

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）  
 助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第十卷 第一期 目錄 (2007年元月)

- ▣ 好個阿基米德—數學科普的新猷
- ▣ 漢英對照《四元玉鑿》出版
- ▣ 〈貼近《幾何原本》與 HPM 的啓示：以「驢橋定理」證明為例〉之閱讀心得
- ▣ 新書介紹：《77 個好玩得停不下來的數學謎題》
- ▣ 新書介紹《此零非彼 0—數學、文化、歷史與教育論文集》
- ▣ 『一筆畫問題』教案設計

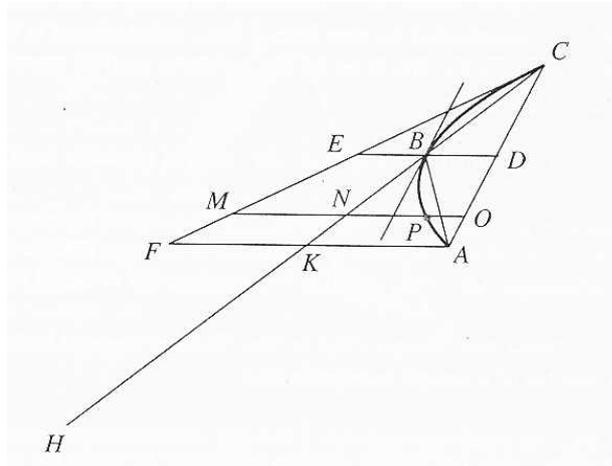
## 好個阿基米德—數學科普的新猷

台灣師大數學系 洪萬生教授

數學家斯坦 (Sherman Stein) 的科普新作《阿基米德幹了什麼事!》(Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?), 是一本兼具古典味與現代感的好書。難得作者在出版了幾本科普之後, 還沒有江郎才盡, 這一現象對於有志於科普寫作或評論者來說, 非常值得深入瞭解。

我仔細閱讀本書, 緣自 2006 年秋季講授大四『數學史』課程中的阿基米德。為了讓選修學生容易了解他有關拋物線截區的研究成果, 我參考本書的第七章(〈拋物線〉)及「附錄 A」。阿基米德利用力學方法『發現』拋物線截區面積 (section of parabola) 時, 根據了兩個有關拋物線性質的定理:

1.  $MO/OP = CA/AO$ ;
2.  $BD = DE/2$



其中, 這些線段都請參見上圖。如果我們遵循阿基米德的原方式去證明, 則相當難以理解。於是, 斯坦改弦更轍, 特別在「附錄 A」中, 引進現代的仿射映射 (affine mapping), 他除了證明前述兩個定理 (參見其中的習題 21, 22) 之外, 還相當有系統地介紹了仿射映射與拋物線的關係。因此, 如果喜愛數學的讀者尚未習慣歷史的取向以品味阿基米德, 那

麼，好好地研讀「附錄 A」，絕對值回票價。

有了「附錄 A」，本書為讀者在相當熟悉的這個古典數學史題材之外，添加了難得一見的新意。忠實於歷史原味，誠然是史家的技藝與規範，這對於科普的書寫而言，有時卻是不可承受之重。因此，適當的剪裁或改寫，的確是向數學史取經的不二法門。事實上，保留歷史建築的骨架，添加現代的材料，也不失為一種保存文化資產的方法，這當然也呼應了史家 Ivor Grattan-Guinness 有關數學史也是一種文化資產 (cultural heritage) 的說法。此外，通過相關數學知識的掌握，我們也得以更深刻地與阿基米德對話。如此說來，誠如斯坦所說的，即使「阿基米德並不知道有仿射映射這東西，但是有一個現代形式的證明總比沒有好。」

總之，本書包括了好幾個重要的面向，如數學史的文化意義、歷史認識論 (historical epistemology) 及數學知識本身，同時又能夠統整於一體之架構。作者斯坦在論述每一個題材時，總是自問：「這個論述的核心是什麼樣的數學？是哪一種永恆的寶石，能夠超越一代又一代的噱頭與時尚？」是的，合宜的問題意識，以及恰到好處的現代化處理，讓作者得以從容出入今古現場，為古典的阿基米德找到一個現代的恰當位置。數學科普如何推陳出新，如何永續經營，本書顯然樹立了一個典範，值得吾輩效法。

最後，有一個問題作者無暇觸及，那就是：「凡拋物線皆相似」之事實，也很容易從「拋物線作為一種圓錐截痕」 (sections of a cone) 來確認。事實上，阿基米德也曾研究過圓錐曲線 (conic sections) (只是沒有像阿波羅尼斯 (Apollonius) 那麼系統化)，本書無暇顧及，讀來未免讓人意猶未盡，實在有一點可惜。不過，如此一來，橢圓是否也可以類比處理呢，恐怕是另一個棘手的問題吧！

#### 參考文獻

- Grattan-Guinness, Ivor (2006). "On Certain Somewhat Neglected Features of the History of Mathematics", *Archives Internationales D'Histoire des Sciences*, pp.384-402.
- Stein, Sherman (1999). *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington, DC: MAA.
- 斯坦 (2004). 《阿基米德幹了什麼好事！》，台北：天下文化。
- 陳鳳珠 (2000). 〈偉大數學家阿基米德的想法〉，《HPM通訊》第三卷第五期。

## 漢英對照《四元玉鑒》出版

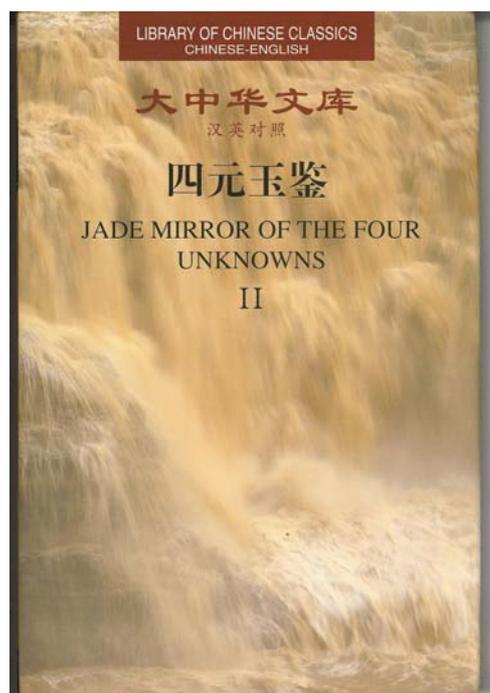
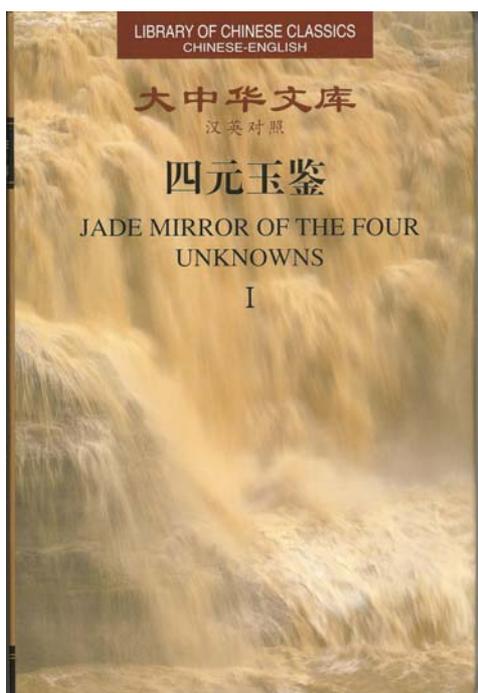
中國科學院自然科學史研究所 郭書春教授

漢英對照本《四元玉鑒》(*Jade Mirror of the Four Unknowns*) 於 2006 年 7 月由遼寧教育出版社出版。全書分兩冊，595 頁。

《四元玉鑒》三卷，元朱世傑著，1303 年刻於揚州，是宋元數學高潮最後一部重要著作，也是中國傳統數學水準最高的一部著作。全書凡 24 門，288 問。卷首是今古開方會要之圖等四種圖，以及以四個題目示範天元術、二元術、三元術、四元術的解法的四象細草假令之圖。提出『四元術』即多元高次方程組解法，將高階等差級數求和問題和高次招差法發展到相當成熟的程度，是《四元玉鑒》的主要成就，都超前其他文化傳統幾個世紀，對現代數學研究與教學仍有啓迪意義。

朱世傑，字漢卿，號松庭，燕（一作燕山，今北京或其附近地區）人，生平不詳。他在元統一中國後，『以數學名家周遊湖海二十餘年』，汲取當時南北長江下游和太行山兩側這兩個數學中心的長處，登上中國傳統數學的最高峰，是一位中國歷史上少見的職業數學家 and 數學教育家。他還著有《算學啓蒙》三卷。

漢英對照本《四元玉鑒》是《大中華文庫》的一部，包括《四元玉鑒》本文、現代漢語譯文、英語譯文、注釋等部分。《四元玉鑒》本文前載郭書春、郭金海撰寫的前言，以及陳在新撰寫的序和導言。其本文以丁取忠光緒二年（1876 年）在羅士琳校勘基礎上的重校本為底本，由郭書春譯成現代漢語；其英文部分則採用了中國科學院自然科學史研究所圖書館館藏陳在新（1877--1945）的英譯稿。陳在新是燕京大學數學系主任。他留美期間，在著名數學史家史密斯（D. E. Smith, 1860~1944）的鼓勵支持下翻譯《四元玉鑒》，修改中還得到在燕京大學數學系任教的寇恩慈（E. L. Konantz）教授的幫助，大約在 1925 年底完成。譯稿受到著名科學史家薩頓（George Sarton, 1884-1956）的好評，兩次推薦出版，但始終未果。這次由郭金海整理，並補譯了缺失的部分題目的譯文。美國 Joseph W. Dauben（道本周）教授潤色了郭書春、郭金海的『前言』的英譯稿。



## 〈貼近《幾何原本》與 HPM 的啟示：以「驢橋定理」證明為例〉之閱讀心得

台師大數學系碩士班研究生 黃俊瑋

在《此零非彼 0》一書中，有許值得推薦並令人回味與回憶無窮的好篇章，其中看完〈貼近《幾何原本》與 HPM 的啟示：以「驢橋定理」證明為例〉一篇，令筆者回想起許多在過去學習上的經驗與反思。本文中作者提及現今中學教師與學生對於證明『驢橋定理』的邏輯謬誤。對於「驢橋定理」：等腰三角形兩底角相等的證明，一般中學教師的教學方法和一般人的想法多以：(1) 作頂角平分線、(2) 作頂點與底邊中點的連線(作三角形之中線)、(3) 頂點向底邊作垂線等輔助線的方式來證明本定理，然在不曾貼近原典《幾何原本》的情況下，殊不知當我們將以上三種作法追根究底後，卻都是依賴我們所欲證明的驢橋定理才得以證明，也就是我們犯了循環論證之基本邏輯謬誤而不知。

說到「循環論證」，筆者猶記大二那年學習高等微積分時所遭遇的瓶頸，即當時在已順利修習了大一整年的數學科目的背景之下，對於數學證明之中邏輯順序的重要性，已有相當的了解與認識。然而，當時為避免自己的證明過程發生循環論證的情形，所以，每當嘗試進行數學定理或習題的證明，卻開始變得礙手礙腳，陷入泥淖當中，寸步難行，總是不知道哪些定理、哪些條件或者哪些性質是當下可以使用的工具，又哪些定理與性質是依賴於所欲證明的定理而無法使用。於是，好一陣子，對於數學證明感到害怕與莫名的恐懼，無從下手。久之，惡性循環地造成諸多學習上的困擾與阻礙，始終無法突破。

直至後來，才漸漸開始了解與領悟，這種現象的發生，可歸因於自己不曾對於相關理論發展脈絡進行深入了解，不曾追根究底地反思數學家們對於數學知識與數學定理如何發展與推演，於是乎只學到了定理與定義的表象，只是記(背)了上課筆記中的許多定理與性質，還有片段和零碎的證明，然而忽略了數學理論背後，有結構有系統的推演過程。無法從高觀點，全盤地掌握知識的全貌，甚為可惜，同時，這也頗值得往後學習者之借鏡。這說明了貼近第一手文本的脈絡與思考理路，對於學習與了解一門學問的重要性與必要性。

本文也收錄了洪老師在其數學史的課堂上，提供大四準數學教師們的對於此定理證明進行自我解嘲與反思時，所得到的許多回饋與回響。從中，我們可多了解來自於諸位準教師們所提出的不同觀點，以及不同教育哲學與數學觀。前一陣子，筆者在課堂上也突發奇想地昭告懸賞學生，提供『等腰三角形兩底角相等』的證明方法，不管是自助或人助皆可，同時，也帶有挑戰各大名師的意味。學生們都興致勃勃地自己動手、翻閱參考書、求助家

教老師或者補習班的『名師』們，幾天內許多學生紛紛興高采烈地來求賞，言語中並透露：這證明並不是想像中的難嘛！然，所有的方法，無一倖免地都使用了作中線、中垂線或者角平分線作為輔助線。可見，多數站在第一線的教師們或者補教界的「大師」們，並不曾貼近文本，深入了解《幾何原本》的脈絡，明瞭定理之間的推演過程和邏輯順序。自以為是解題高手數學能人，卻和一般學生們同樣地犯了邏輯上的謬誤而不知，實為可笑。當然，這些學生們隨後也都被我當頭棒喝、狠狠地上了一堂邏輯課。

無論如何，應當站在高觀點看待教材的數學教師們，除了擁有能夠清楚方便教會、教得懂學生的方法與本事之外，不也應該真正了解知識背後的本質與脈絡嗎？貪求讓學生聽得懂與方便教學的一時之快，卻沒讓學生弄清楚教材與知識的邏輯本質與演繹過程，沒有讓學生從小學習正確的數學觀的機會，這是否也是造成學生往後學習難以有效遷移、養成學生無法自我學習、自己從書本中統整知識架構的幫兇呢？而現行新教材高中某版本的教科書的第一冊，也在其邏輯概念的附錄之中，提供了關於本定理一個邏輯上錯誤的證明方法，且並未作任何說明，這不也頗為荒謬嗎？

過去，筆者在個人的學習歷程裡，總是希望得到現成的、整理好的數學資料與數學知識，現在，有了更深一層地體認：貼近文本，向大師學習！否則也許那一天，又將自以為得意地穿上了國王的新衣而不知。

### 中法對照本《九章算術》獲法蘭西學士院平山郁夫獎

據巴黎第七大學網站 (mmtx@sigu7.jussieu.fr) 2006 年 6 月 16 日報導，法國國家科學研究中心 (CNRS) 研究員林力娜 (Karine Chemla) 博士和中國科學院自然科學史研究所研究員郭書春在中國科學院與法國國家科學研究中心科學合作協議框架內合作完成的中法對照本《九章算術》——*Neuf Chapitres : le Classique Mathématique de la Chine Ancienne et ses Commentaires* (2004 年 10 月由巴黎 Dunod 出版社出版, 2005 年 8 月第 2 次印刷) 獲法蘭西學士院 (Institut de France, 一譯法蘭西學會或法蘭西學院) 所屬的金石略文及文獻學院 (Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, 一譯古典文獻學院) 的平山鬱夫獎 (Le prix Ikuo Hirayama)。法蘭西學士院是法國最高學術機構。下設法蘭西文學院 (Académie Française)、金石略文及文獻學院、法蘭西科學院 (Académie des Sciences)、法蘭西學術學院 (Académie des Beaux-Arts) 和法蘭西倫理和政治學院 (Académie des Sciences Morales et Politiques) 5 個學院。平山郁夫 (1930— ) 先生是日本著名畫家東京藝術大學教授法蘭西學會院士，1992 年起任日中友好協會會長。

## 新書介紹：《77 個好玩得停不下來的數學謎題》

台師大數學系碩士班研究生 陳春廷

書名：77 個好玩得停不下來的數學謎題

作者：沖田浩

譯者：殷勤

出版社：究竟

出版日期：2006 年 10 月

定價：新台幣 220 元

語言別：繁體中文

規格：平裝/216 頁/25K

普級/雙色印刷/初版

ISBN：9861370641



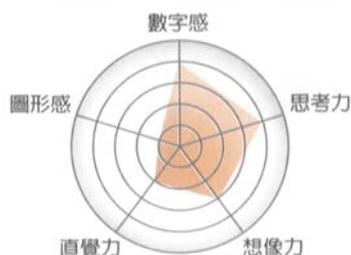
本書作者沖田浩，1936 年生於日本東京，慶應義塾大學法學部畢業。自 1999 年起，擔任 TORAY 經營研究所特別研究員、青森大學經營學部教授。主要著作有：《更了解「公司的數字」！》、《給業務員的精算管理術》、《淺顯易懂的精算能力》、《數學能力檢定講座》……等。

在本書序言「數學也可以很好玩」中，沖田浩提到他過去對於數學也沒有好印象，小學時就是計算、再計算，國中就是死記公式和證明法，高中以後，則是積分、微分、三角函數，如果沒有考試根本就不想學這些東西！但是，自從沖田浩進入社會工作之後，才發現數字與生活息息相關，在公司裡甚至是用數字這種語言在溝通，因此，他重新學習這一門知識，更從中體會到數學的趣味！

沖田浩爲了突破過去的數學遊戲，加入商業氣息的題目，這也是與他的職業工作有關。此外，增加從數學思考力及發想力的觀點著眼時，也能發掘有興趣的題目。本書便是沖田浩想與人分享的成果，原來數學是可以很有想像力的！

沖田浩認爲數學是訓練邏輯思考的最佳方式。在本書中，他將數學能力分成「數字感」、「圖形感」、「思考力」、「想像力」和「直覺力」五類，並且在各章之前附上一個說明圖，分析這一章所能夠培養的能力，請參見下圖（掃描自書中 64 頁）。

### 時間問題要訓練你的……

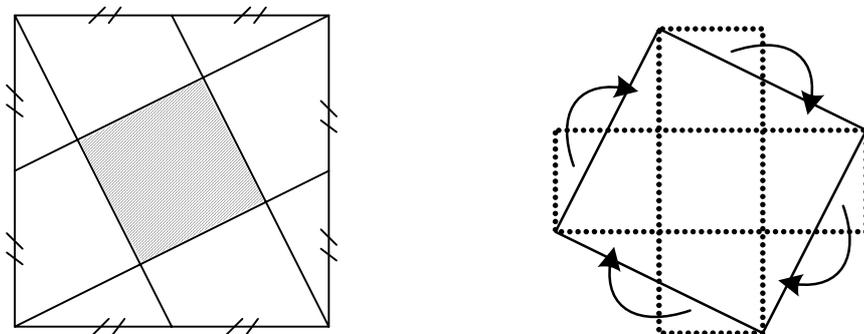


全書分爲十一章，各章主題如下：（1）一分鐘小遊戲；（2）整數的神奇魔法；（3）用方程式解決就對了！（4）讓人迷惑的時間；（5）來玩摺紙遊戲吧！（6）三角形的謎題；（7）圓的謎題；（8）別被悖論騙了！（9）腦袋清晰才有順序；（10）統計裡的暗藏玄機；（11）考驗你的商業判斷力。另外，有些部分會補充「數學小知識」與「增進功力」，延伸更豐富的數學知識與小故事。

各章之中又分爲七小節，即主要的七個問題，每個問題都有標示「難易程度」，總共可以區分成五種，由一至五顆星來表示，越多顆星難度就越高，能激勵讀者向更高的難題挑戰。另外，每個題目都定下了「時間限制」，因為沖田浩認爲有時間限制，就能使人提高集中力，與沒設下限制的時候相較之下，能夠以更短的時間、更聰明的解題方法完成，正確率也比較高。對於題目如果沒有任何想法時，可以參考每題之後所附的提示，朝著大方向思考就容易多了。

一般而言，在趣味數學遊戲所使用的小道具之中，就屬火柴棒最受青睞！沖田浩的書裡當然不會缺少囉！而且還有撲克牌（卡片）、色紙、尺、時鐘……等，讓讀者可以自己動手做（具體操作），藉此有利於解出謎題。這些部分也是筆者所偏愛的單元，因此，請容筆者選擇這幾個單元來介紹。

顧名思義，「來玩摺紙遊戲吧！」就是讓讀者準備色紙來摺摺看！首先，如何將一張正方形色紙，摺成只有原面積八分之一的正方形呢？這個問題有五分鐘可以嘗試，難度只有兩顆星，所以，留給各位慢慢去思考。筆者再繼續敘述書中的進階問題：如何將一張正方形色紙摺成只有原面積五分之一的正方形呢？這一題則有十五分鐘的時間限制，難度是五顆星，如果各位想挑戰自己，請先不要看接下來的解答。

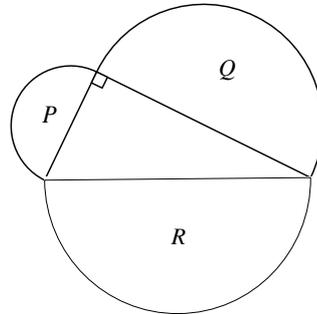


（此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖）

右上圖是解答，左上圖則是沖田浩額外提供的古希臘「十字裁合」問題，可以將十字形剪裁拼湊出正方形。摺紙單元還有其他的問題：如何用正方形色紙摺出  $15^\circ$  角？如何在正方形色紙上摺出最大的正三角形？正八邊形呢？沖田浩不只是提供摺法解答，也會加以說明解釋，摺正八邊形題更是包含證明過程。

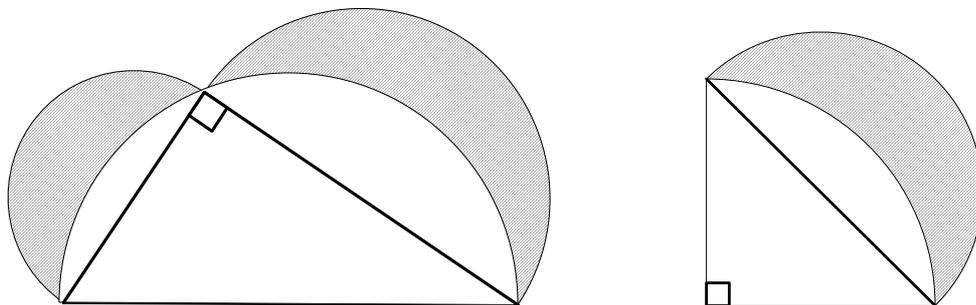
在「圓的謎題」這個單元裡，有畢式定理之應用的『三半圓定理』、『希波克拉底定理』……等。『三半圓定理』是以直角三角形的每一邊為直徑畫半圓，這三個半圓的關係如下：

$$\text{半圓 P 的面積} + \text{半圓 Q 的面積} = \text{半圓 R 的面積}$$



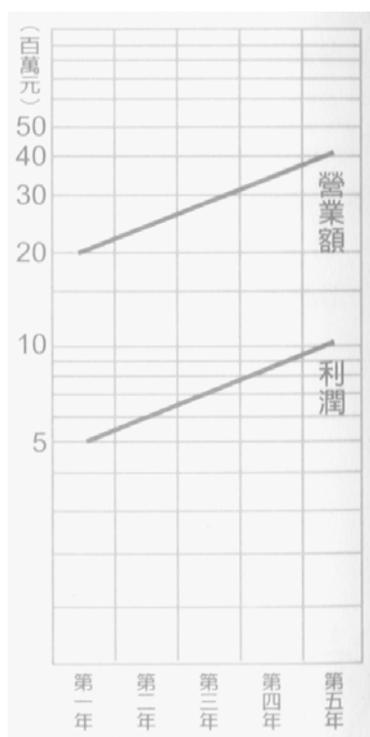
(此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖)

至於有關『希波克拉底定理』，沖田浩則列出兩種，第一是「把直角三角形的各邊作為直徑畫半圓，斜線部分面積和=直角三角形面積」，請參考下圖右方；第二種是「以等腰直角三角形的直角為圓心畫出的扇形，以及用斜邊為直徑畫出的半圓，所形成的月牙兒形狀面積，等於三角形面積」，請參考下圖左方。而證明過程在此不贅述，各位不妨自己試試看！



(此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖)

最後，有兩個單元與統計相關。這不禁讓筆者聯想到平時在報章雜誌上看到的調查統計結果，報導內容掛著這樣『科學』的手段，一般人往往沒有仔細思考就『相信』了，其實是有許多『陷阱』的！沖田浩利用一些篇幅讓讀者有機會來考驗自己的判斷力，題目包含有生活中的情況，例如：買飲料時是「買五送一」或「買五罐打八折」比較划算？也有偏向商業的問題，例如：營業額、利潤的成長……等。其中提及的「半對數表」，在一般數學課本上就不常見，這是縱軸採用對數刻度、橫軸仍為一般刻度的圖表，適合在判斷成長率時使用，如下圖表（掃描自書中 196 頁）。



此外，沖田浩也強調了正規課程所學到的數學也很有用！例如：「用方程式解決就對了！」這個單元必須使用到解方程式的方法，其中的第一題就是仿中國《孫子算經》著名的「雞兔同籠」而來的推廣題，在日本就叫做「鶴龜算」。其他還有如畢氏定理（商高定理）、尺規作圖（畫出無理數）……等，都是國中課程裡所教授的知識。當然，書中有一些是數學科普書籍裡常見的問題，例如：如何在有限次數之下秤出假金幣？如何用七升和三升的量筒量出五升？「永遠不會禿頭」的悖論、類似「魔方陣」的填數字問題、『河內塔』問題……等。

整體而言，筆者認為本書適合中學生自行閱讀，尤其是國中階段的學生，因為問題普遍不難，無需太多的數學知識。此外，其中一些益智謎題是可以提供給教師，打發課堂多餘的零碎時間，即使只有一兩分鐘也能產生效果，至少讓學生有機會發現數學的另一種面貌。

## 新書介紹《此零非彼 0—數學、文化、歷史與教育論文集》

台師大數學系碩士班研究生黃俊瑋

書名：此零非彼 0—數學、文化、歷史與教育論文集

作者：洪萬生

頁數：353

出版社：臺灣商務印書館股份有限公司

出版年：2006 年

國際書碼：ISBN 957-05-2072-8



本書收錄台灣師大洪萬生教授從 1994 年以來在《HPM 通訊》、《科學月刊》所發表之學術文章與書評，如同書名與作者在序中所言，本文集主要探索「數學哲學」、「數學歷史」、「數學文化」與「數學教育」之間的相互關聯。本書共分為五輯，內容包含作者推薦書籍之書評、數學小品文、扣人心弦的數學史事，還有其對於數學教育、數學史題材之相關評論與解析，書中展現了諸多不同於一般大眾的數學史與數學教育觀，從數學的歷史面向逐步過渡到數學教育，最後再到數學文化，引領讀者了解數學知識活動的多元面向。

一般坊間常見的數學科普書籍，縱使能因作者的文風文采，描寫得生動有趣、展現不同風味，但總歸只於流於記述與描述數學家、數學軼事的層面，久之，見了文章標題即能猜想、推測得大概的內容，了無新意。然本書作者以其專業而札實的數學史學角度與觀點，評論了許多重要的數學史書籍，並透過歷史、教育與文化，從不同的角度與面向切入，以更深刻、更加開拓的視野，介紹並評析了一些我們常見的數學概念發展與數學故事，實令人大呼過癮、驚歎不已。

從筆者較為熟悉的中學數學教育觀點視之，本書不乏許多值得我們省思，並可作為教師們融入課堂的相關題材，例如〈以我的身高為準〉文中所提之公度量概念，利用處理的不可公度量問題，進而引入 $\sqrt{2}$ 為無理數，也引發了古人對於數的概念的發展與新的思維。〈破圓週率神話〉中言及當年「數學天才」利用電腦計算打倒 $\pi$ 這個無理數的軼事，如此不可思議的謬誤，卻為無知的新聞大肆報導宣傳，完全無視數學證明的必然性與正確性，真是為茶餘飯後的好材料。總之，此二篇文章對於高中學生無理數的相關課程中，皆頗值得引入課堂進行綜合探討與反思。

而就大家常見而熟知的 $\pi$ 的故事，作者透過〈三國 $\pi$ 裡袖乾坤〉與〈魅力無窮的祖率：355/113〉兩篇文章，提及第三、第五世紀兩個偉大數學家劉徽、祖沖之發現、逼近圓周率

的歷程，更引領讀者深入了當時的社會文化的脈絡之中，巧妙地說著「三國 $\pi$ 的一頁滄桑」與祖沖之在其算學上的成就與不朽地位。這也啟發我們，求學問不僅止於從數學知識、數學史事本身著眼，更需進一步融入、對其相關的文化與社會背景有所了解，方能從脈絡之中，得到知識發展、演進之全貌。

有關『斐波那契的《計算書》』一文中，作者介紹了這本中世紀西歐數學史上的重要數學文本，在當時可被歸類為商用算術書，介紹了基礎算術與代數學，同時收錄了形形色色的數學問題，足可窺見當時社會的重商文化。〈數學課程的文化衝擊〉一文彰顯了我們所習以為常的學校數學，對於那些弱勢、偏遠族群，不管是在文化上或是日常生活上的重大衝擊與影響，值得數學教育工作者省思與重視。〈歷久彌新的珠算〉一文中，點出中國傳統算籌和珠算方法在「商界」的實用價值與其過去演進發展的脈絡。

〈此零非彼0〉一文提及中國人口中的「零」，與過去人們中心認識數字0這個概念的曲折發展。〈三個公式積圓面〉詳細地介紹了阿基米德、歐基里德與劉徽對於圓面積的證明，其中劉徽以圖形直觀的方式所證明的圓面積「半周乘半徑」公式，更顛覆了傳統數學課上學子們朗朗上口，卻無直觀幾何意義與證明的「 $\pi r^2$ 」公式。〈評高中數學的邏輯概念內容〉一文裡，作者深入介紹了命題、邏輯與論證等概念與之間的關係，並比較、評析了各版本教科書中邏輯單元的差異（新行95暫綱中，邏輯單元已刪除，移至附錄中）。〈建構主義 vs. 柏拉圖主義：親愛的老師你站在那裡〉一文剖析了柏拉圖的教育哲學，與當時所流行的建構主義教育理念，提供教師們心中教學理念與教育哲學的一把尺。以上各文對於不管是在職、待職教師，或者數學、數學史同好而言，皆頗值得深入賞析、玩味。

另外，作者在文章中，引入許多其平日教學過程中，提供給學生們反思回饋的問題，以及學生們所發表之想法與思辯之歷程，實為特別之處，而這些題材中如：準教師們對於一般教學上與教材中驢橋定理（等腰三角形兩底角相等）謬誤證明的自我解嘲與自圓其說、對於媒體荒謬地報導電腦證明 $\pi$ 非無理數的反應等，正可提供一般讀者認知衝突與進一步反思，整合知識架構的機會。同時，我們也從中了解數學系學生在多年數學專業訓練後，對於數學學科與數學知識本身所擁有的不同的、多元的哲學與價值觀。

本書大多數文章的段落中，皆引用了文本原典中的內容，除了讓讀者可享受第一手資料外，也重複地告訴我們做學問的一個重要觀點：向大師學習。我們應當貼近文本，深入了解其歷史上、文化上、或者知識上的脈絡性。若曾仔細研讀歐幾里得《幾何原本》的內容，想必不會犯證明驢橋定理時所發生的循環論證。至於坊間許多書籍或部份數學史相關網站上對於歐幾里得第5設準有誤的解讀，譬如提及歐幾里得當時所逃避的無限的概念，或者未作說明地直接引其等價的平行公設，筆者大膽研判，這其中的多數作者，從不曾真

正閱讀或了解《幾何原本》的相關原典內容，反而引用了或學習了有誤的二手數學知識，實有道聽途說之嫌。這又再一次說明了「向大師學習」的重要性與必要性，也真正符合數學追根究底，求是求真的精神。我們實應慎之。

本書之妙與其所提供於數學教育思想上的裨益，非筆者一時半刻間所能盡訴。又簡短篇幅所限，勢必遺漏諸多書中的重要觀點與篇章，故有賴讀者親自玩賞與體會。在讀膩了一般數學科普書中那些老掉牙的數學故事、數學花絮或者數學家的遺聞軼事的同好們，不妨換換口味，本書值得您重新品味數學文化與數學史。而教慣了也熟透了中學數學課程的資深教師們，以及對於年年重複的教學內容感到無味而厭煩的老師們，或者初出茅廬正欲大展雄才的新手老師們，如有機會看看本書，則對於您過去或未來將要共同相處數十年的數學教材，將會不同的感受與新的視野。總之，跳脫課本與教材的羈絆，給自己也給莘莘學子們一些不一樣的活力與對於數學的希望吧！

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。[投稿請e-mail至 suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

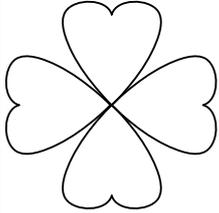
日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬅（東京大學）  
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）  
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學） 林壽福（興雅國中） 傅聖國（健康國小） 程麗娟（民生國中）  
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹（及人中學）、羅春暉（二重國小）  
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）  
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）、郭志輝（內壢高中）、程和欽（永豐高中）、鍾秀瓏（東安國中）  
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）  
苗栗縣：廖淑芳（照南國中）  
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）  
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）  
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）  
台南縣：李建宗（北門高工）  
高雄市：廖惠儀（大仁國中）  
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）  
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）  
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。

## 『一筆畫問題』教案設計

台灣師大數學系碩士班研究生 李建勳

單元名稱	排列之一筆畫問題		
教材來源	各版本的高二上課本及一些數學普及書籍		
教學年級	高二	學生人數	43 人
教學日期	96 年 1 月 16 日 早上 10:10~12:00	教學時間	2 堂課，共 100 分鐘
學習本單元的預備知識	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能瞭解基本的直線排列原理。</li> <li>2. 能利用樹形圖做基本的排列題目。</li> </ol>		
學生分析	<p>學生程度：程度分配平均，但有部分學生極為資優。</p> <p>學習態度：大多數學生都能專心學習，上課配合度高，願意發表與討論。</p> <p>班級氣氛：能習慣老師的上課步調，同學也能互助合作，討論氣氛熱絡，願意分享心得。</p>		
單元教學目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能由生活情境中體察出圖形的美。</li> <li>2. 能了解哪些圖形可以一筆畫完成。</li> <li>3. 能利用排列原理計算一筆畫圖形不同畫法的數目。</li> </ol>		

教學內容摘要	主要問題和活動	說明	評量重點
◎利用請學校美術老師表演一筆畫畫大象等動物來引起動機。	1.有沒有人會畫大象？	<ul style="list-style-type: none"> <li>•這時候可能沒有任何學生會或有意願，正可引出美術老師的出場。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•7 分鐘</li> </ul>
◎算一筆畫的方法有幾種？	2.老師在黑板上畫下的幸運草圖形有幾種一筆劃將它畫完的方法？	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師在黑板利用粉筆呈現旁邊的圖形。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•7 分鐘</li> </ul>
			
	3.從板橋火車站到萬華火車站一口氣連續來回走完華江橋、華翠橋、光復橋這三條路，有幾種走法？	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師利用 ppt 展示地圖。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•5 分鐘</li> </ul>
	4.生活中有很多圖形跟這三條道路所呈現的圖形有相同的構造，例如說 angelina 的嘴唇，又例如下圖中，翹鬍子爺爺的鬍子，假設我們將其鬍子長出來的地方當成是同一個頂點，這樣他的鬍子構造出來的圖形其實跟剛才我們所看到的圖形是有關聯的！請問如果我們這時候以鬍子兩邊的尖端為起點和終點，在不重複連線的情形下，這圖形一筆畫畫完的情形有幾種？	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師利用 ppt 展示 Angelina 照片及翹鬍子爺爺的照片。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•10 分鐘</li> </ul>

	<p>5.這張圖是一間公寓，如果今天我們要從甲房間到乙房間，中間有三條通路可以通行，如果我們想要在不重複路徑的情形下，從甲房間到乙房間走完所有的路徑，有幾種走法？</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師利用 ppt 展示公寓圖。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 5 分鐘</li> </ul>
	<p>6.現在假設爸爸媽媽在外面努力工作賺大錢，所以買了更大的公寓，請問你們如果要從新房子的甲房間到乙房間，並走完所有的通路，有幾種走法？</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師利用 ppt 展示新公寓圖。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 10 分鐘</li> </ul>
<p>◎是否所有圖形都能一筆劃完成？</p>	<p>7.家有沒有發現老師這堂課都在跟大家講解如何將一個圖形以一筆劃完成？那是否所有的圖形都能一筆劃完成？</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•老師以教室中的圖形為例子向大家詢問該圖形是否能夠一筆畫，但在此不解答，留待介紹尤拉如何解決七橋問題後再解答。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 分鐘</li> </ul>
<p>◎介紹七橋問題的典故。</p>	<p>8 這張是歐洲 18 世紀哥尼斯堡 Königsberg 的地圖，大家可以看到中央有個小島，Pregel River 環繞四周，因此島上居民只能利用橋樑通行外地，請大家數數看，該地有幾座橋樑？          連同旁邊的陸地呢？          共有七座！          當地流行一個遊戲，這個遊戲是說以某地為出發點，有沒有可能在不重複的情形下，通過所有的橋樑並回到該地？大家認為可以嗎？</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•利用 ppt 投影地圖給大家看。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 5 分鐘</li> </ul>

<p>◎介紹尤拉生平</p>	<p>9.後來解決這個問題是當時的大數學家尤拉,至於他怎麼解決的,老師等一下再來講解,現在先請湘宜老師來為我們講解尤拉的生平!</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 利用 ppt 呈現尤拉生平簡要記事。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 13 分鐘</li> </ul>
<p>◎解釋尤拉解法</p>	<p>10.尤拉到底怎麼解決七橋問題的呢?是不是只要滿足尤拉定的規則就可以一筆畫呢?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 利用 ppt 及海報呈現尤拉所發現的定理。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 10 分鐘</li> </ul>
<p>◎舉例說明生活中能一筆劃圖形有哪些!</p>	<p>11.其實在我們生活週遭中充斥著圖形的美,現在讓老師帶大家一起來看看(澎湖七美雙心圖形、關渡大橋等等)!那是否這些圖形都能一筆劃完成?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 利用 ppt 呈現這些美麗的圖形</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 5 分鐘</li> </ul>
<p>◎遊戲時間</p>	<p>12.現在分兩組,輪流選擇題目給對方回答,如果對方不會或答錯,另外一組就可以回答,答對的話便獲得該題的分數,最後看誰得最多分數該組就獲勝。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 利用海報呈現題目。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 20 分鐘</li> </ul>