來決定是否回答問題,這與中國過去一般的社會傳統觀念大不相同。就如同《九章算術》之中對所有的學習者皆以一視同仁的口吻,展現了中國的文化中,教師與說書者是教室或學習場合的權威者的特色。然《莉拉沃蒂》一書中展現的精神,展現其對於學生不同程度與自身能力的關懷,符合現今教育的意義與潮流。

四、內容之比較

《九章算術》以不同之應用目的分成九章,共有246個問題,答案置於問題之後,而術文內容則大多置於各題之答案之後。而《莉拉沃蒂》有272個詩節,這些詩內容除偈語、

單位規定、結束語之外，都是各類數學問題的求解法則與例題，分為第 3, 4, 5, 6, 7 章等五大類，共 21 小類，法則後緊跟著是該法則的相關例題。

首先，《莉拉沃蒂》一書在第一詩節與第九詩節中，先給出了【歸命偈】，意即學習者在學習本書之前，必須先向神祈導，方能透過諸神的保佑與庇護來化解障礙，有助於學習數學的過程，這也反應了印度當時的社會與知識與宗教息息相關的特色，至於中國的《九章算術》中則無此現象。在偈文中也透露出數學對於之一般而言之抽象與學習上的不易。

再來，就《九章算術》的內容形式來看，整體而言是以術文統率應問題的形式（郭書春，1995），並以計算為中心，以計算出具體數字為答案來處理日常生活之各種實際問題作為主要目的，這點我們可從諸如「方田-以御田疇界域」、「粟米-以御交質變易」、「句股-以御高廣遠」等等，劉徽所注關於各章名之後的章節目的可看出。在當時的時空背景之下，學習《九章算術》者的目的，並非為了解數形關係，而是學以處理可能遭遇之各種問題，或作為官吏所需之基礎知識，因此，其術文的內容皆是以算法為主，沒有關於數的性質、圖形、關係之命題，更無數學推導與證明。

而《莉拉沃蒂》也同樣具有算法化的傾向，從章名中我們亦可如此發現：包含第 3 章之基本運算，第 4 章之中的逆算法、任意數算法、不等算法、平方算法、乘數算法、三率法、五率法、物物交換等各種算法，第 5 章主要處理混合計算、數列、平面圖形、溝渠、堆積、鋸、堆積物、等實用運算，以及第 6 章「Kuttaka」所討論到輾轉相除法和最後第 7 章的數字連鎖中處理的排列組合問題，全部都是圍繞在計算、處理各種計算性質的問題為中心目的。

有別於歐基里德《原本》中，所提出之若干定義、公理與設準，再有系統地演繹出種種命題與性質，《莉拉沃蒂》與《九章算術》都是以問題集的形式編纂，把源自於現實生活所需的各種數學問題，歸結為若干題型，以構造各類型問題解的機械化算法（中國叫作術，印度叫 Karana）。

就術部份，兩書皆提出了關於數之計算法則，《莉拉沃蒂》是以數系作為分類對象，分別以整數、分數與零三個不同對象，討論其加、減、乘、除、平方、平方根、立方、立方根等 8 種基本運算。至於《九章算術》的方田章中，把整數的加減乘部份，已當作學習者的基本先備知識，不再贅述。至於其它的運算，則是主要以「術」來作區分，提出了諸多不同的術，處理了分數之加（合分術）、減（減分術）、乘（乘分術）、約分（約分術），以及整數除以分數（經分術）等情形。此外，《莉拉沃蒂》之中，在第 19 與第 24 詩節裡，分別給出了平方與立方的定義：「相同兩數之積叫平方」，「相同三數之積叫立方」，並給出了整數平方、開平方與立方、開立方的法則，然主要處理開方開得盡的問題，至於九章算術之中，並未特別定義平方與立方之概念。

在《莉拉沃蒂》之中，若某數之平方根不可得，則稱之為「karani」，是具有無理數平方之形式的數，同樣地，《九章算術》的少廣章之開方術文中，提到「若開之不盡者，為不可開，當以面命之。」即對於開方不盡數特別引進「面」的概念，兩者本質一致。其中，在中國稱為「二之面」所代表的是「2 的平方根」，亦即使得面積為 2 的正方形之邊長。另一方面，在幾何相關的章節之中，雖然中、印皆發現了勾股定理，但其應用範圍主要仍為正整數的情況。以上也反應此二本書的數學知識脈絡下，尚無無理數的概念，

無法把根號 2 當成一個數字來看待，必須透過面積與邊長等實際指涉物來理解。

《莉拉沃蒂》第三章給出的平方、開方與立方、開立方之相關例題當中，我們可以發現到：第 21 詩節中的例題中，先求 9，14，2897，10005 之平方，再於第 22 詩節當中則提到「請分別找出四，九之平方根，及前 (21 詩節) 所作之平方根。」另外，在第 27 詩當中，先求解 9，27，125 之立方，再於第 28 詩節中，提到「求前之立方之立方根」，即求 729，19683，1953125 之立方根。在第 44 詩節關於分數之平方、平方根、立方、立方根等法則中也有類似的情形，其更明確地提出「請快說出平方的平方根，還有立方的立方根」。可見，婆什迦羅已掌握了平方與平方根，以及立方與立方根之間互為逆運算之關係，以期學習者在求解兩法的過程中，能對此關係有所認識。亦可能是其為了刻意避讓開平方與開立方過程出現開不盡的情況，又或者僅是其為了在編寫書本例題時，設計數字上的方便所致。對比於《九章算術》開方與開立方的目的與術文，主要是透過面積體積之直觀的方式進行，並非討論數之操作運算性質，然這二本書之開方與立方之方法，亦值得進一步進行比較與討論。

另外，在《九章算術》的年代，中國人對於零作為一個數字的概念，仍無法充份理解，多代表位值上的意義。至於《莉拉沃蒂》於【關於零之基本運算】的第 45 與第 46 詩節當中，已靈活地使用 0 這個數字以及其相關運算：

45. 數被零加時，零等於附加數。

零之平方等都是零。

以零除原數者是零分母。

原數乘以零是零。但運算剩下時，運算餘下時應該考慮零乘數。

46. 知道零作為乘數產生，再零作為除數時，原數不變，就可以了。

完全同樣地，無論減去零、加上零，原數不變。

另外，前者已認識了正負數的概念及有系統地提出它們的加減運算法則，在方程章中，除了在 6 問與第 8 問的列方程過程裡，出現了負的常數項之外，在「正負術」當中，說明了以黑與赤不用顏色的算籌來代表正數與負數，同時也提出：

同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之；

其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

指出了正負數相加減以及零加減一個數之運算法則。相對的，印度一直到西元約第七世紀才出現負數的概念。《莉拉沃蒂》中所討論的 8 個基本運算之中，也是以正數與零為主，並不包含負數的各種運算法則，同時，在關於零之運算之中，為避免出現負數的情形，也不討論零減去正數的場合。

《莉拉沃蒂》在基本運算之中所給出的關於法則的詩節，完全是抽象化的法則，同時我們也可以發現，其舉出的例題，除了第 33 詩節之外，皆未涉及日常生活中的實際問題，即已跳脫情境，而進一步單純處理數(整數、分數和零)的運算性質為主，這點與《九章算術》有所類似，後者在方田章之中，處理整數與分數之各種運算法則大多也是脫離情境，單純進行運算本身法則的討論，儘有「經分術」是先提出問題，再跟據問題中的情況「人數」與「錢數」來說明術文中的除法運算法則，而「乘分術」則是先提出實際問題，再從中抽象出關於分數乘法的乘分術的法則，再應用「里田術」，即計算長方形面積的方法，

來解決相關問題。然《九章算術》在少廣章中的開方與開立方，皆是為了解決實際的問題，以面積與體積為主要指涉，而《莉拉沃蒂》則是單純討論數的平方、立方與數之開方與開立方問題。

基於算法與實用的導向與特色，《莉拉沃蒂》在第 4 章與 5 章中介紹了諸多之實用算法。首先，在第 4 章介紹了「各種算法」，首先「逆算法」與「任意數算法」處理一元一次方程式問題，其作法基本上是以逆算法的方式來處理，即透過正作為負、負作為正、乘數為除數、除數作為乘數、平方作為平方根、平方根作為平方的過程來運算，或者在解題的過程中，採以「單設法」的方式，先任意地猜測假設原數，再依題述操作，最後再以類似《九章算術》之今有術的處理方式來算出真正的原數。接下來的「不等算法」處理了二個未知數的聯立方程組問題，不過題目限於已知此二數之和與差以及已知二數之差與平方差的情況。至於「平方算法」之中出現了一元二次方程式的問題，而後又在「乘數算法」之中給出了相當於現今中學課程中透過配方法來解一元二次方程式的方法。而《九章算術》中，並不處理二次以上之方程式問題，主要以與今有術解決求一個未知數的問題，並於方程章之中，以方程術為主體輔以損益術、互其算、正負術，並利用直除法的方式來處理線性方程組問題，另外，劉徽更在注釋中進一步提出「互乘相消法」與應用到今有術與衰分術的「方程新術」，來解決各種線性聯立方程組的問題。其中方程術的基本架構類似於高斯消去法與代入消去法的方式，同時，不管是方程術或互乘相消法與方程新術，皆可以「以小推大」推廣至處理任意多個未知數的線性方程組問題。而在《莉拉沃蒂》的「各種算法」當中，則沒有提到類似方程章之相關問題與算法。

而第 4 章接下來的內容，是以三率法為基礎的各種算法，包含了：三率法、五率法至十一率法以及物物交換等算法，其中的三率法與《九章算術》之今有術類似，也都同時包括了易物與利息計算之相關問題，也顯現出數學對於當時印度商業交易與金融等之實用性，也幫助我們從旁窺見當時的社會風氣。而波什迦羅並在此基礎下，延伸出五、七、九、十一率法，來解決各種複雜情境下的問題，部份情境已同時包含了正比與反比的關係，在這點比起《九章算術》局限於三率法的情況而言較為進步。

《莉拉沃蒂》在第五章的第一部份，討論各種混合計算之實用算法，包含了複利問題、儲水池注水時間問題、按比例買賣商品、關於寶石、熔合金塊的計算，其中的按比例買賣商品類似《九章算術》中的衰分問題。最後是組合問題，其中的組合問題不但是作為第七章「數字連鎖」之先備知識，也在波什迦羅的自注中，呈現出巴斯卡三角形之中的係數關係。

接下來提到數列之實用公式，包含了第 117 詩節「項數加一、乘項數折半，則為以一為初的自然數之和」，以及第 121 詩節關於求差數列末項與等差級數和的公式，至於《九章算術》在盈不足章之中的第十八問的良馬與駑馬問題裡，亦出現了求等差級數和之公式，而均輸章之中的第十八問與第十九問，也出現錐行衰之問題，討論已知等差級數之問題。而接下來的第 130 詩節，提到等比數列求和公式，而《九章算術》的衰分章第四問，女子織布問題中已知每日自倍與此等比級數和，求則是關於等比級數求各項的問題。此外，在盈不足章之中的第十一問，則是關於兩個不同等比級數相等求項數的問題，不過，

術文是透過盈不足術來求解，非提出等比級數公式，因此所得解為近似值。

而關於這兩本書中的幾何問題，皆是以處理或計算各種幾何量之問題為主，同樣有算術化的傾向，雖分別提出關於面積與體積之公式，但在原文中皆未提及相關證明或演繹過程，劉徽與 Ganesa (1545) 分別於注中才提出部份公式之證明。這兩本書之幾何概念皆採形象化，而非希臘式的抽象化。而九章算術全書受當時書寫材料限制，並無給出任何圖形，而《莉拉沃蒂》在第五章第 137 詩節，以及第 174 至第 240 詩節之中，關於幾何問題的部份，在大部份例題的附注中，作者都給出了相關的圖形或直接將圖形放於詩節之中。

在《莉拉沃蒂》將直角三角形的三邊叫「臂」、「端」、「耳」，具有視覺形象化的意義。而在中國同樣地也直角三角形的三邊各自命名為「勾」、「股」、「弦」。此外，兩書不約而同地在關於勾股定理的第一個例子，皆給出了 3-4-5 的直角三角形，已知其中任兩邊求第三邊之例子。這與古埃及、巴比倫等所發現的例子相符，也反應了勾股定理在不同文明中，所產生之多元發現情況。

《九章算術》在方田章、少廣章、商功章、勾股章中各自處理了關於平面圖形面積，開方、開立方、開圓、開立圓，求立體圖形之體積，直角三角形等不同方面的幾何問題，而《莉拉沃蒂》一書將幾何問題的部份置於第五章之中，第 3 節是關於平面圖形之實用算法，處理了三角形問題、四邊形問題、針狀圖形。以及第 4 至第 8 節關於溝渠、堆積、鋸、堆積物、影之各種實用算法。其中「關於平面圖形之實用算法」，類似中國的幾何學，以平面圖形求面積、直角三角形的計算，以及測量問題為中心，具有算述的性質，相當於《九章算術》中的方田章、勾股章的內容。其從第 135 詩至第 198 詩節大部份的篇幅主要為討論直角三角形(勾股定理)之應用，以及在各種不同條件之下，求三角形與各類四邊形之諸邊長、線段與面積等問題。其中，值得注意的是第 150 詩節的折竹問題與第 154 詩節的傾蓮問題，在《九章算術》之勾股章也出現過(第 13 問與第 6 問)。

《九章算術》中的方田章提出了方田、圭田、邪田、箕田、宛田、弧田、環田以及圓等面積公式，並在少廣與商功章之中，提出相當豐富的各種立體圖形體積公式。而《莉拉沃蒂》在第 172 詩節提到正方形、長方形與梯形等之面積公式，然後，在第 200 詩節與第 201 詩節中則給出了圓周率、圓面積與球體積之公式。其中圓週率數值是取 $\pi = \frac{22}{7}$ 、圓周

長與圓面積公式、球體積公式 $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ 。而這裡，圓面積公式相當於《九章算術》之「周徑相乘，四而一」公式。另外，注釋者 G 也透過圖形直觀的方式來給出圓面積公式之生成緣由。第 205 詩節後，則是關於求弦長、圓內三邊形、四邊形、五邊形、六邊形之邊長的問題，這個部份在《九章算術》之中並沒有出現。

接下來的「關於溝渠之實用算法」，屬於立體圖形的度量計算類似商功章、少廣章，其中第 217 詩節中提出的「密立體果」的體積公式，與商功章中提到的芻童的體積公式本質上是一致的。而在這裡，注釋者 G 與劉徽採用樣的手法，以兩種不同的方式將立體圖形作分割成部份，然後再各自透過已知公式作處理，進一步來說明溝渠體積之體積公式，這與劉徽常將立體圖形分割成已知圖形以證明更類立體體積的方式相同。「關於鋸之實用算法」則是討論鋸割木材的體積，並在第 225 詩節提到依工作量與勞務費分配的計算問題，

而《九章算術》商功之工程問題之中依工程難易度來作討論工程進度的想法。

「關於堆積物之實用算法」裡討論穀物等堆積的體積計算問題，在第 227 詩節裡這裡提出圓錐的體積計算，也類似《九章算術》中的商功中的委米依垣問題，不過《莉拉沃蒂》中關於委米依垣的討論，假穀物的高皆相等，故只跟據底部扇形圓心角為 90 度(內隅)、180 度(壁)、270 度(外隅)的情況，分別進行簡單的討論與比較，這與《九章算術》之委米依垣問題以單純計算各別的體積為目的有所不同。

另外，這二本書皆提及了輾轉相除法的概念，《莉拉沃蒂》在第 6 章中以輾轉相除法來解決不定方程問題，至於《九章算術》則是在方田章中的約分術中，提到「以少減多，更相減損，求其等也。」目的是為了找出兩數之最大公因數。

最後，比較特別的是九章算術各個問題，都給出了明確的答案，其中方程章中的第 13 問，因題目只能列 5 個方程式，卻產生 6 個未知數，故為一個不定方程問題，劉徽也提出「舉率以言之」的想法，表示其已意識到此為《九章算術》於失誤之下所產生的不定方程問題。而《莉拉沃蒂》在第 164 詩特別藉由魯莽人的口，所給出的四邊形條件，滿足「非圖形」的定義，故無法形成圖形。在教學上以非例子來造成學習者認知衝突，並正面加強學生對相關概念之抽象，實具教育意義。

最後，以《莉拉沃蒂》之章節為主，將兩書所存在相似內容，作一簡單表列對照如下：

《莉拉沃蒂》各章與《九章算術》內容之對照表

章 名	《莉拉沃蒂》	《九章算術》
第 1 章 規約	常用的度量衡單位及其換算 介紹印度當時的度量衡換算標準	粟米章： 給出了「粟米之法」，即該章中 所需使用的各種穀物之間的換 算比率。 其它度量衡單位及其換算，散 落於各章中。
第 2 章 數位之確 定	介紹印度的十進制 位值制記數法 10 個數字符號的使用	無
第 3 章 基本運算	介紹加、減、乘、除、平方、開 平方、立方、開立方等八種運算。 根據數的類別(正整數、分數、零) 分成三種情形來敘述。	方田章： 合分術、減分術、乘分術、約 分術、經分術等 少廣章： 開方，開立方問題
第 4 章 各種算法	包含五種算法： (1)逆算法，(2)任意數算法， (3)不等算法，(4)平方算法， (5)乘數算法 以三率法為基礎的算法： (6)三率法，(7)五率法等， (8)物物交換	三率法與中國的今有術類似
第 5 章	(1)關於混合計算之實用算法，	

實用運算	<p>A 複利問題、 B 儲水池注水時間問題 C 按比例買賣商品、 D 關於寶石的計算 E 熔合金塊的計算、 F 組合問題</p> <p>(2)關於數列之實用算法， A 自然數列求和、 B 等差數列求和 C 等比數列求和、 D 韻律各數問題</p> <p>(3)關於平面圖形之實用算法， A 三角形問題 B 四邊形問題 C 針狀圖形 D 圓與球的計算</p> <p>(4)關於溝渠之實用算法， 屬於立體圖形的度量計算</p> <p>(5)關於堆積之實用算法 沒有空隙的堆垛問題</p> <p>(6)關於鋸之實用算法 鋸割木材的體積計算</p> <p>(7)關於堆積物之實用算法 穀物等堆積的體積計算問題</p> <p>(8)關於影之實用算法 勾股測量問題</p>	<p>(1)C 類似《九章算術》中的衰分問題</p> <p>(2)九章中亦散落地出現等差與等比數列級數等問題</p> <p>(3)方田章、勾股章 以平面圖形與立體圖形的求面積、直角三角形的計算</p> <p>D 圓面積公式同方田章之「周徑相乘，四而一」</p> <p>(4)類似商功章、少廣章之體積計算</p> <p>(6)類似商功中的功程問題</p> <p>(7)類似商功中的委米依垣問題</p> <p>(8)類似《海島算經》中的重差術</p>
第 6 章 <i>Kuttaka</i>	二元一次不定方程式求解問題 算法核心是輾轉相除法	方田章： 處理求最大公因數以約分
第 7 章 數字連鎖	排列組合問題	
第 8 章 結語	強調本書的有效性與重要性	

五、注釋之特色

中國數學活動往往是通過給算書做注而展開，從劉徽《九章算術注》與趙爽的《周髀算經注》等例子，我們可以看出此一特色。九章算術的注釋者中，最有名的莫過於劉徽以及李淳風之注釋，其也包含在廣義的九章算術內容當中。這此注釋中主要是以九章算術的術文內容為注釋對象，甚少的篇幅是對問題的敘述本文與答案的說明作注。在體例上，注釋內容緊接著術文之後，其中標明「臣淳風等謹按：」者為李淳風之注釋，其餘部份，包含標明「按」以及未標明的部份則大多為劉徽之注。另外，又諸如賈憲的《黃帝黃章算經細草》、楊輝《詳解九章算法》或者李潢的《九章算術細草圖說》等，亦是歷史

上《九章算術》對於著名的注釋著作，而其中楊輝更進一步將九章算術的內容作重新的分類工作。

至於《莉拉沃蒂》與九章算術的最大不同，在於婆什迦羅本人首先進行了自注的工作，其主要的自注內容在於將例題中的數據摘錄出來，按照法則排列起來進行演算，以再現算法過程。而其原梵文之「附注」是以散文詩的形式表達，惜經翻譯之後已無法展現其語文上的韻律美感與特色。而除了作者本身的自注之外

，流傳的過程中亦有許多數學家給予注釋。在林隆夫之日譯版當中。特別提到注釋者有 Mahishara (1587) 與 Ganesa (1545)，其中注釋者 M 主要是對其中的數學內容進行最簡單的說明，而注釋者 G 除了數學內容的說明外，還逐句進行解釋與語法說明，進行正誤、闡述法則原理的生成緣由或法則的證明，類似中國算書中「草」與「細草」的附注內容。

而《莉拉沃蒂》中則在第 5 章中出現了諸多相關的幾何圖形。其中關於幾何公式的生成緣由的說明，主要採用圖示法(幾何圖解)的證明方法，這點與中國數學類似，劉徽常常以「析理以辭，解體用圖」的方式來解決問題，然而因近二千年前書寫材料的限制並無法留下圖形，因此，後代的算學家或學者只能根據注釋的內容來重建補上圖形，不若《莉拉沃蒂》成書於各式紙張已盛行的年代，較能保留當時的圖形特色。又例如李潢的《九章算術細草圖說》，其中包含了細草、圖、說三部份的內容，其中的「圖」是針對第一、四、五、六章及海島算經中的問題，畫出所需要之圖形，而「細草」的部份則根據《九章算術》的術文、劉徽注還有《海島算經》的術文列出演詳細的演算過程，至於「說」的部份則是逐句闡述與校勘。

雖然中國與印度數學並未出現《幾何原本》一樣的公理體系架構，然在本文探討這兩本書的附注當中，我們仍可以發現「證明」的思想與脈絡。劉徽在九章注當中，展現其卓越的數學思維能力，設法透過圖形的幫助，證明九章給出的抽象術文內容與公式，而婆什迦羅的自注中，曾利用斜邊為作垂線的方法，來證明勾股定理。另外，我們也可發現 Ganesa (1545) 之注釋地位之於劉徽的九章注頗為相似，其在注釋當中廣泛地闡述了法則原理的「生成緣由」(upapatti) 或法則的證明，其中的 darsana 有「見」與「示」的意義，是為說明與顯示必要圖形時的用語，形同以幾何圖解的方式來進行視覺化的圖形說明，這與中國「析理以辭，解體用圖」的想法類似。

劉徽在方田章中，利用「出入相補」的方式來證明圭田、邪田、箕田等面積公式，少廣章之中利用圖形來說明開方、開立方以及割圓求圓周率，在商功章之中透過某驗法的方式，將立體圖形進一步分割成已知的圖形的組合，進一步求各類體積公式。又至於勾股章亦是精采，諸如勾股容圓、勾股容方、以及已知勾股形各邊部份關係與條件，劉徽漂亮地使用圖形的出入相補關係，來推導出這些關係式的證明，可用來求三角形之中其它線段與邊長等問題，亦可廣泛地應用於解決各種實際測量問題，又例如其在勾股定理的證明之中，更輔以顏色來作說明：「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也，今成弦方之冪。」

由上可見，注釋之於《莉拉沃蒂》與《九章算術》本文之重要性，研究此二書的過程，並不能忽略其相關的重要注釋內容，從這些注釋之探討中，往往能更深一層地為後世研究者揭開關於這兩本古籍的神祕面紗。

六、參考文獻

本文所參考的版本爲林隆夫翻譯之《莉拉沃蒂》(日譯本)，其採取直譯滿根據最進的研究成果，給予最詳細的注釋，能準確地再現當時印度數學的真實面目。而日譯本所採用的底本有：

(1) *Dattatreya Apate Dattatreya Āpate* 本，其中附有 *Ganesa* (1545) 和 *Mahishara* (1587) 的注釋(A 本)。

(2) *K.V.Sarma* 本，其中附有 *Sankara* 和的注釋 *Nārāyana* (S 本)。

另外，也參考了 *H. T. C. Colebrooke* 的英譯本 (1817) 與 *Banerji* 的 *H. T. C. Colebrooke's Translation of the Lilāvati* (1927)(B 本)。*Lilāvati of Bhākarācāya, A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition* (2001) (K 本) 爲英譯本，準確地揭示每一詩節的數學內容，但採用大量的現代數學符號來闡釋原理與公式，雖便於閱讀卻沒有忠實於原著。的翻譯中，將其中的「注釋」部份，以「今釋」形式譯出。

至於《九章算術》的部份，主要參考九章出版社所出版，劉鈍與郭書春點校的《算經十書》之中的九章算術部份。其中所使用的版本有鮑氏之翻刻北宋秘書省刻本的南宋本，爲本書前五卷之底本，南宋楊輝《詳解九章算法》所引之楊輝本，爲本書後四卷之底本。另外，還有抄入《永樂大典》的大典本、戴震的聚珍本與四庫本、屈曾發的屈刻本、孔繼涵的孔刻本、李潢以孔刻本爲底本的《九章算術細草圖說》、錢寶琮的錢校本、郭書春的匯校本、李繼閔的校證本等。

台師大數學系 2009 年畢業的數學史碩士論文目錄

- 文宏元 (2009). 《由十九世紀東算家李尚赫《翼算》所見之中國古算之形象》
李素幸 (2009). 《清代許桂林《算牖》之研究》
何嘉祥 (2009). 《清代算學家項名達及其數學研究》
郭志輝 (2009). 《杜知耕及其《幾何論約》之研究》
張美玲 (2009). 《《數理精蘊》中的《幾何原本》》
黃俊才 (2009). 《李潢《緝古算經考注》之內容分析》

《杜知耕及其《幾何論約》之研究》摘要

郭志輝

台師大數學系教學碩士班

清初算學家杜知耕，數學上「會通中西」的要角之一。他身處在中學式微、西學東傳的時代背景下。他以歐幾里得《幾何原本》為基礎，用圖文並列之方式說明刪削的原理，作成《幾何論約》一書。本文透過對杜知耕生平、學習情形的研究，及對《幾何論約》文本題目的分析，試著勾勒出清初「會通中西」算學家研究的風貌，並找出《幾何原本》的內容及公理化思想，與《幾何論約》一書的關聯性。

而本論文亦將對杜知耕及其算學著作《幾何論約》作全面的分析與研究，期能給杜知耕在中算的發展中一個歷史定位。另外，我們也探討杜知耕為何要做此刪修，以及刪修的標準為何，並作深入的解析。

綜觀《幾何論約》這本著述，筆者所得即是：只要能夠直觀由圖形之觀察便能知命題者，「解曰」及「論約」便捨去，只留命題。若是圖形只須配合一些解釋便能使人清楚明瞭者，便保留「解曰」，刪除「論約」。若是命題本身尚須理論基礎、或是探討之命題較艱深難懂，則「解曰」及「論約」就保留或是只作刪減，不作刪去的動作。

關鍵字：幾何原本 (*The Elements*)、杜知耕 (Du Zhigeng)。

謝 誌

歷經了多年一波三折的辛勤耕耘，最終論文終於還是順利完成了。在口試委員們宣布論文通過的那一刻，心中除了喜悅溢於言表，更是充滿感謝之心。

首先要感謝的人當然是指導教授洪萬生老師。

自開課的暑假開始，洪老師不辭辛勞的利用暑期碩士班的課程，教導我們數學史及數學哲學等相關知識，並耐心的指導論文寫作的要領及方法。原本的我日前因為身體出現狀況，因而開刀住院治療以及家庭因素，差點就要放棄論文的寫作，多虧洪老師的鼓勵與引導，使我有繼續下去的勇氣與動力，更讓我從一個數學史的門外漢，得以漸漸學習如何閱讀及理解相關的數學史書籍及文本，並能慢慢的引導出自己的想法及結論，甚至如今能完成一篇研究論文。

這樣的成長及成果全都要歸功於洪老師細心及耐心的引導及指正。

真的謝謝你，洪老師。

其次，亦要感謝左台益教授及林炎全教授在口試過程中給予許多寶貴的建議，使得論文得以更加完善。

最後，還要感謝程和欽老師與同事洪宜亭老師的指導及家人的大力支持，尤其是內人黃珍香在各方面的配合及協助，辛苦的照顧幼小、可愛又頑皮的女兒，並不時地給予我加油、打氣，讓我能全心全意地投入論文的撰寫，完成心中的一個願望。另外，對提供我完成論文的各方協助，亦謹此一併致謝。

衷心地感謝大家！謝謝！！！！

-中華民國九十八年七月 研究生郭志輝

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳燁（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 張瑄方（永春高中）
張美玲（景興國中） 黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中） 林裕意（開平中學）
林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中） 程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林晏志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉（二重國小） 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文瓊（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鍾啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽（永豐高中）、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳（照南國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工） 郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中） 劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中） 楊瓊茹（屏東高中） 陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

參加「2009 年全國學校經營創新獎 —— 課程教學領導組」競賽感言

陳玉芬

台北縣三峽明德中學

這是一個爲了推展創新多元、帶動校園活力，提升學校教與學品質所舉辦的一種全國性的校際競賽活動。此次進入決賽的所有隊伍共有 238 隊，而我們所參加競賽的「課程教學領導組」南北學校共有 50 隊，顯見教師們對於這樣的一種良性創新競賽確實已有了很大的認同感，也足見教師們對創意教學的熱忱與期待。

我們數學科這次參賽的專案策略是「明德的『移動式』數學一點、線、面完全攻略」，主要內容分成三個主題：每年一次的數學週「單點活動」、每月出刊一次的數食店月刊「線性活動」，最後再搭配「全面性」的行動數學（每日數學）。主要的教學活動目的，顧名思義就是希望數學能在明德的校園中，悠游移動，無處不在，也希望明德學子感受到生活中處處有數學。而我們也相信這樣的一個願景已逐漸實現中。

當然，任何一個事件的成功，背後總有著些許苦楚與感恩的交雜心情，回想當初只是希望在數學的教學上有些改變，或是覺得數學不應只是如此單調與乏味，於是和數學科老師們討論後，大家就這樣一頭栽了進去，漫漫長路已近 6 年，尤其在活動前，全體數學老師的無數次討論會議、活動設計的不斷修正、活動會場的佈置皆親力親爲，但一切的一切，到了此時，所有的辛勞似乎也都化爲一抹微笑了。不過，在此謹代表全體數學老師感謝學校行政資源的全力配合，尤其是校長、教務主任、及教學組長的支持與協助（我們永遠記得那正六面體展開圖的格線竟要花 5000 元，而您們仍然慨然允諾）。

隨著激情過後，一些理性的回饋是需要沈澱的，諸如在決賽中，評審所給的意見，如何讓此活動策略之成效更加彰顯？更加精緻化？這些都是我們還要繼續努力精進之處，也希望這樣的類似活動能出現在各個校園，讓數學能隨處隨風飛揚，讓學生能自在呼吸數學的氣息。最後仍是不忘提醒同學們：請踴躍參加每年一度的數學週闖關活動（如圖一），請認真閱讀每月所發行的數食店月刊（如圖二），請每天都去東風樓的川堂上的「行動數學」中走走（如圖三），因爲這是全體數學科老師願意持續不斷努力經營下去的原動力啊！

※ 筆者在此特別感謝自己非常有幸成爲洪萬生老師帶領的 HPM 團隊中的一員，因爲在老師那裡，總是可以不斷獲得一些新的觀念與想法，這使我在教學上，總會有那麼一股突然而來的靈感與教法上的觸動！

編按：陳玉芬老師及明德中學團隊榮獲本項優等獎，謹此申致賀忱！



圖一



圖二



圖三

淺談荷蘭的數學教育

莊英貴

台北教育大學數學教育研究所研究生

一、緒論

提到荷蘭這個國家，一般人大都會想到風車、鬱金香、填海造陸等等，鮮少人會注意到他們的數學教育，其實，荷蘭人對於它們自己的數學教育非常自傲，它們堅持走自己的路，即使在七十年代「新數學」風行全球時，荷蘭人仍然信心滿滿，不為所動，成為少數幾個不受「新數學」影響的國家。荷蘭人為何能堅持用自己的方式來教數學，是因為他們有一套很引以為自豪的數學理論－真實數學教育（Realistic Mathematics Education，簡稱RME）。從1970年代到今天，RME歷經三十多個年頭，荷蘭數學教育在全球居於領先地位，就是因為他們基於這套理論，不斷的創新、發展，以至於有今日的成就。

二、何謂真實數學教育

RME 的目前版本大部分依據 Hans Freudenthal 等人的數學觀點而確立。Freudenthal 等人認為數學教育應立足於兒童認知發展的基礎，以生活真實的情境為核心，讓學習者可以藉由生活事件的活動，應用數學知識，並從經驗中察覺數學的關係與定律，進而將概念內蘊化（Freudenthal, 1973）。

之後，Treffers (1987) 提出了二種型態的數學化。他區分「水平的」和「垂直的」數學化：

（一）、水平的數學化－學生提供可以在真實生活情境中，幫助組織或解題的數學工具。

（二）、垂直的數學化－數學自己本身內部改造的過程，例如，發現捷徑和發現概念與策略之間的連結關係，然後應用這些發現。

換言之，水平的數學化過程包含從生活中的世界，進入符號世界，而垂直的數學化意指符號世界內的活動（Freudenthal, 1991）。雖然這些區分似乎曖昧不清，Freudenthal 卻很清楚的陳述這並不是兩個世界的表示。他同時也強調，這兩種數學化過程是等值重要。Freudenthal 認為一個人必須將數學化放在心上，它就可以產生不同的理解層級。

真實數學的課程與教學，乃透過學校數學與學習者的生活經驗結合，在社會文化脈絡下探索解決問題，從解題操作與發現答案的過程，分析與歸納規則，走入數學的符號世界。在學習的初始，嘗試錯誤與些許的渾沌想法是被允許的，藉由解題思考的開放與調適，建立系統性的概念，逐步提升數學的思維層次（Gravemeijer, 1994）。同時，只有能應用具體學習，方能觸動知識的遷移與再建構，進而導向知識精緻化與創造的學習目標。

換句話說，真實數學的學習其乃以學習者的生活文化為情境脈絡，探索數學問題解決的合理途徑，其過程可能非標準化且不像數學家的思維模式，但是藉由操作與解題經驗的累積，發現與歸納問題的特性，逐步提升思考的層次，進而結構系統性的知識。

由上可之，真實數學教育的理論並非一蹴可即，也並非一成不變，它會隨著社會變遷

而稍有修正，但它的大原則是不變的。

三、真實數學教育關鍵目標

荷蘭政府對於荷蘭的數學教育是非常滿意的，所以，從七十年代到九十年代初期，都未曾干預數學教育，因為政府認為數學課程完全是老師和學校團隊的責任。直到 1993 年，荷蘭教育部提供一份有關數學能力指標的清單，叫做‘Key Goals’（關鍵目標）。這些目標描述學生在他們的小學畢業以前（十二歲），在數學領域中必須學會的目標。這份清單包含 23 個目標，分成六個領域（參見表 1）。

表 1：荷蘭小學數學教育的關鍵目標（Van den Heuvel-Panhuizen，2000）

一般能力	1	能因應單位變換，往上數及往下數
	2	能做十以內的加法表和乘法表
	3	能因深入的理解而用較快速的方式做簡單的心算問題。
	4	能透過大略的方式估計答案，並能使用分數和小數估算。
	5	對整數和小數位值系統架構有深入的了解。
	6	能熟練的使用計算機
	7	能將簡單的現實問題轉換成一個數學問題。
四則運算	8	能在簡單情境脈絡中，使用標準的加、減、乘、除。
比與百分比	9	能比較比率和百分比。
	10	能做簡單的比例問題。
	11	建立百分率的概念，且將此百分率的概念實際的應用在簡單情境脈絡之中。
	12	了解兩數之間的比例關係、分數及小數。
分數	13	了解分數、小數的各種不同的意義
	14	能在數線上標示出分數及小數的位置，且能在計算機的幫助之下做分數、小數之間的轉換
	15	透過情境脈絡的模式，能比較分數的加、減、乘、除。
測量	16	能識別時間並且計算時間，及認識日曆。
	17	能在日常生活情境中算錢（使用錢）。
	18	能洞察最重要的數量和相應測量單位之間的關係。
	19	能了解長度、面積、容積、時間、速度、重量及溫度的普通單位，並將它應用在情境脈絡之中。
	20	能讀取簡單的表和圖，並能將自己的調查研究製作成表和圖。
幾何	21	能應用已經掌握的基本概念來重組及描述幾何空間。
	22	能使用組成部分、草案、地圖、照片和資料做幾何推理，找出相關位置、方向、距離及尺規(比例尺)。
	23	能解釋陰影圖像，能混合形狀，能想出並且鑑定物體切掉部分的變化規則。

由上面 23 條關鍵目標看來，荷蘭也向世界趨勢靠攏，訂定出自己的能力指標，但很明顯的，是這些指標都很簡單。這意味著，教師在解讀這些指標上有很大的自由空間。另外，從指標上可看出一些荷蘭數學教育的變化：

- 更加注意心算和估算。

分數的核心課程不再只是形式刻板化的運算，而是要學生了解題義後，才開始著手運算。

- 幾何學正式地納入課程中，並且也很有見地的使用計算器。

從上面的變化可看出，荷蘭新一代的數學教育不但保有原來 RME 的優點，還不斷改良，加入其他國家數學教育中的優點，使其數學教育更加完善。

四、真實數學教育的啟發

RME 是以學生觀點出發，RME 將這些觀點分為六點原則，這些原則，有一些是來自學習的觀點，有一些是比較接近於數學的觀點。這些原則條列如下：

活動原則：學生是知識的創造者，而不是接收器，應在活動中讓學生從「做中學」，而活動設計應以能吸引學生「自發性」參與，才算是成功的教學活動設計。

真實原則：學習數學應與學生日常生活或舊經驗結合，讓數學可以在日常生活中運用，而非只是紙上的符號。此原則常常是學生學習數學動力的來源。

程度原則：最佳的活動設計，應顧及各種程度的學生，讓學生能有機會用各種方法解題，可讓學生從非正式到正式解題、具體到抽象、由淺到深發展出密切連結內容的策略。

編織原則：課程設計應讓課業間產生連貫性，例如：數感、心算、估算有一定的相關性，所以課程設計時，應考慮讓相關課程間產生連結。

交互作用原則：數學課應該提供學生彼此分享解題策略的機會。聆聽其他人發現了什麼並討論這些發現，學生能得到改善自己策略的構想。此外，相互影響能喚起學生的回應和想法，使學生到達更高的理解層次。

引導原則：教師帶領學生並掌握學習步驟，而非固定地示範學生必學的事物。老師們必須在教學前就知道哪些地方和哪種方式，可以逐漸搭起學生的理解力與技能的鷹架。

(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)

基於上述六個原則，對於教材編排及教學方法應有一些啟發。

教材編排：學生是學習的主體，故教材安排應以學生觀點為出發點，應注意到以下一些事項：

- 趣味性及自發性
- 生活性及實用性
- 縱向性及由淺入深
- 橫向性及相關性

教學方法：Freudenthal 視數學化為數學教育主要過程的兩個因素：(1)數學化不只是數學家的主要活動，其亦使學生熟悉日常情境中的數學方法。由於數學化促進可應用性，其中個人經驗被視為重要的，此與探索取向一致。(2)數學化與再發明的想法有關，學生藉由此一過程使其非形式化的理解與直覺形式化，此與表達取向一致。

由以上 Freudenthal 的兩個看法再加上 RME 的六點原則，筆者認為在教學上應注意下列事項：

- 教師用語需適合學生程度。
- 應鼓勵並提供學生討論及發表的機會。

- 教師應熟悉教材及每一個教學流程和重點。
- 教學應考量各種程度學生，因材施教。
- 教師應適時提供鷹架，增進學習效果。
- 教師應提供足夠的時間讓學生探索。

以上是 RME 給予筆者在課程及教學上的一些啟發，從今以後，筆者將以此為教學準則，期望能為台灣數學教育現場有所貢獻。

五、結論

和荷蘭比較，台灣的數學教育規定較嚴謹，相對給老師的空間就比較小，如何能在保留台灣傳統教育優點，又能吸收 RME 的優點，是我們值得努力的方向。在此以彭端淑〈為學一首示子侄〉中的故事做為結語。

蜀之鄙有二僧，其一貧，其一富。貧者語於富者曰：「吾欲之南海，何如？」

富者曰：「子何恃而往？」

曰：「吾一瓶一鉢足矣。」

富者曰：「吾數年來欲買舟而下，猶未能也。子何恃而往！」

越明年，貧者自南海還，以告富者。富者有慚色。

西蜀之去南海，不知幾千里也，僧富者不能至而貧者至焉。

人之立志，顧不如蜀鄙之僧哉？

參考文獻

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: CD-β Press, Freudenthal Institute.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics Education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Information

來函照登

阮錫祺

台中市西苑高中

洪老師您好

8/14 收到您的來電後，我立即與建宗學弟連絡，約好 8/15 至冠良家中幫忙。

8/15 一早我攜帶一點食物和水菓驅車前往冠良家中探視，最主要是傳達老師您的感懷和祝福冠良閣家安康。因為林邊附近有許多大型的機具和軍用卡車進駐，所以，高速公路到南州交流道便實施管制，車子無法直達林邊，只好繞小路，再步行至冠良家中。沿途道路兩旁堆滿了泡水車，以及堆積如山的泡水傢俱和沙發，每戶都損失不貲，冠良自己損失兩部轎車，他爸爸家損失三部轎車，共五部，他有點心疼。不過，有件更驚悚的事，事發當夜，堤岸潰堤時，大水沖入，淹沒冠良家一樓，當他衝出逃生時，差一點被湍急的大水沖走，所幸他抓住鄰居的鐵柱，再往二樓爬，保住性命。最後他爬到頂樓，揮舞著SOS的布條並大聲地呼救，至今他仍然心有餘悸。連續幾天的缺水缺電而且與外界隔絕，他的小孩只喝雨水泡的奶水。今天終於水電恢復供應，家家戶戶開始打掃整理家園，不過馬路仍然積水至 10~20cm，到處都是淤泥，寸步難行。

早上建宗先到，因為冠良連續幾天腳底一直泡在水中，腳底長了幾個狼瘡深怕感染發炎，建宗先載冠良夫婦至醫院就診。冠良太太的爸爸、舅舅、舅媽和建宗伉儷以及陳天宏（我碩士班的同學也是冠良大學同學，值得一提的是這位偉大的同學，是第一時間趕至救援，從昨天已經在冠良打掃兩天兩夜），我們人手還算充足，忙到傍晚一切幾乎都清洗完畢。我先告辭，趕回台中。回家路上，讓我值得感動的幾件事，第一件：雖然風雨無情，面對災難時許多人仍展現無比求生毅力。第二件：許多人面對天災所造成的財產損失，仍然樂觀地迎向未來。第三件：沿途有許多社團單位及志工朋友主動加入打掃整理的工作，雖然彼此也許是陌生，但是，愛心與熱情卻讓大家緊扣在一起，幫助受災者重建家園。

最後，也是最感激的是老師您的電話聯絡，集合我們一起幫冠良渡過難關。謝謝您。

錫琦 敬上

