

# HPM 通訊

第十二卷 第十一期 目錄 (2009年11月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：李建勳、黃俊璋（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（英國劍橋李約瑟研究所）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例
- 《博士熱愛的算式》「問題討論」11 則
- 《博士熱愛的算式》書評

## 數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和HPM為例<sup>1</sup>

洪萬生

台灣師範大學數學系

林芳玫

台灣師範大學台灣文化、語言與文學研究所

### 一、前言

除了科普作家或關注數學普及的數學家之外，數學知識活動的敘事面向也逐漸吸引教育學者的注意。在本文中，我們打算針對數學與敘事 (mathematics and narrative) 之結合如何可以應用到通識教育，以及它與數學史與數學教學之關連(簡稱HPM) 的宗旨之呼應，<sup>2</sup> 進行一個初步的研究。

有關數學與敘事如何被運用以創作和評論數學小說 (mathematical fiction)，我們已經另文討論。<sup>3</sup> 由於這些小說都具有數學知識普及之功能，同時，它們也蠻適合充當與數學核心課程有關的通識教育課程之參考，乃至於中小學師生的科普讀物，<sup>4</sup> 因此，我們希望指出數學與敘事的幾個面向，以使用以刻畫它們在通識教育與HPM方面的應用之價值與意義。

基於此，本文除了引述湯瑪斯 (R. S. D. Thomas) 的類比數學與敘事 (第二節)，將藉以簡要比較數學小說與歷史小說 (第三節)，以及針對科普書寫的數學家傳記版本，進行初步的反思 (第四節)。最後，再依序探討數學與敘事在通識教育以及 HPM 方面的應用 (第五、六節)。有關本文與通識教育之關連，我們本文結論 (第七節) 中，部份將以台灣師範大學通識教育核心課程中的「數學與科學思維」領域的目標與內涵為參考點，再對照其

<sup>1</sup> 本文之撰寫，得自「百部數學普及作品的內容與形式之研究計畫」(NSC 96-2511-S-003) 部份贊助，謹此申謝。

<sup>2</sup> 所謂 HPM 原指數學史與數學教學之關連的國際研究群 (International Study Group on Relations between History and Pedagogy of Mathematics)，後來則引伸為一個研究學門。請參考 Fauvel & van Maanen (Eds.) (2000)。

<sup>3</sup> 參考林芳玫和洪萬生 (待刊稿)。

<sup>4</sup> 譬如小川洋子的《博士熱愛的算式》就極受中小學數學教師的歡迎，其中所納入之數學及其認知策略，也頗受數學家及數學教師之認同與肯定。參考單維彰 (2008)、蘇惠玉 (2006)。

中一門所屬課程「數學活動與思維」的實施情況，貢獻一得之愚，期待各界專家學者的批評與指教。

## 二、數學與敘事

在〈數學與敘事〉(Mathematics and Narrative) 中，<sup>5</sup>湯瑪斯對比數學與敘事，指出兩者之間常被忽略的相似性。現在，通過定理與證明 vs. 小說與歷史敘事 (fictional and historical narrative) 之比較，這一相似性乃得以凸顯。

當我們進行數學證明時，通常首先設定 (postulate) 某些客體或物件 (object)，以及它們之間的關係，<sup>6</sup>這可以類比如下：當我們說故事時，是從一些已知角色開始。數學理論的發展主要透過邏輯演繹，衍伸數學物件之間的關係。另一方面，(小說) 故事的發展則主要由於外在原因與人物的意圖。不過，故事與數學中的想像 (imagination) 與演繹 (deduction) 也截然不同：「在數學中，吾人想像之目的在於瞭解結論為何被如此蘊涵，而在故事中，吾人則是局部地演繹推論，以便知道何者用以想像以及故事如何開展。」儘管如此，湯瑪斯還是指出：數學言說 (mathematical discourse) 的動人之處，乃是在於被論及的關係之真實關連 (actually relate)：它們並非抽象的，譬如歐幾里得未曾說及點的共線性是一種抽象概念，而只是探討某些點是否共線 (collinear)。類似地，莎士比亞從未論說何謂嫉妒，他只是將一些人物布置在那個情境之中，以便吸引我們的注意。

如此看來，敘事處理的是最終特例 (ultimately special cases)，數學家則主要關注一般性的結論。不過，數學家還是對他們據以發現模式 (pattern，或一般式) 的特例感興趣。<sup>7</sup>文學理論與研究，如同數學思維一樣，都把特例看成模式的一種彰顯，因此，文學理論從許多特定的故事中提煉出共同的模式。我們可以接受相同結局的故事有不同的情節發展過程，另一方面，在數學中，我們也歡迎針對同一命題的不同證明。

最後，回到數學 vs. 敘事的應用性與真實性。湯瑪斯注意到諸如數學物件與數學定理，都能如同故事般地被應用，這是因為數學物件及其彼此關係，正如同故事中的虛構人物或角色 (character) 一樣，都是被設定的，但是，進一步推演或發展出來的有意義關係，卻具有普適性的應用價值。而數學的事實 (亦即有效的推論) 也類比了故事之中的事實。「好的」數學概念，可用之證明某些事，最好的故事則具有不同方式的啟發力量。

現在，為了例釋上引論述，我們在此引述多夏狄斯 (Doxiadis) 有關數學解題 vs. 偵探破案的類比。他相當熟悉結構主義敘事分析學者如波普 (Propp) 的民間傳說與Campbell的神話學等研究結果，<sup>8</sup>為了指出數學與敘事的密切關連，他對比了波利亞 (George Polya) 的「怎樣解題」與偵探如何破案的策略，列出偵探方法步驟如下 (Doxiadis, 2004) (其中劃底線者，表示與解題活動之策略雷同)：

- 猜測與檢驗
- 尋找一個胚騰 (諮詢犯罪檔案)
- 繪製一個圖形 (根據目擊者描述)
- 求解一個更簡單的問題 (進行片段的調查)

<sup>5</sup> 本節前半部主要參考 Thomas (2002)。

<sup>6</sup> 參考洪萬生 (2009)。

<sup>7</sup> 有關數學上的「特例」與「一般」之關係，可參考洪萬生 (2006)。

<sup>8</sup> 參考 Doxiadis (2004)。

- 回顧 (想想誰是犯罪的受益者)
- 利用公式 (化學、基因或任意相關的技術)
- 製作一個前後順序的清單 (有關嫌疑犯)
- 排除一些可能性 (檢視不在場證明等)
- 尋找實質證據
- 好好地分析
- 詢問目擊者
- 利用直接推理
- 要有創意

多夏狄斯也指出，上述這個單子來可以列出更多項目，正如同數學解題者的策略一樣。無論如何，上述這個類比，至少可以說明如何解題與如何敘事，的確有異曲同工之妙，無怪乎他努力結合同道，推動此一知識活動了。

事實上，多夏狄斯為此提出“paramathematics”之概念，以便刻畫此一跨領域的「數學與敘事」之知識活動。他說這個英文字字根“para”在希臘文中指“at the side of”，正如“parallel”是指「在另一條線的一邊」(at the side of another)。(Doxiadis, 2004) 根據他的介紹，或許我們可以暫時中譯為「敘事數學」。多夏狄斯認為這一跨領域學門乃是介於下列學門的中間地帶：數學史、數學傳記、數學認知心理學、數學哲學（譬如擬經驗論 quasi-empiricism）、思想史 (history of ideas)、歷史相關分支與科學史等等。(Doxiadis, 2004) 由此可見，這一跨學門實質上與HPM十分相近，只不過多夏狄斯似乎比較強調敘事的面向了。<sup>9</sup>

### 三、數學小說 vs. 歷史小說

我們已經利用結構主義的敘事分析方法，針對多夏狄斯的《遇見哥德巴赫猜想》和小川洋子的《博士熱愛的算式》進行細緻的比較，其中當然也論及這兩本數學小說的價值與意義。<sup>10</sup>

無論多夏狄斯或小川洋子的創作動機為何，他（她）們總是期待小說發揮某些「教育」功能，至少他們都試圖展現數學的美或數學知識的價值與意義。尤其是小川洋子的小說，一開始顯然並不著眼於科普，但是，一旦暢銷之後，<sup>11</sup>作者倒是十分積極地與數學家對談數學教育的議題。<sup>12</sup>或許我們在此應該引述其他作者的現身說法。高瑞夫、哈托許在他們的《爺爺的證明題》(*A Certain Ambiguity*, 2007) 序言指出：

我們寫這一本小說的主要目的，是想向讀者證明數學是美麗的。而且，我們也努力證明數學的深刻性對於人類真正在乎的事情之意義。我們相信通過小說的媒介，這兩個目標最容易達成。畢竟，感受到事物美的是我們人類，同時，也正因為我們是人類，才感受得到相關哲學問題的即時性。而要吸引人類進入這一圖像（世界）的不二法門，

<sup>9</sup> 其實，多夏狄斯對於數學史社群乃至於 HPM 社群看起來頗為陌生，以致於這些研究成果如何有利於「數學與敘事」，他似乎無法給予恰當的評價。

<sup>10</sup> 參考林芳玫、洪萬生，〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉。

<sup>11</sup> 截至 2008 年 5 月為止，本書在日本已經賣出二十七刷了。在台灣，則中譯本截至 2008 年 6 月為止，已經出版了十刷。

則莫過於說一個故事。(高瑞夫、哈托許, 2009, 頁 1)

既然是小說, 故事與人物當然主要是虛構的,<sup>13</sup>不過, 其中所涉及數學知識無論在小說世界還是現實世界中, 都是真實的。還有, 作者還想利用「事實的數學」(factual mathematics) 與虛構的敘事 (fictitious narrative) 之間的模糊灰色地帶, 強調數學家進行數學研究的有血有肉形象。<sup>14</sup>

再有, 《鸚鵡定理》(*The Parrot's Theorem: A Novel*) 也是一部以呈現數學史為主的數學小說。<sup>15</sup>作者居耶德 (Denis Guedj) 利用虛構的小說人物, 在合理的故事情節中, 說明某些數學史實與巴西雨林數學家被謀殺謎底之關連。其中, 作者所述及的數學史, 當然都是有憑有據的事實。

另一方面, 有一些歷史小說 (historical fiction) 的人物與主角不見得是虛構的, 譬如以愛達·洛甫萊斯 (Ada Lovelace) 為主角的《科學的新娘》(伍列, 2003), 就是有關十九世紀英國真實人物與事件的歷史小說。不過, 該書所包括的數學甚少。相反地, 以少女的蘇菲姬曼 (Sophie Germain) 為主角的 *Sophie's Diary*, 則是一點也不避諱數學論述的歷史小說。換言之, 它同時是一部歷史小說, 也是一部數學小說 (Musielak, 2005)。

根據 Alex Kasman 的網頁 <http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT>, 上面提及的歷史小說也收錄在列。其中, 就分類而言, 《爺爺的證明題》的文類 (genre) 為歷史小說、教學法 (didactic), 小說要素 (motif) 包括學院、證明定理、真實數學家 (real mathematicians)、女數學家、數學美、有趣與有用、羅曼史、數學教育, 以及宗教。《鸚鵡定理》的文類為歷史小說、神秘、奇幻 (fantasy), 以及教學法, 小說要素為真實數學家。至於 *Sophie's Diary* 的文類則是歷史小說、教學法再加上兒童文學 (children's literature), 小說要素則包括神童、真實數學家、女數學家, 以及數學教育。針對這部小說的評價, Kasman 提供了數學內容 (mathematical content) 與文學品質 (literature quality) 兩項指標, 供瀏覽者在網路上投票, 結果儘管投票人數不一, 但是, 它們的這兩項指標的平均數都在 5 級分的 4 分以上, 可見它們都是名符其實的數學小說。

由於傳記在科普作品中也十分熱門, 因此, 我們在下一節中, 也將略述數學家傳記如何可以成為科普閱讀的對象。

#### 四、數學家傳記：以科普作品為例

說故事, 尤其是說有關數學或數學家的故事, 一向都是數學教師在課堂中最受歡迎的教學插曲。有關數學家傳記如何融入數學教室活動之中, 我們必須先釐清課堂上如何可以運用數學史。大致說來, 後者可以分為三個層次, 第一, 當然就是前述的「說故事」! 然則怎麼「說」呢? 我們認為史實的「求真」固然重要, 但由於我們的目的在於數學的教與學之成效, 所以, 只要能夠提振學生的士氣與興趣, 就已經達到初步的目的了。<sup>16</sup>當然,

<sup>12</sup> 譬如她與數學家藤原正彥就曾對談數學美如何欣賞, 參考藤原與小川 (2005/2007)。

<sup>13</sup> 在《博士熱愛的算式》中, 博士、管家等人物都是虛構的, 儘管職棒投手江夏豐是一位真實的人物。相反地, 在《遇見哥德巴赫猜想》中, 派楚及其侄兒 (第一人稱) 等都是虛構的, 不過, 其中所提及的 1920 年代的偉大數學家, 則都是真實人物。

<sup>14</sup> 參考高瑞夫與哈托許 (2009), 頁 1。

<sup>15</sup> 參考洪萬生 (2009)。

<sup>16</sup> 柏林霍夫和辜維亞曾提及高斯發現等差級數求和公式的多個故事版本, 但也指出無一可以確認為真, 在這種情況下, 他們認為但說無妨, 因為每一個大同小異, 都充滿了認知的啟發性。參考柏林霍夫、辜維亞 (2008), 頁 2-3。

學生如果因此而得到人格與認知兩方面的啟發，那麼，數學史的運用價值就更高了。此外，如果可以在引入傳記的脈絡中，「從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想」，那就更是「善莫大焉」了。（洪萬生，1999）

至於數學家傳記如何具體地「融入」教學過程之中，我們不妨參考 Helena Pycior (1987) 的看法。由於 Pycior 是任教於歷史系的專業數學史家，因此，她對於「傳記」如何引進數學教室，難免比較求全。其實，要是她有機會走進數學課堂實際參與教學，她對「傳記」如何利用說不定會有「另類」的反省。換言之，一旦數學史家有了教學關懷之後，他（她）們對於數學史如何「融入」數學的教與學，或許會變得比較從容與自在才是。

事實上，Pycior 指出如何使用有三個面向值得考量：

- 使用的目的；
- 隨著目的，而選擇相關層次的傳記；
- 時時吸收最新的傳記資料。

顯然，她極力將傳記的使用目的，從娛樂提升到更高層級 — 紀念價值 (commemoration) 與數學的人性化 (humanizing)。在學生普遍畏懼、討厭數學的情勢下，將數學或數學家人性化，將有助於降低學生對數學的焦慮與冷漠，更進一步地可讓他們心中無數的挫折感得到抒發。譬如說吧，如果天縱英明的康熙皇帝都無從理解符號代數（洪萬生，1999），那麼，學生對自己的學習挫折應該比較釋然，教師再來引導或鼓勵，或許就比較容易了。

柏林霍夫 (Berlinhoff) 和辜維亞 (Gouvea) 也在他們的《溫柔數學史》(Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others) 中，提及傳記如何引進數學教室，他們針對高斯發現等差級數求和公式之故事，提出下列評論：

說這樣的故事的確有一些用處。畢竟，這是一個有趣的故事，其中有一位學生成了英雄人物，機智更勝於他的老師。這個故事本身將讓學生深感興趣，而且他們或許會記住。由於牢記在他們的記憶之中，這個故事有如一個掛鉤，可以在上面掛一個數學概念 — 在本例中，這是指算術數列的求和方法。就像大部分傳記的評論一樣，這個故事也提醒學生，有真實的人物在他們所學習的數學背後，同時，某人也必須發現這一公式，並掌握這一概念。（柏林霍夫 / 辜維亞，2008，頁 3）

他們還指出：當這一故事照一般人熟悉的方式陳述時，它可以引導班級學生自己發現公式，亦即數學的認知面向仍然至關緊要。無怪乎他們提醒讀者說：「使用歷史或傳記軼事的主要限制，經常由於他們只是略微連結到數學而已。」

根據上述有關數學家傳記如何引進教學的反思，我們在此以《不只一點瘋狂》為例，<sup>17</sup>指出作者如何將這個有關天才數學家艾狄胥的傳奇故事，說得數學不只是裝飾用的名詞而已。事實上，張海潮為本書導讀時，就已明白注意到作者在各章之間，不斷地嘗試從數學之美和數學之嚴謹，來回答何以數學對於一生漂泊的艾狄胥，具有那麼大的吸引力。從本書第二章開始，作者就依序引進畢氏定理、 $\sqrt{2}$  是無理數、歐幾里得如何證明質數無窮多、尤拉如何解決七橋問題、常態分布與機率數論，以及康托的集合論。顯然，正如張海潮所指出：「作者非常清楚，描繪 E（按：即艾狄胥的簡稱）的一生若略過數學，必然流於空泛。但是他能如此技巧地交互穿插，呈現出 E 與數學的美妙『糾葛』，使整本書毫不顯艱澀，趣味和知性並陳，可說相當周到。」（張海潮，1999）

## 五、對通識教育之啟發

現在，我們就從人格與認知啟發這兩個方面，來簡述數學小說與數學家傳記在通識教

<sup>17</sup> 有關本書之評論，可以參考王鼎勳 (2008)。有關艾狄胥，另外還有一本傳記《數字愛人》，評論可參考洪宜亭 (2008)。

育中的功能。

由於數學小說離不開數學史敘事，因此，我們或許可以先引述《溫柔數學史》一書對於歷史與故事之連結的觀點。在該書中，兩位作者柏林霍夫與辜維亞指出：

我們已經盡可能精確地反映今日被熟悉的歷史事實。然而，歷史畢竟不是嚴正科學 (exact science)，而且不完備或相互衝突的來源，在學者之間，經常導致他們針對事實的無法相容的判斷。有些有關人物與事件的故事已經演化多年，形成一種極少文獻證據支撐的「傳說」。儘管這些對於歷史學者不無困擾，然而，很多這類故事卻深具價值，它們就像每一個文化中的傳說一樣，發揮了寓言的啟發作用，或者勾起記憶的「引子」，以幫助你或你的學生記住某一個數學概念。與其完全忽視這些軼事而喪失其價值，我們不如精選最有趣的幾則納入本書相關題材，連同適當的提醒以避免過於表面的對待。(柏林霍夫、辜維亞，2008，頁2)

這一進路，當然也呼應了兩位作者的研究教學經驗，因為他們都相信數學史是大學通識階段數學課程不可缺少的一環，同時，在教師教育（含課程、教學與學習）方面，也至關重要。<sup>18</sup>

其實，在數學普及書寫方面，我們「除了觸及歷史文化脈絡與數學知識活動的相互影響之外，也希望提供一些至今仍具有意義的數學知識。歷史文化的脈絡意義，誠然一直在更新或改變，但數學知識卻歷久彌新，譬如『畢氏定理』的內容，甚至它的古典證明，也具有永恆不朽的學習價值。透過一些具體實例的呈現，我們希望可以更加「貼近」數學知識成長的歷史意義，從而凝聚出一致的科普數學書寫 (popular mathematics writing) 的主張。」(洪萬生等，2008，頁2) 換句話說，我們不僅重視歷史敘事的包裝，也注意到敘事過程中的學習認知之意義與價值。

這種針對認知意義之凸顯，在傑出數學家Barry Mazur的普及作品*Imagining Numbers*中，更是提供了敘事包裝之範例。Mazur指出本書是為下列人士而寫：「數學外行人、以及那些自從中學以來就不曾好好想過數學的人，或甚至他們即使有，但卻可能希望能經驗數學想像，並考慮這一經驗如何可以對比閱讀和理解一首詩的想像工作」。在虛數的概念發展史上，十六世紀數學家邦貝利 (Raphael Bombelli, 1526-1572) 的貢獻絕對不容忽視，這是因為他首先是將這些物件 (entity) 視為數，從而對它們進行加減乘除運算。更重要的是，他將Del Ferro-Cardano（三次方程的根式解）公式，應用在三次方程式 $x^3 = 3x - 2$ 時，無法得到實根，除非實數可以利用複數表示。於是，Mazur就虛構了一個對邦貝利的訪問，將十六世紀數學家對複數的認知，融入歷史脈絡之中。<sup>19</sup>

在本小節最後，我們打算引述《博士熱愛的算式》英譯版書末（未編頁碼）的「問題討論」(Discussion Questions)（共有11則，由英譯者 Stephen Snyder 所提供）第7、10則，以便說明像這樣的一本數學小說，如何可以應用在通識教育課堂上：

- 第7則. 1到10的總和不難求出，然而，博士堅持要根號找出特別的方法。最後，根號與管家攜手獲得答案。請問他們的解法具有主題式的重要性 (thematic

<sup>18</sup> 參考柏林霍夫 / 辜維亞，《溫柔數學史》，頁1。

<sup>19</sup> 參考 Mazur (2005), p. 154. 有關複數的歷史，非常值得參考 Nahin (1998), pp. 18-22. 又有關後書之評論，也不妨參考英家銘的評論。(英家銘，2008)。

importance) 嗎？一般來說，小川洋子如何利用數學例證來說明一個整體的世界觀 (a whole worldview)？

- 第 10 則. 小川洋子選擇書寫實際的數學問題，而不是抽象地書寫數學。在某個意義上，她邀請讀者順著書中人物學習數學。你認為她為何這樣書寫？或許這是為了增強你對這些人物的同理心？<sup>20</sup>

我們認為上述這兩個問題，多少可以指出數學與敘事如何可以關連到通識教育上了。

## 六、如何對 HPM 有用？

誠然，對於認知面向的重視，也是數學與敘事連結的一個必要提醒。這是因為故事或敘事固然可以吸引一般人對於數學文化的興趣，但是，過度花俏的裝飾可能無助於基本概念的澄清 — 所謂文勝於質，因此，Mazur 才會深以為戒。(Mazur, 2005)

不過，如果故事編得生動有趣，那麼，融入這些敘事的數學概念之教學一定可以獲得 Hans Freudenthal 所主張的「引導式的再發現 / 再發明」(guided discovery / invention) 之成效。這種適當地向歷史上的數學家或數學文本「商量」的策略 — 奠基於詮釋學雙循環模型 (Hermeneutic Twofold Circle)，在 Jahnke (1994)，Archavi & Isoda (2007) 以及洪萬生與蘇俊鴻 (2008) 的 HPM 與教師教育的研究報告中，已經可以看到一些考察的心得。另一方面，有些研究教師教育的數學教育家則利用敘事及其分析來探索教師專業成長，其中固然少不了數學認知面向，不過，其角色之建立或改變，大都與情意或信念比較相關，相關之文獻有 De Freitas (2008)、Foote (2007)、Protaankorva-Koivisto (2007) 及 Solomon & O'Neill (1998) 等等。其中，除了 Solomon & O'Neill 的論文之外，都未涉及數學史敘事，儘管它們都將敘事分析視為一種研究工具。至於 Solomon & O'Neill (1998)，則利用了漢彌頓 (William Rowan Hamilton, 1805-1865) 自己針對四元數 (quaternion) 之發現的敘事及其正式發表的論文之分析，再結合文類理論 (genre theory)，說明數學家在許多非敘事的文類 (non-narrative genres) 中作研究，並因此建立其相關的數學意義。換句話說，數學知識無法基於敘事而適當地傳遞，部份原因乃是數學經由邏輯而非時態順序 (temporary order) 以獲得知識的融貫性 (cohesion)。

儘管如此，Solomon & O'Neill 的研究結果主要針對敘事 vs. 學校數學 (school mathematics) 學習的批判與反思，這相對於我們認為「敘事數學」可以介入的教師教育與通識教育而言，應該較無影響才是。因此，如果數學普及閱讀（與評論）可以而且應該在 HPM 或通識教育中找到一個定位，那麼，數學小說這種文類，將是一個值得嘗試的選擇。

## 七、結論

從數學與敘事的對比來看，我們可以發現如何解題或推理 vs. 如何敘事的平行性，同時，就結構而言，數學與小說也呈現了令人驚奇的類比 (analogy)。此外，由於小說中的人物及其相關情節很容易被讀者認同，因此，《博士熱愛的算式》的英譯者 Stephen Snyder

<sup>20</sup> 在《博士熱愛的算式》中有四位主要的人物，管家（第一人稱）及其兒子暱稱根號，博士（因車禍受傷提早退休的數學教授）及其寡嫂。管家乃是寡嫂雇用，前來照顧博士的起居生活，根號是 10 歲男孩，放學後前來陪伴博士和媽媽。



所指出來的敘事特色（第 10 則問題）（上文第五節），可以「邀請讀者順著書中人物學習數學」。針對這一點，傑出數學家 Mazur 也希望他的著作 *A Certain Ambiguity* 能讓外行人「經驗數學想像」，他所虛構的對邦貝力的訪問，顯然是為此而設計。另一方面，在《博士熱愛的算式》的小說中，博士堅持要小男孩（名叫根號）找出特別的方法，以求得 1 到 10 的總和。這個敘事充分強調了「引導式再發現」的意義，對於我們的 HPM 甚有啟發。就學習的認知與情意兩個面向而言，數學小說比起數學家傳記顯然有了更大的揮灑空間，儘管正如 Solomon & O'Neill 所論述（上文第六節），有些數學知識由於邏輯特性，而無法基於敘事而適當傳遞。

總之，數學與敘事在教育上的應用，特別是在通識教育方面，非常值得我們大力拓展，將來一定可以回過頭來，更多方面地惠及數學教育的理論與實際。

最後，基於本文之論述，我們打算順便提供台灣師大數學系所開授的核心通識課程的實施情況，作為將來進一步探討相關主題的參考依據。

有關大學通識教育之理念及其實踐，學界論述眾說紛紜，各擅勝場，此處不須贅述。我們在此僅以台灣師範大學的核心通識領域「數學與科學思維」為論述脈絡，反思其中一門主要的課程「數學活動與思維」，如何與本文若干結論進行對話，從而提供一點實踐方面的借鑑。

有關本校之「數學與科學思維」領域，<sup>21</sup>在目標方面，希望綜合數學、物理、化學基本能力，培養學生的數量知能，並掌握自然科學的思維方式。具體而言：本領域希望 1. 引導大學生瞭解數學、物理、化學的內容、意義以及方法。2. 提供實際生活和學習相關學科方面所需的數學與科學知能。3. 介紹數學、物理、化學內涵中結構嚴謹的論證理路，以培養學生的邏輯思維。4. 瞭解數學、物理與化學的人文面向，以掌握科學中「人性」的一面。至於內涵方面，則希望從不同學科與知識層面（含後設面向），來說明科學思維與論證的實質與意義。

在這個架構下，「數學活動與思維」的課程綱要可以引述如下。<sup>22</sup>

- 教學目標：1. 疏解學生怕數學的心態，重建樂於親近數學的態度。2. 引導學生經驗數學與人文的活動與其他領域連結的活動。3. 賞析歸納、演繹與視覺推理等方法論。4. 培養數學的思維。5. 發展批判性分析的能力
- 教學內容：以中學數學知識為學習背景。強調數學的外部領域連結與數學技能的應用，深入到數學思維方法的發展。

至於上課方式，則在 97 學年第二學期至少由十位本校教授分別從數學史、問題解決的思維、自然成長的奧秘、數學哲學與美學、東方數學思維、生活邏輯、無限概念、遊戲數學（魔術方塊與納許棋）、圖案設計、數學與小說藝術、不確定性的推論與批判、旅遊與休閒數學、數學普及書籍閱讀與寫作，以及數學變換等單元，來與學生分享數學活動與思維的價值與意義。<sup>23</sup>有關評量，則除了平時上課的作業（大部分與數學有關）之外，主要是

<sup>21</sup> 參考本校通識教育中心網頁[http://www.ntnu.edu.tw/aa/aa5/sb2/sb2\\_f.htm](http://www.ntnu.edu.tw/aa/aa5/sb2/sb2_f.htm)。

<sup>22</sup> 參考本系網頁[http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general\\_edu/](http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/)。

<sup>23</sup> 這些教材及其教學，都呼應我們共同擬定的教學目標如態度（興趣與信心）、方法論（歸納與演繹）、連結（現實與文化）、問題解決（思維機制），以及溝通（批判分析），參考本系網頁[http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general\\_edu/](http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/)。



要求選課學生必須就兩本數學普及書籍，口頭並撰寫閱讀心得報告，<sup>24</sup>作為期中、期末成績評量的參考依據。<sup>25</sup>

總之，這一門課程的目標顯然是一種非常強調多元的（數學）通識，符合多元派的主張：「通識教育的出發點既然是打破狹隘專業取向，就應該在教材與教學取向上更有彈性，可以包括多元素材。」<sup>26</sup>如此一來，數學與敘事的介入，在我們的前述的討論中，無論是數學小說、歷史小說或傳記，都可以成為極佳的教材，引動或激發學生的認知或情意面向，而有機會深刻體會即使是職業作家所撰寫的數學小說或數學家傳記，都可以成為參與數學思維的一個引子，因此，數學與敘事的結合不僅在數學教育研究中有其重要性，它在HPM或通識教育中的功能，也不容忽視。

## 參考書目

### (一) 數學小說文本

- 小川洋子 (Yoko Ogawa)(2003). 《博士の愛した数式》。東京：新潮社。
- 小川洋子 (2004). 《博士熱愛的算式》(王蘊潔翻譯)。台北：麥田出版社。
- 多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) (2002). 《遇見哥德巴赫猜想》(*Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*)(王維妮譯)。台北：小知堂出版社。
- 居耶德 (Denis Guedj). 《鸚鵡定理：跨越兩千年的數學之旅》(漢斯中譯，洪萬生審訂推薦)，台北：究竟出版社。
- 伍列 (Benjamin Woolley) (2003). 《科學的新娘》(*The Bride of Science: Romance, Reason and Byron's Daughter*) (席玉蘋中譯)，台北：台灣商務印書館。
- 高瑞夫 (Gaurav Suri) 與哈托許 (Hartosh Singh Bal) 合著 (2009). 《爺爺的證明題》(*A Certain Ambiguity*) (洪萬生、洪贊天、林倉億合譯)，台北：博雅書屋。
- Doxiadis, Apostolos (2000 / 2001). *Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*. London: Faber & Faber Limited.
- Guedj, Denis (2000). *The Parrot's Theorem: A Novel*. London: Weidenfeld & Nicolson.
- Musielak, Dora (2005). *Sophie's Diary*. Bloomington, IN: AuthorHouse.
- Ogawa, Yoko (trans. by Stephen Snyder) (2009). *The Housekeeper and the Professor*. New York: Picardo.
- Suri, Gaurav & Hartoosh Singh Bal (2007). *A Certain Ambiguity: A Mathematical Novel*. New Jersey: Princeton University Press.

### (二) 論述

- 王鼎勳 (2008). 評論《不只一點瘋狂—天才數學家艾狄胥傳奇》，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 林芳玫 (未刊稿). 〈媒體素養教育與通識教育：台文所脈絡下的文學教學〉。
- 林芳玫、洪萬生 (投稿中). 〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉

<sup>24</sup> 撰寫時可以參考我們提供的「優秀數學普及書籍指標」，參考本系網頁 [http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general\\_edu/](http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/)。

<sup>25</sup> 有關的評分標準也相當規格化。參見本系網頁 [http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general\\_edu/](http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/)。

<sup>26</sup> 林芳玫將黃俊傑所歸類的通識教育理念之四種主張，如精義論、均衡論、進步論和多元論，簡化為經典派與多元派，參考林芳玫，〈媒體素養教育與通識教育：台文所脈絡下的文學教學〉(未刊稿)。

- 洪宜亭 (2008).〈評論《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生 (1999a).〈康熙皇帝與符號代數〉，《HPM 台北通訊》2(1): 1-3
- 洪萬生 (1999b).〈HPM 隨筆(二)：數學史與數學的教與學〉，《HPM 台北通訊》2(4): 1-3
- 洪萬生 (2006).〈中算史中的「張本例」(generic examples)〉，收入洪萬生，《此零非比0》(台北：台灣商務印書館，2006)，頁 190-193。
- 洪萬生 (2008).〈遇見哥德巴赫：數學天才的困境〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生 (2009).〈從希爾伯特《幾何學基礎》看形式主義〉，台灣數學博物館「數理文本解析與導讀」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏 (2008).《當數學遇見文化》，台北：三民書局。
- 洪萬生、蘇俊鴻 (2007).〈海龍 (Heron) 公式怎麼教？一個HPM的插曲〉，《Journal of Basic Education》(《基礎教育學報》) (Hong Kong) 16(1): 81-96。
- 洪萬生、蘇俊鴻 (2008).〈利用HPM來概念化數學教師教育：以畢氏定理和餘弦定律之統整為例〉，「數學教育研討會 2008：數學思考和解題」，香港教育學院，2008/4/29-30。
- 洪萬生 (2009).〈鸚鵡定理〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 英家銘 (2008).〈虛話實說：根號-1 的故事〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 波利亞 (George Polya) (2007).《怎樣解題》(蔡坤憲中譯)，台北：天下文化出版公司。
- 張海潮 (1999).〈造次必於是，顛沛必於是〉，布魯斯·柴斯特《不只一點瘋狂》(中譯本)「導讀」(台北：究竟出版社)，頁 7-10。
- 單維彰 (2008).〈記憶著愛情的數學等式〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 藤原正彥 (Masahiko Fujiwara) 與小川洋子 (Yoko Ogawa) (2005/2007).《世にも美しい數學入門》，東京：筑摩書房。
- 蘇惠玉 (2006).〈溫柔與感傷的數學真理－閱讀《博士熱愛的算式》〉，《HPM通訊》9(6): 19-20。
- 比爾·柏林霍夫 (William P. Berlinghoff) /佛南度·辜維亞 (Fernando Q. Gouvea) (2008).《溫柔數學史》(Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others) (洪萬生、英家銘暨HPM團隊合譯)，台北：博雅書屋。
- 布魯斯·柴斯特 (Bruce Schechter) (1999).《不只一點瘋狂》(My Brain is Open: The Mathematical Journey of Paul Erdos)，台北：究竟出版社。
- 保羅·霍夫曼 (Paul Hoffman) (2001).《數字愛人：數學奇才艾狄胥的故事》(The Man Who Loved Only Numbers)，台北：臺灣商務印書館。
- Arcavi, Abraham, Masami Isoda (2007). "Learning to Listen: From historical sources to classroom", *Educational Studies in Mathematics* 66: 111-129.
- Barry, P. 1995. *Beginning Theory: An Introduction to Literary and Cultural Theory*. Manchester: Manchester University Press.
- Barthes, R. 1977. "Introduction to the Structural Analysis of Narrative." In *Image-Music-Text*. Trans. By Stephen Heath. New York: Hill and Wang, 79-124.
- Burton, L. 1996. "Mathematics, and Its Learning, as Narrative – a Literacy for the Twenty-First Century", in D. Barker, J. Clay and C. Fox (eds.) *Challenging Ways of Knowing in English*,

- Maths and Science*. Sussex: Falmer.
- Campbell, J. (1972). *The Hero with a Thousand Faces*. Princeton, NJ: Bollingen.
- Doxiadis, Apostolos (2001). "Euclid's Poetics: An examination of the similarity between narrative and proof", Lecture given at the Mathematics and Culture Conference, Venice, April, 2001. On <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Doxiadis, Apostolos (2004). "The Mystery of the Black Knight's Noetherian Ring", a keynote speech to the Fields *Symposium on Online mathematical investigation as a narrative experience*. University of Western Ontario, 11-13 June. 刊  
<http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Doxiadis, Apostolos (2008). "The Mathematics Logic of Narrative", on <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>. A preprint to appear in Mirella Manaresi (Eds.), *Mathematics and Culture in Europe*.
- Jahnke, Hans Niels (1994). "The historical dimension of mathematical understanding: objectifying the subjective". *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference for the PME* vol. I (pp. 139-156). Lisbon: University of Lisbon.
- Lin, Fang-Mei & Wann-Sheng Horng (2009). "Book review of The Housekeeper and the Professor by Yoko Ogawa", *Mathematical Intelligencer* online 31 October.
- Mazur, Barry (2003). *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*. Allen Lane The Penguin Books.
- Mazur, Barry (2005). "'Eureka' and the Other Stories", June 29 on <http://thalesandfriends.org>
- Nahin, Paul J. (1998). *An Imaginary Tale, The Story of  $\sqrt{-1}$* . NJ: Princeton University Press.
- O'Neill, John 1993. "Intertextual Reference in Nineteenth Century Mathematics". *Science in Context* 6: 435-468.
- Piaget, J. 1968. *Structuralism*. Trans. by Chaninah Maschler. Paris: Universities of France Press.
- Portaankorva-Koivisto, Paivi (2007). "On the Way to Becoming a Mathematics Teacher – on the track of phenomenological mathematics", The 3<sup>rd</sup> Tampere Conference on NARRATIVE: Knowing, living, Telling. June 27-30, Tampere, Finland. On <http://uta.fi/conference/3narrative/abstracts/portaankorva-koivisto.htm>. 2008/12/30.
- Propp, V. (1968). *Morphology of the Folktale*. Austin, TX: University of Texas Press.
- Pycior, Helena (1987). "Biography in the Mathematics Classroom", Ivor Grattan-Guinness (Ed.) (1987), *History in Mathematics Education* (Paris: Berlin), pp. 170-186.
- Solomon Yvette, John O'Neill (1998). "Mathematics and Narrative", *Language and Education* Vol. 12, No. 3: 210-221.
- Thomas, R. S. D. 2002. "Mathematics and Narrative." *The Mathematical Intelligencer* 24(3): 43-46.
- (三) 網路資源
- 台灣數學博物館：<http://museum.math.ntnu.edu.tw>
- 《HPM通訊》：<http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng>
- Alex Kasman: <http://www.cofc.edu/~kasmana/MATHFICT/>
- Apostolos Doxiadis: <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Thales and Friends: [http://thalesandfriends.org/en/index.php?option=com\\_frontpage&Itemid=85](http://thalesandfriends.org/en/index.php?option=com_frontpage&Itemid=85)

## 《博士熱愛的算式》「問題討論」11 則

洪萬生

台師大數學系

小川洋子的《博士熱愛的算式》英譯版 (*The Housekeeper and the Professor*, 2009) 書末 (未編頁碼) 有 11 則「問題討論」(Discussion Questions), 由英譯者 Stephen Snyder 教授 (專長日文) 所提供, 是極為深刻的問題, 可以測試讀者閱讀此一數學小說的心得。茲先中譯轉述如下:

第 1 則: 本書中的角色都沒有名字 (根號只是一個暱稱)。當作者選擇在她的書中不給名字, 這是什麼意思? 身為一位讀者, 這會改變你與他們的關係嗎? 名字真有那麼重要嗎?

第 2 則: 想像你是一位作家, 發展 (或創造) 一個只擁有 80 分鐘短程記憶的角色。你將如何處理那個角色十分明確的事項, 譬如他的工作、他的友誼關係, 以及他如何照顧自己? 討論本書中小川所想像的某些頗富創意的方式—從博士外套別上的紙片到他每天早上感受的 (記憶歸零) 哀傷。

第 3 則: 當根號和管家成長並向前行進時, 博士留在原地不動 (事實上, 他在退化之中, 向後退)。不過, 他們三人的鏈結關係卻是與日俱增。這種看起來是單邊的關係如何可能滋長呢? 小川針對記憶和我們最深刻的關係究竟說了些什麼?

第 4 則: 博士告訴管家:「數學基於它的絕對性與無矛盾, 已經證明了上帝的存在; 然而, 魔鬼也必定存在, 因為我們無法證明它。」這一吊詭也可以應用到數學以外的其他任何事物嗎? 或許記憶? 愛?

第 5 則: 管家的父親在她出生前就拋棄了她的母親; 然後, 管家在懷根號時也重蹈了此一覆轍。在這樣一本所有家庭 (包括博士自己) 都破碎的小說中, 你認為小川如何敘述家庭的組成? 事實上, 我們所有人都有成為一個家庭的一份子的基本願望? 你會在意那是由誰所構成的嗎?

第 6 則: 當你瞭解到博士與他的寡嫂的「不倫戀」時, 會不會改變你對他的看法? 在管家與博士之間, 你是否察覺到任何羅曼史的張力? 或者他們的關係是純潔的? 或許小川根有意含混 (intending ambiguity)?

第 7 則: 1 到 10 的總和不難求出, 然而, 博士堅持要根號找出特別的方法。最後, 根號與管家攜手獲得答案。請問他們的解法具有主題式的重要性 (thematic importance) 嗎? 一般來說, 小川洋子如何利用數學例證來說明一個整體的世界觀 (a whole worldview)?

第 8 則: 棒球是一個充滿統計學的遊戲, 因而也包含了一堆數目。討論根號和博士兩人喜好此一遊戲的迥異方式。

第 9 則: 在本小說中, 小川如何描繪當代日本文化? 在哪些方面它看起來迥異於西方文化? 例如, 考慮管家的懷孕及其單親媽媽的身份; 或者也許注意此一故事的簡單細節, 譬如根號的生日蛋糕。在哪些方面這兩種文化類似? 相異?



第 10 則：小川洋子選擇書寫實際的數學問題，而不是抽象地書寫數學。在某個意義上，她邀請讀者順著書中人物學習數學。你認為她為何這樣書寫？或許這是為了增強你對這些人物的同理心？

第 11 則：數目在本書的結構中是否負載任何意義？考慮本書有 11 章之事實。所有事物都可以量化嗎？又，所有數目都充滿了詩意的可能性 (poetic possibility) ？

在此，我只針對上述第 7 則問題，轉述本小說的一些相關情節，藉以指出閱讀數學小說所期待的文理雙重素養（請注意本小說之第一人稱是管家，而根號則是她的兒子的暱稱）。至於如何回答，那就各憑讀者的理解與想像了。

「我有個想法……」根號突然說道。

「1 到 10 中，只有 10 這個數字不太合群。」

「為什麼？」

「因為，只有 10 是二位數。」

他說得一點都沒錯。雖然我嘗試過很多種數字的分類方法，但從來沒有注意到這個性質與眾不同的數字。

我重新看著十個數字，因為太懊惱自己為甚麼以前沒有注意到這一點，就覺得 10 這個數字特別礙眼 — 只有 10 這個數字無法一筆寫完。

「如果沒有 10，就可以決定中間的位置，心裡就爽快多了。」

「什麼中間的位置？」

「上次你沒來參加教學觀摩，所以不知道。還是最拿手的體育課呢。上體育課時，老師命令『各排，向中間靠攏』時，每一排最終地人就會舉起手，整隊的人向他靠攏。九個人一排時，第五個人就是最中間，但如果十個人一排，就傷腦筋了。多一個人，就決定不了中間的位置。」

我把 10 寫在角落，將 1 到 9 寫成一排，並在 5 上畫了圈。

毫無疑問，5 成為這九個數字的中心。前面有四個數字，後面也有四個數字追隨著。5 昂首挺胸，自豪地向空中伸出雙手，似乎在向世人宣告，自己才是正確的目標。

那一刻，是我有生以來第一次體會到不可思議的一刻。在被無情踐踏的沙漠中，隨著一這清風吹來，眼前出現了一條筆直的道路。道路的前方發光，引導著我前進。那是一種令人情不自禁想要踏出那一步、使自己浸淫其中的光芒。我知道，我正在接受「靈感」的祝福。

## 更正啟事



上期於〈重溫吳先生關於現代畫家對古代數學家造像問題的教誨〉中所提左衽與右衽更正如圖。

## 《博士熱愛的算式》書評

許進發翻譯整理

三宮麻由子，〈文字の向こうに 第六回 「博士の愛した數式」=存在肯定に基づく真の心の開放〉，《文學界》第62卷第6號，2008年6月，頁304-311。

本書有兩個主題，其一為純真潔白的世界，其二為敞開內心，不僅女佣人及其子單方面接納博士，博士也以其有限的溝通能力，竭力地向二人敞開內心，為忘我的無償之愛所籠罩。

宅邸的獨屋，悲傷般地鴉雀無聲。老人的心在何處？無法想像。唯一的解救方法，即是抓住對話的開端，自身搭話。此一唯一的解救方式，正是聯繫貫穿本書敞開真心的重要開端。

對於沒有尋求記憶開端的博士而言，與人會話的唯一手段為「數學講道」。女佣人的秉賦，使她自己決定以此為博士的語言而接納。

博士常當作話題者，有諸如素（質）數、（因數和成為數本身的）完全數、（因數和成為相互數的）友愛數（Amicable Number）等。在數學世界之中，這些早已是古希臘時代發現的基礎知識，任何一者乃為初級謎語般程度的概念。女佣人雖然討厭數學，且只有高中肄業程度，但與博士的話題只有數學，諸多會話始終圍繞著數學打轉。譬如220和284兩者的友愛數，對於博士乃是不可思議的有趣。

另一方面，小川洋子顯然以觸感表現素（質）數的意象。不過，筆者認為僅有自然數在所有顏色中皆能見得。1為青色，2為薄紅色，3為近於粉紅的紅色，4為白色或淡青色，5為帶綠的青色，6為無色或綠色，7為鮮明的青色，8為黃色，9為淡紅色，而且0為天藍色。近於觸感的意象，清晰地以色彩的方式反映。但如果成為小數點，則所有數字成為無色，小數點以下的數字也失去顏色。

然則數學記號又為何？ $x$ 為比8略薄的黃色， $y$ 為與4相同的黃色， $n$ 為近3的紅色， $\pi$ 為比5近綠的青色， $i$ 為淡紅色。不過，算式並非如彩虹般以色彩可以見得。

解題時間中窺見的數字世界，乃是某種神的世界。小川洋子也使用「天書」一詞，但是，數字織成的宇宙，直覺和理論合唱，宛如文藝復興時代Polyphony（複音音樂）的勻稱而產生的平靜世界。

此一故事真正動人之處，則為女佣人兒子Root登場之後。博士知道新的女佣人將年幼兒子獨自一人放在家中而準備自己晚餐時，即吩咐她明天帶來此處。對於未曾謀面少年的關愛，則是任何人也無法想像的程度。博士給平頭少年取綽號為Root（根號），在八十分鐘單位的記憶中，累積友情。儘管博士與Root二人老少關係，由於博士80分鐘記憶容量的因素，總是回到每日初會面時刻，但是，二人友情日益加深。為了不傷害博士，1970年代阪神虎隊江夏豐被交換和離去棒壇之事皆未觸及，以仍為現役的前提而交談。乍見之下，似乎全面性地接納博士，此為真實。讀至此處，則會憶起遠藤周作的〈おバカさん〉（Wonderful Fool／愚人），描述法國人Gaston Bonaparte在異國宣揚愛與和平而喪命的故事，以及電影〈兩人〉（Rain Man），述說自閉症的兄長與弟弟二人的情誼。

海倫凱勒（Helen Keller）克服三重障礙，其偉大事業如無Sullivan老師的存在就無法獲得，乃是定論。Sullivan老師全面地接受海倫的存在與生活方式。如無其接納，則優秀的成就無從實現。

另一方面，筆者想站在被接受協助者的立場。博士、Gaston、Rain Man皆對予以接受的人，給與全面信賴而前進。但同時他們自己也接納理解者的存在，這種特殊的作法，正



是向人全然敞開內心。若說何者為先？自然是無障礙理解者一方較早接納，被幫助者理解此一情況，從信賴其人的時刻開始，則被幫助者的接納也開始。而且所謂接納，並非單是對方的「中意」，而是敞開內心與對方正面相對。這種不是成為“**Yesman**”（唯命是從的人）而開啟，而是判斷對方必要之事，且正確地傳遞，建立共同付諸行動的信賴關係。雖然雙方之間或許有某種差異，在某處忘記差異而以同樣視線互相敞開胸襟的決心和共通項，則是一定要有的必要條件。相對地，僅為嬌媚的愛情及單方面的同情，當然有所不足。

譬如說吧，在博士這一方面，即使是完全數、友愛數般的初級言語，基於與女傭人母子認真地對談，或者協助 **Root** 的家庭作業，不但是數學反而是「算術」充分地花費時間，由此對母子敞開內心。決非「下令而啟動」，而是以一個人的人格給與能給與事物，由此而與母子對話。還有，在算術解題的互動之中，筆者認為該事對博士而言，也是「接納」，即是「敞開內心」。

然而，小川洋子對於博士如此日日快活，奇蹟式治好博士記憶殘障的小技藝，並無任何作為。殘障始終冷酷地對博士計時。但是，**Root** 對博士全面地敞開內心，博士的思緒全部「毫無遺漏地感覺」。而且「以當然的表情應付，沒察覺也不會做得過度。由博士給與自己之事物，抱持尊敬的感謝！」博士一定察知 **Root** 的情緒。接納女傭人母子的存在，特別是堅信 **Root** 的信賴，博士明顯地出現如下的變化：

「他已經不講話了。吞下一口氣，只將檸檬切成花狀，混合醋和油，變成乳白色，即挺身而出，將熱氣上升的炒蛋排列在吧台，流露嘆氣之聲。」

（中略）

「何處有趣？僅有料理！」

「喜歡妳做料理的姿態。」

談起殘留在博士記憶中的大嫂，並未接納他的記憶殘障，心中的糾葛仍然持續。因此，儘管對博士的愛情深入，但表面上則是冷淡地對待。博士也充分理解此點。在此種日子中突然出現新的女傭人，純樸地被數字美所感動，與她同時出現的 **Root**，也與母親具有同樣透明的純樸，以及信賴別人的能力。博士喜悅地說道「像我這般的人也寄予信賴。」博士由此種喜悅起，不久在內心抱持對淡淡戀情和母親存在思慕無法企及的思緒，對親切的女傭人，不由得說出實話「喜歡妳做料理的姿態」。

縱然記憶不持續，而且數學以外的事情無法對話，博士的內心無限地健全清澈。最後從自己的領域踏出一步，佇立於女傭人領育域的料理世界的入口，對於至今恐怕一次也沒表示興趣的料理的有趣，得以誠實地表現好奇心。

女傭人料理的香味，或許使博士湧起食慾，食慾的直接感覺，對於博士而言，或許是久違的事情。博士長期以來，專心致力於數學問題，逃離記憶障害的現實環境，早已忘記食慾般的慾望。

筆者認為封閉內心者，無寧為博士的大嫂。大嫂陸續解雇女傭人，與博士不對話，並未與社會產生關係而享受人生。此種現象並非大嫂所期盼，而是要如同 **Root** 們與博士友好，快樂地過日子。然而，她既未接納博士的殘障，且同時對博士的愛情深入的關係，內心終於封閉，只能重覆冷淡的舉止。大嫂實際比博士抱持嚴重的內心黑暗面，為了克服此點，則不得不具有敞開內心的想法。關於肯定包含殘障的存在，家屬和親戚過於接近本人，無法順利。大嫂的情況，就是典型。

三人之間，伴隨著內心的開放，產生「包含自己存在的肯定」。

博士關於自己的記憶，一切不語。然而，博士決定讓 **Root** 來自家房屋時，首次清楚地提及自己的殘障，且未忘記約定。此種情形，乃是肯定自己的存在，而且基於此點的自然行動。

博士受惠於從內心給予自我肯定的朋友們，即是女傭人母子。女傭人離職後，**Root** 前

往會見博士時，大嫂呼叫女傭人且追問是否為了財產而派遣兒子？女傭人毅然回答：

「不由於是朋友嗎？」

(中略)

「小叔沒有友人，一次來訪友人的例子，沒有。」

「若是如此，我和 Root 就是最早的友人了。」

此時博士順口說出「不要為難小孩」，放下寫有 Euler 公式  $e^{\pi} + 1 = 0$  (即博士熱愛的算式) 的紙片就離開房間。以此為機緣，事態呈現急轉直下的逆轉情形，故事邁向快樂的結束。博士和大嫂的內心，終於出現大爆炸 (Big Bang)。

雖然博士乍見之下，逃避於遠離世俗的數學美，忘記記憶障害，但實質上有如 Euler 公式，擁有實體的內心。正是如此，至此得以開放內心。而且有實體的內心，由此一公式初次表露。

筆者考量此種事情，將博士和親子的時間嘗試化為公式：

$$n(\sqrt{n} + 80) = 1$$

三人以小孩 Root 為中心，以八十分為單位，重覆無限時間  $n$ ，開啟無限大的可能性。比起算式，無寧是謎題。從數學定義言之，則此種「翻譯」是胡鬧。僅僅以數學語彙嘗試描述嵌入對博士和親子內心的稱讚而在其中流動的寶石般時間。

縱然有任何困難，敞開內心或許是對於所有試煉的解決方法的鎖鑰。這件作品，乃是給予那種希望的「開放的公式」。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。[投稿請e-mail至 suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)、李佳燁 (東京大學)

英國劍橋：英家銘 (李約瑟研究所)

基隆市：許文璋 (南榮國中)

台北市：楊淑芬 (松山高中) 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍 (成功高中) 蘇俊鴻 (北一女中)

陳啟文 (中山女高) 蘇惠玉 (西松高中) 蕭文俊 (中崙高中) 郭慶章 (建國中學) 李秀卿 (景美女中)

王錫熙 (三民國中) 謝佩珍、葉和文 (百齡高中) 彭良禎 (麗山高中) 邱靜如 (實踐國中)

郭守德 (大安高工) 張瑄方 (永春高中) 張美玲 (景興國中) 黃俊才 (麗山國中) 文宏元 (金歐女中)

林裕意 (開平中學) 林壽福 (興雅國中)、傅聖國 (健康國小) 李素幸 (雙園國中) 程麗娟 (民生國中)

台北縣：顏志成 (新莊高中) 陳鳳珠 (中正國中) 黃清揚 (福和國中) 董芳成 (海山高中) 林晏志 (錦和中學)

孫梅茵 (海山高工) 周宗奎 (清水中學) 莊嘉玲 (林口高中) 王鼎勳、吳建任 (樹林中學)

陳玉芬 (明德高中) 羅春暉 (二重國小) 賴素貞 (瑞芳高工) 楊淑玲 (義學國中)

宜蘭縣：陳敏皓 (蘭陽女中) 吳秉鴻 (國華國中) 林肯輝 (羅東國中)

桃園縣：許雪珍 (陽明高中) 王文珮 (青溪國中) 陳威南 (平鎮中學) 洪宜亭 (內壢高中) 鐘啟哲 (武漢國中)

徐梅芳 (新坡國中) 郭志輝 (內壢高中) 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏 (東安國中) 陳春廷 (楊光國民中)

小學) 葉吉海 (陽明高中)

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷 (竹北高中)、洪正川 (新竹高商)

苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)

台中縣：洪秀敏 (豐原高中)

台中市：阮錫琦 (西苑高中)

嘉義市：謝三寶 (嘉義高工) 郭夢瑤 (嘉義高中)

台南市：林倉億 (台南一中) 劉天祥 邱靜如 (台南二中)

台南縣：李建宗 (北門高工)

高雄市：廖惠儀 (大仁國中) 歐士福 (前金國中)

屏東縣：陳冠良 (枋寮高中) 楊瓊茹 (屏東高中) 陳建蒼 (潮州高中)

澎湖縣：何嘉祥 (馬公高中)

金門：楊玉星 (金城中學) 張復凱 (金門高中)

馬祖：王連發 (馬祖高中)

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！