

# HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

## 第一卷 第一期 目錄(1998 年 10 月)

- 目 發刊詞
- 目 如何在課堂上使用數學史
- 目 淺談國中數學科的教學心態
- 目 有感覺的數學課
- 目 我對數學教育的看法

## 發刊詞

洪萬生

臺灣師範大學數學系教授

顧名思義，【HPM 台北通訊】是為公元 2000 年 8 月 9-14 日在台北舉行的 "HPM 2000 Taipei" 研討會而發行。所謂 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics)，是指隸屬於國際數學教育委員會 (ICMI) 的一個研究群，專門推動數學史與數學教學之關聯。簡單地說，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。

一九九六年七月下旬，我接受 HPM 主席 John Fauvel (英國數學史家) 邀請，前往葡萄牙 Braga 城的 Minho 大學參加 "HPM 96 Braga"。這是我平生第一次參加這一類的國際學術活動，沒想到竟然促成 "HPM 2000 Taipei" 這一段因緣。事實上，從 80 年代初我打算改行攻讀數學史，就一直相當注意 HPM 的相關議題。正如大部分人的經驗吧，我年少時所參與的數學知識活動，總是欠缺著歷史人文的意義與維度。後來決定獻身數學史研究，或多或少是相信我自己遲早可以回餽到數學教育這一邊來。可惜，88 年從紐約返國後，立即全心投入數學社會史的專題探討，始終不敢隨便分身。直到 1996 年夏天遠赴葡萄牙，才正式地與 HPM 接上線。

由於第九屆國際數學教育會議 (ICME-9) 2000 年 8 月初預定在日本的立教大學召開，因此，作為 ICME 的衛星會議之一的 HPM-9，選在鄰近國家舉行，是一個方便可行的策略。這是為什麼 John Fauvel 與 Jan van Maanen (HPM 現任主席，荷蘭數學史家) 從一開始就徵詢我承辦 HPM-9 意願的原因之一。他們兩位當然也考慮過其他國家或地區如中國、香港及南韓，但最後還是敲定台灣。我想我們三位都是專業的數學史家，或許同行的親切感可以超越其他的因素考量吧。

現在，既然決定承辦，我們除了屆時在旅遊接待上，讓來訪的國際學者及教育工作者賓至如歸之外，也應該好整以暇地端上幾盤本地學術特產，教國際同行印象深刻，而提高台灣的學術能見度。基於此，本刊當然肩負著推動或促進 HPM 研究活動的使命。儘管如此，我們對於打算現身本刊的稿件，卻不設定所謂的『學術』門檻。撰稿者只要針對 HPM 或數學教育等議題，順手拈來，但求文句通順、語氣平和即可。這是專屬於數學教師的園地，大家儘可抒懷、敘事與詠物，不過，也請切記：如果有意月旦人物，則只能針對歷史上的數學家！我們無意標榜溫文儒雅，但是凡事自在，卻必須以不惹人是非為妙。

總之，面對本刊，態度不妨嚴肅，心情且放輕鬆。讓我們開始暖身，一起進入 HPM 的天地之中。

## 如何在課堂上使用數學史？

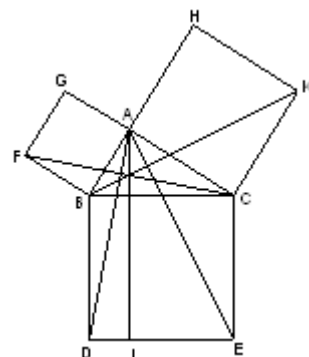
洪萬生

臺灣師範大學數學系教授

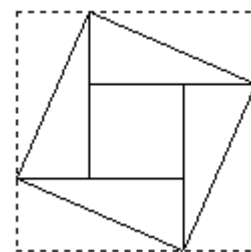
當同事問 Kool 如何在數學課堂上使用數學史時，她回答說：

Do not talk about the history of mathematics in your classroom, but do it, use it!! Use historical problems in your teaching for reasons of variety and to give your pupils something extra! The extras that historical problems bring to your pupils are historical insights and mathematical insights. Historical problems may intervene at the end of the learning process as an extra exercise or the application of a new learned mathematical topic, or at the beginning to stimulate pupils to develop their own individual strategies.

基於同樣的考慮，當我在很多場合 -- 包括本系所『數學史』課程、短期數學教師講習班，以及針對初、高中數學教師與學生的演講 -- 討論數學史如何關聯數學教育 (HPM) 時，我總是喜歡舉畢氏定理 (the Theorem of Pythagoras) 的三個證法為例，來說明數學原典 (或文本) 上的記載，對學生的人格薰陶、認知啟發以及 (多元) 文化關懷，如何可以帶來深刻的影響。按照歷史順序，第一個方法當然必須是古希臘歐幾里得 (Euclid) 【幾何原本】(The Elements) 第一冊命題 47，這即是所謂的『面積證法』，至於我選擇的版本，則是徐光啟、利瑪竇 (Matteo Ricci) 所出版的明刊本 (1607 年)。第二個是古中國三國時代趙爽注解【周髀算經】時，所提供的『弦圖證法』。第三個也是歐幾里得所貢獻，記載在【幾何原本】第六冊 命題 31，由於它的證法運用了相似三角形的比例性質，因此被稱為『比例證法』。



在簡述了這三種證法之後，我會進一步督促『閱聽人』(audience, 讀者/作者) 對比 (contrast) 它們之間的『差異』，並一再強調數學鑑賞之所由出。試想數學一旦被認為除了可以而且必須『做』(或學著『做』) 之外，原來也可以『欣賞』。如此一來，教師與學生或有可能逐漸體會數學是某脈絡中一種知識活動 (mathematics in context)，它也擁有豐富的歷史文化向度 (或維度，dimension)。因此，學會了它，不僅我們的生活經驗得以強化，同時，我們的文明品味也得以提升 -- 尤其，我們也可以在這樣的教學設計中，分享世紀末最令人矚目的『多元文化關懷』。



參考文獻：

Furinghetti, Fulvia, "History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different

Domains," *For the Learning of Mathematics* 17, 1 (February 1997), 55-61.

Kool, M., "Dust Clouds from the Sixteenth Century," *The Mathematics Gazette* v. 76, n. 475 (1992), 90-96.

## 淺談國中數學科的教學心態

謝新傳

五常國中數學教師

剛踏入國中的新生約有 90%對數學的學習態度是既期待又新鮮的，可是到了國二，這個期待及新鮮感大約只剩 30%，一直到了國三仍然有熱情及興趣接受數學教育薰陶的，我看連 10%都不到（這還包括一大半學習焦慮的學生，甚至於有一些學業成績很好的學生也很厭倦數學），相對的，國中校園內也有一群敬業卯盡全力但疲憊不堪的教師，而會讓青少年在這麼年輕就放棄數學讓老師精疲力盡的原因，我看是台灣的考試文化（反復的考試與殘酷的排名，歷史上有那一個世界級的數學家是從小考出來的？小市民需要熟稔的計算一元二次方程式根的公式嗎？出再大的太陽，學生上體育課打籃球為什麼會那麼高興？）長期扭曲健康的教學與學習心態。青少年進入學校學習數學，課程及學習方式完全是接受學校及教師安排的，所以這方面教師需要再去研究，責無旁貸。

學生常會問起為什麼要學數學，說來話長，但我認為最起碼的是要讓青少年知道，基本上數學是好玩有趣的（迎合青少年的心理發展，一定要比 Game 好玩，否則的話他們都會去打電動不念書，視數學為畏途），至於說數學是本來就有趣還是老師教出來或學生學出來的？我的答案是數學是本來就有趣，再經過老師的培養，學生會更有趣。至於怎樣讓青少年覺得有趣，我認為：

**第一、要將數學史融入教學活動：**『公元前 200 多年前，有一位叫埃拉拖斯德尼（Eratosthenes）的古希臘數學家，他利用現今連國中生都可以理解的簡單幾何方法計算出地球的周長 39250 公理，……後來引發了同一個時代數學家阿基米德仔細計算圓周率……』，像這樣一波接一波引人入勝福爾摩斯般的數學故事，是培養興趣的最佳辦法，教師可以帶學生到校園找到一個圓形的花園，用類似或著更有創意的去計算周長，像這樣重遊歷史讓學生實際去體會去實踐，學生得到了啟示就會更加有興趣去學。教師如果課堂上沒有足夠的時間來進行，最好是介紹一些通俗有趣的書籍讓學生閱讀，比如關於圓周率  $\pi$  的精確求值，在古代中國也有一段有趣且精彩的歷史，老師可以要求同學把它整理出來（甚至於把它作成月曆放在佈告欄內當作作品來欣賞），相信這樣作，對青少年很有啟示的作用。其次，要將數學歷史融入教學活動的另一個原因是要青少年關心本國及全世界的文化發展，數學是生活的一部分也是人類文化活動的一部分，史書不是記載 4000 多年前大禹治水時左準繩右規矩嗎？連中國古代軍事寶典《孫子兵法》裡也蘊藏著豐富的數學思想，數學難道沒有影響中國歷史嗎？

**第二、讓學生自作研讀或研究報告以取代紙筆測驗的評量方式：**為什麼呢？作研讀報告和考試，兩者對青少年會有兩種截然不同的影響，研讀報告或小組研究報告簡直就可以看成是自己的〔藝術作品〕，青少年會有無限寬廣的想像空間，學會尊重別人也肯定自己，從而建立起自己的數學觀甚至於人生觀，而紙筆測驗僅僅只能當作學業競賽的工具，不能勾畫內心的藍圖更並不能評鑑一個人的創造力及想像力。前者使學習者在創造發明的心態上自我成長，並能主動學習，而太多的考試只是讓學生反復練習，增加同儕間的緊張，「好學生」則永遠只會考別人設計的題目，永遠是別人設計出來的。我建議國中數學選修課，老師應介紹數學史或指導學生作研讀報告，並取消日常成績中的紙筆測驗（∵三次段考已經過多了，多一次考試，青少年則是多一分挫折感，老師也多一分焦慮），改成「研究精神」、「數學藝術」、「數學遊戲」、「數學故事」之類的。

**第三、生活數學化，數學生活化：**數學就存在大自然，就是生活本身，並不是國中數學參考書中那一堆歷屆聯考試題，數學是偵查大自然謎底的福爾摩斯，400年前有一個德國天文學家刻卜勒，他對於六角形的雪花，根據數學原理推論出雪片冰晶的原子幾何結構。在日常生活中，老師要指導學生用所學過的數學方法去理解周遭的事物，數學才能注入活力，數學才有生命，否則數學永遠只是考試的科目。例如要求學生用幾何的方法去計算廁所卷紙單張厚度及重量，其他品牌的廁所卷紙厚度是否一樣，報紙的厚度又該如何計算，讓學生去深思很平凡生活中的數學體驗。800年前，費布那西(Fibonacci)在養兔子的時候觀察兔群的生長，發現了1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89....這種數列，這個數列和大部份植物的花瓣數目一樣，這樣的生活化的數學教材應該讓學生去感受去欣賞。

**第四、寓數學於懸疑、故事、遊戲、玩樂、猜測之中：**教學要對準青少年的心理發展而來，而課堂上是否能引起強烈的學習動機及持續的好奇，正是教學成敗的關鍵，更重要的是引起動機之後，還能引導青少年更進一步主動學習。雖然證明和演算是數學最難的部份，但是最初的假設、好奇、猜想，往往就是科學最具創造力的部份，我認為課堂上教師不必急於告訴學生結果，要保留更多的時間讓學生去感受去想像，例如我們跟學生講 這個數，他們可能感覺不出來這個數有多大，我們可以舉例說明，有一張紙它的厚度只有 0.01 公分，這張紙如果把它對摺 30 次，那麼它的厚度就有 公分，老師可以停下讓學生猜測這個長度有多長，是大概一本書這麼厚？還是一個人這麼高？還是一間教室這麼寬？還是學校操場這麼長？台北市仁愛路的長？有沒有可能是台北到新竹的距離？大部份的學生在知道答案後通常都會很驚訝，一張薄薄的紙（一百張才一公分）怎麼可能教室?自己對摺 30 次就會有 107.3741824 公理呢？學生因好奇一定會親自動手去摺（通常無法對摺八次，而引發另一個數學問題的學習動機），不行，再用計算機計算，如此一來就達到老師的教學目標。

另外再舉一例：據歷史學家研考，古埃及人並非使用我們現在的直式乘法來計算乘積的，他們用的是特殊的”減半—加倍”法，例如：

要求 $9 \times 25$ 之積，把9的減半數依次往下寫到1為止，又把25的加倍數依次往下寫和左邊的數對應，如下圖：

$$\begin{array}{r} 9 \quad \times \quad 25 \\ 4 \quad 50 \\ 2 \quad 100 \\ 1 \quad 200 \end{array}$$

1和9是奇數，把右邊對應的數相加即為所求， $9 \times 25 = 25 + 200 = 225$

國中生用這種方法去作各種乘法會覺得生動有趣，老師可借此機會對古埃及人和巴比倫人另類的計算作歷史的介紹，並要求學生作書面報告，這是一個引起學生主動學習的最佳方法。

圓周率 $\pi$ 是每一個國中生都熟悉的，教師可以利用課堂上時間，向學生介紹古代中國及古希臘數學家計算圓周率 $\pi$ 精確值的偉大歷史故事，（也順便提一下阿基米得的哲學觀），告訴他中國歷史上的劉徽在公元三世紀的時候，他用【割圓術】計算出圓周率是3.1416，（如果學生好奇問道割圓術是甚麼？那老師就該稱讚他，並且大概講解一下），而到了公元五世紀的時候，另一位高手叫祖沖之（老師可要求學生看書自我想像寫研讀心得—祖沖之的故事）的又創世界紀錄並保持1000年，精算到七位小數， $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ ，到最後告訴他近世的萊布尼茲公式，讓他們深感數學之力與美：

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right)$$

國中生用計算機（順便教他）也可以精算到小數第 20 位，到這個時候如果有學生很想知道萊布尼茲公式是怎麼來的，有這麼好的師生互動，那麼老師的教學算是很成功了。

## 有感覺的數學課

黃振順

西松高中數學教師

每常在與同學論及數學時，不是看他們唉聲嘆氣，就是聽他們抱怨連連，其內容不外乎聽不懂、抓不到重點、不明白為什麼會這樣，為什麼會那樣。因此，如何讓學生在課堂上感受得到老師所要傳遞的訊息，掌握重點，並進而用自己的語言表達出來，一直是個人多年來努力的目標。

去年，在教數學歸納法時，因為老是有一些同學說他們聽不懂，於是就不斷地找例題反覆說明。以下是在這嘗試的過程中，讓較多數同學們覺得易於了解的一例。筆者不憚淺陋，斗膽在此提出，實係希望大家不吝指正，廣為討論，庶免誤人子弟。如能藉此拋磚引玉，引來大家多作一些教學經驗分享，那就更不在話下了。

茲將過程簡述如下：

一開始，老師就先拋出問題，供大家討論

**問題：設  $n$  為自然數，試比較  $3^n$  與  $n!$  之大小**

接著，由同學們分組發表其看法及結論

$n$	$3^n$	$n!$	由左表比較 似可得以下之結論 即 $n \leq 6$ 時， $3^n > n!$ $n \geq 7$ 時， $3^n < n!$ 但是，會不會在某數之後又來個大逆轉呢？ 逐一檢驗？勢不可為，太…了吧？
1	3	1	
2	9	2	
3	27	6	
4	81	24	
5	243	120	
6	729	720	
7	2187	5040	

老師再質疑，( $n=100$  時怎樣保證不反轉?) 以迫使同學們去做組織化、系統化的整理。  
如

$$3^8 = 3 \times 3^7 < 3 \times 7! < 8 \times 7! = 8!$$

接著，要求同學們依樣畫葫蘆，至少寫五次推論

即

$$\begin{aligned}
 3^9 &= 3 \times 3^8 < 3 \times 8! < 9 \times 8! = 9! \\
 3^{10} &= 3 \times 3^9 < 3 \times 9! < 10 \times 9! = 10! \\
 3^{11} &= 3 \times 3^{10} < 3 \times 10! < 11 \times 10! = 11! \\
 3^{12} &= 3 \times 3^{11} < 3 \times 11! < 12 \times 11! = 12! \\
 3^{13} &= 3 \times 3^{12} < 3 \times 12! < 13 \times 12! = 13!
 \end{aligned}$$

老師又質疑，( $n=100$  呢?) 要求以更精簡的語彙做更完整的表達。在歷經將近一節課的奮鬥之後，我們終於得到一個比較能被大家接受的寫法。

即

(1) 當  $n = 7$  時， $3^7 = 2187 < 5040 = 7!$

這個事實是大家都一致同意的。

(2) 如果  $n = k \geq 7$  時， $3^k < k!$  是正確的的話

那麼當  $n = k + 1$  時， $3^{k+1} < (k+1)!$  顯然也會是正確的。

$$\text{因為 } k \geq 7 \text{ 而且 } 3^{(k+1)} = 3 \times 3^k < 3 \times k! < (k+1) \times k! = (k+1)!$$

所以，對所有自然數  $n$  而言，如果  $n \geq 7$ ， $3^n < n!$  一定會成立。

回顧一下上面的式子，你體會到數學歸納法的威力了嗎？

## 我對數學教育的看法

陳豐榮

五常國中家長

據報載“我國中、小學生參加世界性之數學比賽，其程度高於歐、美、韓等國”，以足以顯示我國數學教育之紮根，足以傲視世界各國，誠可喜也。

但若細心參就，亦不難發現問題。雖然中、小學生之數學程度高則高矣，但在我國，卻甚少有數學家，簡直屈指可數，少之又少。若依理推演，我國中、小學數學程度較世界各國為高，理應數學家也應多於世界各國，然事實上卻完全相反，此種現象適足以令我等深思。

依敝人之淺見，除了國人之價值觀較現實，謂數學或研究工作既辛苦、又不若經商之錢滾滾，利之當頭，不願從事此一研究工作外，其實數學之教育亦有偏頗，大抵「填鴨式多、啟發式少」。數學之教育僅給予學生基本之假設，然後發展公式，依照公式記憶、演算，如此重覆演練，當然在考試時有較好的成績，但於開發學童之思維空間，導引發掘學生並啟發其觀念，似乎有待加強極努力的必要。