HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：https://www.hpmsociety.tw/
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十九卷第一期目錄
(2026)年 3 月)

高麗王朝科舉制度中的數學考試

英家銘
國立清華大學通識教育中心/歷史研究所

眾所周知，東亞古代唐帝國的中央官學以及考試取才制度，特別是影響深遠的「科舉」制度，是人類文明發展過程中的一個很特殊的存在。帝國官學的一小部份名額，以及考試取才的資格，形式上是不問出身人人皆可參加，某種程度他們嘗試實現「任人唯才」（meritocracy）的理想。在實際的政治運作上，唐帝國的朝廷當然不可能百分之百地達到理想，但這樣的理想也被很多異文化所吸收與學習。與唐帝國大約同時代，在韓半島的新羅，以及日本奈良時代的大和朝廷，都嘗試學習唐帝國的律令制度，包含官學與科舉考試等等。

從現存的紀錄來看，新羅在七世紀成立「國學」這個官方教育機構，八世紀在新羅朝廷加入「算博士」的官職。而在日本，八世紀奈良時代的大學寮有收「算學生」，卒業時也需要通過考試才能在朝廷任官。新羅與日本除了使用來自唐帝國的《九章算術》、《綴術》等算學經典之外，也使用在唐帝國不曾出現的《六章》與《三開》兩部可能是來自古代百濟國的著作，作為官學教科書或者考試用書。

時間到了十至十三世紀的高麗王朝，他們在建國初期就積極導入科舉制度，考試科目除了儒家經典之外，也包含各式各樣的技術科目。《高麗史・選舉志》中有這樣的紀錄：

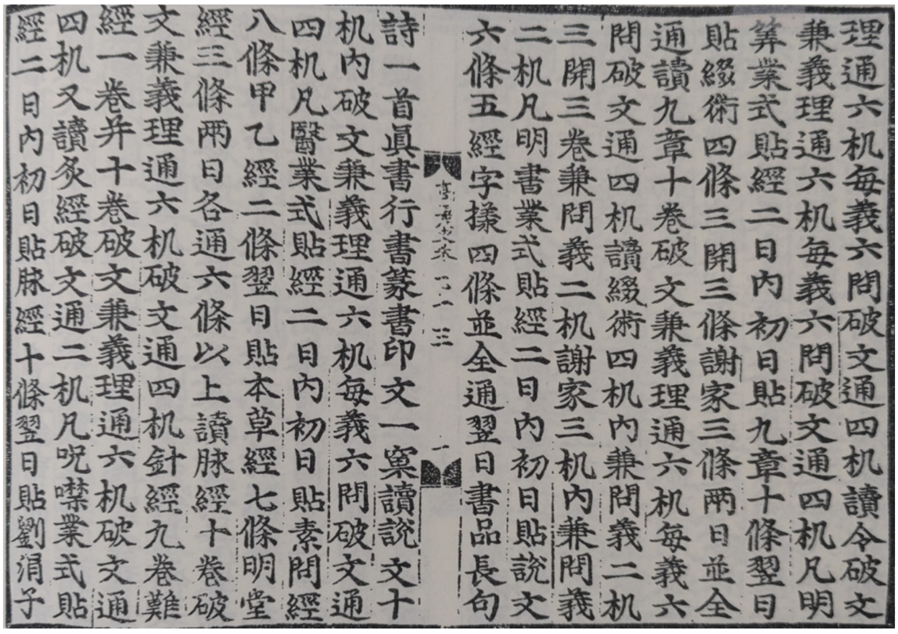
> 三國以前，未有科舉之法，高麗太祖，首建學校，而科舉取士，未遑焉。光宗，用雙冀言，以科舉選士，自此文風始興。大抵其法，頗用唐制。其學校，有國子、大學、四門，又有九齋學堂，而律、書、筭學，皆肄國子。其科舉，有製述、明經二業而醫、卜、地理、律、書、筭、三禮、三傳、何論等雜業，各以其業試之而賜出身。

上面開頭說的「三國」，是韓半島的三國時代，廣義三國時代的年份一直到新羅滅亡、高麗統一韓半島的十世紀為止。在這裡我們可以看到，高麗王朝使用「唐制」的科舉形式，而技術官僚的部分，也有包含「筭」這個科目，也就是數學考試。同時期東亞大陸上的宋帝國，曾經嘗試恢復唐代的科舉制度，但僅有儒家經典的部分獲得成功，算學考試的部分被廢除，而同時日本的平安時代也逐漸放棄考試取才的作法。因此，到十二世紀左右，高麗王朝的數學科舉考試成為東亞古代僅存的官方數學取才考試。

高麗王朝的官方數學考試，稱為「明筭業式」。《高麗史・選舉志》在高麗仁宗朝 1136 年時，有下面的紀錄：

> **仁宗…十四年…十一月，判：「凡製述業，經義、詩、賦，連卷試取。凡明經業試選式，貼經二日內，初日，尚書徧業，貼周易，周易徧業，貼尚書，各十條。翌日，毛詩貼十條，各通六條以上。第三日以後，讀大小經，各十机，破文兼義理，通六机。每義六問，破文通四机。又周易徧業，讀尚書、毛詩、春秋，各秩一机，例隨秩挿籌。小經謂業經，大經禮記。凡明法業式，貼經二日內，初日，貼律十條，翌日，貼令十條，兩日並全通。第三日以後，讀律，破文兼義理，通六机。每義六問，破文通四机。讀令，破文兼義理，通六机，每義六問，破文通四机。凡明筭業式，貼經二日內，初日，貼九章十條。翌日，貼綴術四條，三開三條，謝家三條，兩日並全通。讀九章十卷，破文兼義理，通六机，每義六問，破文通四机。讀綴術四机，內兼問義二机，三開三卷，兼問義二机，謝家三机，內兼問義二机。**

上面整段的內容，是先講儒家經典的考試方式，接著有「明法業式」和「明筭業式」的考試，過程類似，下面我們直接解釋數學考試的部分。


理通六机每義六問破文通四机讀令破文
兼義理通六机每義六問破文通四机凡明
筭業式貼經二日內初日貼九章十條翌日
貼綴術四條三開三條謝家三條兩日並全
通讀九章十卷破文兼義理通六机每義六
問破文通四机讀綴術四机內兼問義二机
三開三卷兼問義二机謝家三机內兼問義
二机凡明書業式貼經二日內初日貼說文
六條五經字樣四條並全通翌日書品長句
詩一首眞書行書篆書印文一窠讀說文十
机內破文兼義理通六机每義六問破文通
四机凡醫業式貼經二日內初日貼素問經
八條甲乙經二條翌日貼本草經七條明堂
經三條兩日各通六條以上讀脉經十卷破
文兼義理通六机破文通四机針經九卷難
經一卷并十卷破文兼義理通六机破文通
四机又讀灸經破文通二机凡呪噤業式貼
經二日內初日貼脉經十條翌日貼劉涓子

圖一：《高麗史・選舉志》中關於明筭業式的部分（取自鄭麟趾，2014）。

明筭業式的考試科目包含四本書《九章》、《綴術》是中國古代的算學重要經典，《三開》可能是百濟與新羅流傳給高麗的遺產，而《謝家》應該是來自同時代宋帝國的《謝察微算經》。至於考試形式的部分，高麗王朝從十一世紀起，科舉考試形式為「三場連卷法」，意即第一場（初場）合格之後進入第二場（中場），第二場合格之後才能進入第三場（終場）的三階段考試。有了這樣的理解之後，明筭業式考試過程如下：第一日要背誦《九章》10 條、全部答對之後進入第二日。接著第二日要背誦《綴術》4 條、《三開》3 條、《謝家》3 條，全部答對之後進入第三日。第三日之後為 《九章》、《綴術》、《三開》、《謝家》的「破文兼義理」。關於「破文兼義理」，學者有各種不同解讀，我個人的解讀方式比較傾向於，「破文」是以高麗語「訓讀」漢文，也就是將漢文的算經術文內容翻譯成高麗語，而「義理」是解釋術文背後的數學原理。

上面敘述的考試方式，和現代以解題為主的數學考試方式不同。在印刷術不普及的十二世紀，所有的考試取才制度都包含某些背誦的要求。數學問題的考試方法，不是出問題寫解法，而是要背誦與翻譯算經內文，並解釋數學問題解法背後的義理，某種程度反映公務員考試的需要，國家需要技術官僚記憶並理解標準作業程序背後的道理。

高麗王朝的數學科舉考試，後來可能成為韓半島的傳統，到十四世紀末之後的朝鮮王朝，朝廷仍然有「算學取才」這樣的數學技術官僚考試，或許跟高麗王朝留下來的傳統有關係。數學是現代文化也是古代文化不可或缺的部分，從數學考試的內容與形式，我們也可以看出許多文化中的數學元素，幫助我們從數學更認識古代文化。

備註：本文改寫自抽著 Ying (2025)。

參考文獻：

Siu, M.-K. & Volkov, A. (1999). "Official Curriculum in Traditional Chinese Mathematics: How Did Candidates Pass the Examinations?". *Historia Scientiarum* 9(1), pp. 85-99.

Ying, J.-M. (2025). "How did students pass the examination? official mathematics education and examination systems in ancient East Asia, from Nara Japan and Silla to Goryeo Korea", *Historia Scientiarum* 35(1), 23-38.

鄭麟趾（**2014**）**.** 《高麗史》，收入孫曉（編），《域外漢籍珍本文庫》，重慶：西南師範大學。

從故宮館藏「象牙球」探究其挖刻的數學模型

彭良禎
國立臺灣師範大學附屬高級中學

早在中華民國建國百年之際，故宮推出的「精彩一百～國寶總動員」特展中，即精選百件藏品薄海騰歡。當時最讓筆者眼睛為之一亮的，是故宮模仿法國動畫《昆蟲 LIFE 秀》的場景，挑選明星級的藏品〈轉心瓶〉、〈翠玉白菜〉、〈象牙球〉、〈毛公鼎〉、〈橄欖舟〉，推出了「到故宮找美夢、找新鮮、找想像力、找驚喜」等趣味的小動畫。當時筆者即針對小白菜與象牙球分享有感的科普小知識。

去年(2025)適逢故宮開館一百週年，兩岸故宮不約而同地各為院慶開展一系列的活動，象牙球即被選配為「故宮 100⁺」的紀念票卡之一。在今年寒假初的 2026HPM 年會上，筆者結合立體模型的 DIY 操作，分享了故宮館藏象牙球的新進研究及其幾何結構，以下簡要呈現當日報告的相關內容。

找藏品

台北故宮館藏的象牙球僅只兩顆，較小顆的〈象牙雕鏤空人物套球〉，直徑約 10 公分，分為 18 層，每層挖有 12 孔，搭配流蘇、配件成長約 55 公分的精美吊飾，是一樓「集瓊藻」院藏珍玩精華常設展間的人氣藏品之一。較大顆的〈鏤雕象牙雲龍紋套球〉直徑約 12 公分，分為 24 層，每層挖有 14 孔，搭配檯座設計成一裝飾的帽架(如右圖)，曾外派到故宮南院特展。

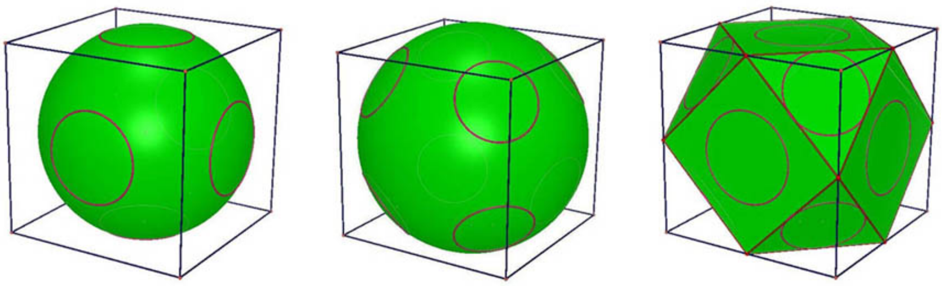
北京故宮館藏的「象牙雕套球」為數較多，有依其雕飾命名為「花卉纹」、「人物图」、「福寿宝相花」的，也有同樣搭配流蘇、配件的〈象牙雕镂空套球〉，其徑長、孔數皆與台北故宮的「人物套球」一致，但分層卻僅有 16。至於同是帽架造型的〈象牙镂雕多层套球〉則較為迷你，挖孔數相同，但直徑僅 5.2 公分，分為 7 層，且搭配木製基座。

找結構

廣東牙匠從一塊象牙的選材、切料、刨球、鑽孔、鉤層、雕花到鏤紋等(圖一)，需利用車床技術，經過多道精細且耗時、繁複的工序，始完成此一層層包覆且可靈活轉動的象牙球，無怪乎北京官方以「仙工」譽此巧奪天工之藝，不過，坊間將此鬼斧神工之作直接讚為「鬼工毬」，不僅傳神，似也更接地氣。

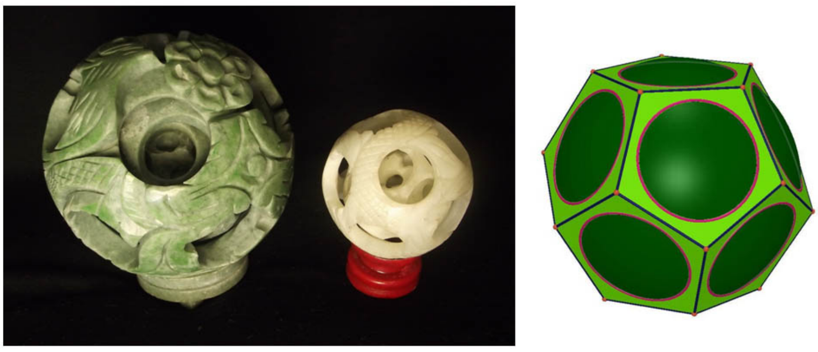
圖一、香港藝品店呈現「龍珠球」雕鏤工序的示意圖。

觀察台北故宮雲龍紋套球上 14 孔洞的挖鑿位置，可一對一到正方體（*Cube*）的 6 個面與 8 個頂點，此正符合利用車床刨球、鑽孔與鉤層的製作工序。當然，若要以現今所謂「截半立方八面體（*Cuboctahedron*）」的 14 個面(圖二)與之對應也未嘗不可，畢竟該造型在閩粵建築的欄柱設計裡，不僅是司空見慣的雕飾元素，更是清初曆算家梅文鼎(1633-1721)，在其中西會通《幾何補編》所提坊間編織竹篾而成的「方燈」結構。



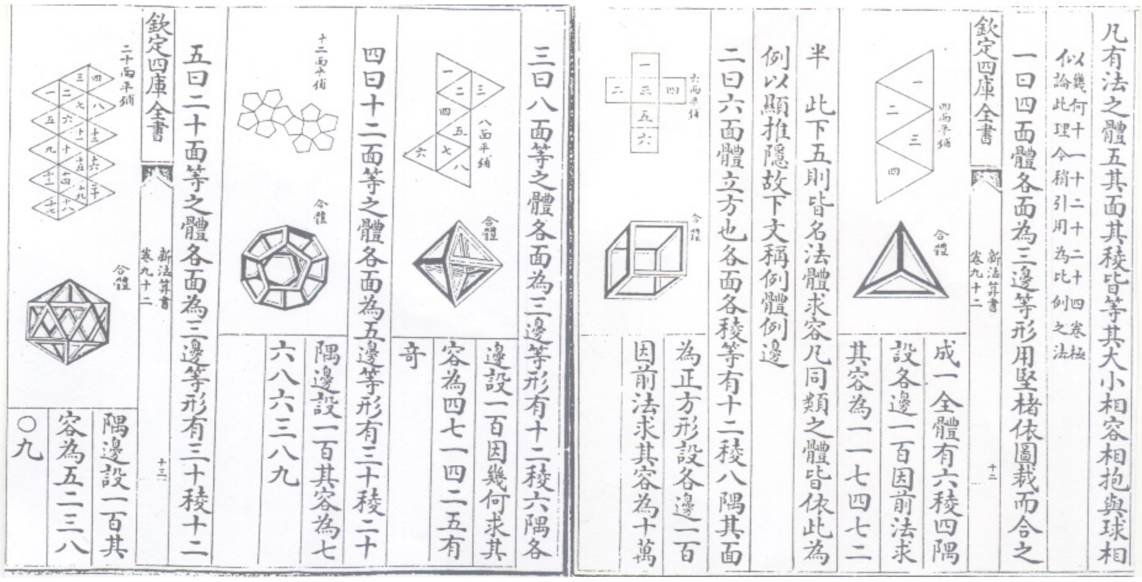
圖二、比對象牙球孔洞位置的立體構成。

至於人物套球上 12 孔洞的挖鑿位置，若能像筆者在香港夜市或街坊攤商所見玉石鏤雕的 4 層龍珠球一樣，都百分之百對應到正十二面體（*Dodecahedron*）的 12 個面(圖三)就更讚了。可惜細查其 12 孔的對應位置，完全與雲龍紋套球的方燈一致，只是少挖了上下兩孔，原來是為了將之留作連接其他配件的旋鈕設計。



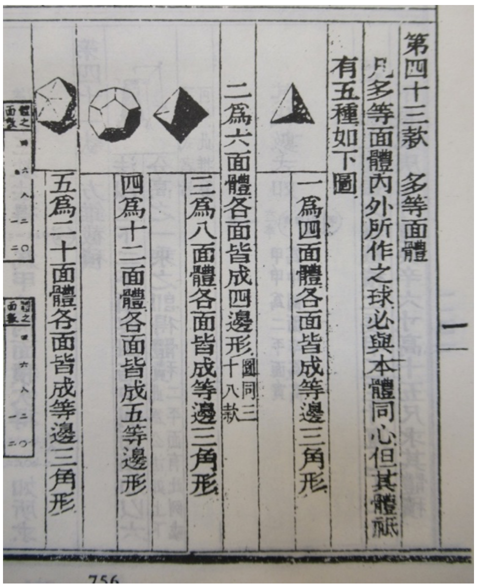
圖三、對應正十二面體挖鑿孔洞的龍珠球構成。

若仔細比對圖二與圖三的孔洞位置，前者 14 孔的間距有長有短，後者 12 孔則彼此等距。筆者簡單假想「挖鑿 14 孔不是比 12 孔費工嗎？」、「正十二面體不是比方燈體均勻嗎？」以上的答案如果都是肯定的，那麼仙工們為什麼不選用後者呢？其中較為合理的解釋，應是當時的仙工們還沒有機會接觸、認識傳教士東傳而來的正十二面體。


凡有法之體五其面其稜皆等其大小相容相抱與球相似幾何十一十二十三十四卷極論此理今稍引用為比例之法
一曰四面體各面為三邊等形用堅楮依圖裁而合之成一全體有六稜四隅設各邊一百因前法求其容為一一七四七二
欽定四庫全書 新法算書 卷九十二 十二
此下五則皆名法體求容凡同類之體皆依此為例以顯推隱故下文稱例體例邊
二曰六面體立方也各面各稜等有十二稜八隅其面為正方形設各邊一百因前法求其容為十萬
三曰八面等之體各面為三邊等形有十二稜六隅各邊設一百因幾何求其容為四七一四二五有奇
四曰十二面等之體各面為五邊等形有三十稜二十隅邊設一百其容為七六八六三八九
五曰二十面等之體各面為三邊等形有三十稜十二隅邊設一百其容為五二三八〇九
欽定四庫全書 新法算書 卷九十二 十三

圖四、《欽定四庫全書》子部曆算類收錄《西洋新法算書》的正多面體。

正多面體的知識體系本非中算所有，翻查其在明清之際，隨著傳教士東傳的紀錄，有蜻蜓點水般出現在《崇禎曆書》裡的《測量全義》(1631 圖四)，也有康熙皇帝摸著模型，翻閱百科大全的《御製數裡精蘊》(1723)，再來就是李善蘭續譯《幾何原本》的後九卷(1866)，以及從美國傳來的《器像顯真》(圖五)。


第四十三款 多等面體
凡多等面體內外所作之球必與本體同心但其體祇有五種如下圖
一爲四面體各面皆成等邊三角形
二爲六面體各面皆成四邊形圖同三十八款
三爲八面體各面皆成等邊三角形
四爲十二面體各面皆成五等邊形
五爲二十面體各面皆成等邊三角形
756


正體者各面相等共有五式一以四箇三等邊形爲界二以六箇正方形爲界即爲立方三以八箇三等邊形爲界四以十二箇五等邊形爲界五以二十箇三等邊形爲界 凡正體俱可切於空球體之內而球體亦可切於空正體之內
法線者作形倣顯之線常爲虛線先設點以定位次設線以定度取線長短之度者卽取某線之長數或用針刺細孔或用規作短弧引長某線者卽將線之一端加長若干

圖五、出現在《器像顯真》裡的正多面體。

當然，以上的自問自答也可能只是筆者自己想太多，畢竟在那個還沒有電動機具挖刻與打磨的時空，也許方燈的 14 孔洞，不僅較不燒腦，也剛好提供較多的空間給牙匠們挑戰更多的分層，而其不等距的外層版面，也許更適合編排有主客之分的雕刻題材。

找充電

以下簡要彙整與象牙球相關的介紹文章和影音資料，期供讀者能快速入門。

1. 科普文

(1) 施靜菲，〈關於翠玉白菜與象牙球的一些事〉，《故宮文物月刊》第 288 期(2007.03)，頁 4-10。

(2) 嵇若昕，〈從「鬼工」到「仙工」～清代南派牙雕工藝概述〉，《故宮文物月刊》第 291 期(2007.06)，頁 58-71。

(3) 施靜菲，〈象牙球所見之工藝技術交流—廣東、清宮與神聖羅馬帝國〉，《故宮學術季刊》第 25 卷第 2 期(2007)。https://www.npm.gov.tw/Research-Search.aspx?sno=03012589&p=16

(4) 彭良禎，〈精彩一百－國寶總動員〉，「MathMagics 魔數」專欄，收入「遠哲動手玩科 學」系列電子報(2012.01)。https://ytsorg.blogspot.com/2012/01/math-magics.html

(5) 胡櫨文整理，〈「透視象牙球工作坊」紀要〉，《故宮文物月刊》第 444 期(2020.3)，頁 76-83。https://www.npm.gov.tw/Research-Search.aspx?sno=03012589&p=16

2. 短影音

(1)〈到故宮找想像力(象牙球)〉。https://www.youtube.com/watch?v=Dewi0FjNZxc

註：同系列還有〈到故宮找美夢(轉心瓶)〉、〈到故宮找新鮮(翠玉白菜)〉、〈到故宮找驚喜(橄欖舟)〉。但不知何故，當年精心製作的毛公鼎動畫，如今卻遍尋不著。

(2)〈美好藝境｜象牙球〉。https://www.youtube.com/watch?v=7T8DKZMtsEw

(3)〈鬼功・象牙球：牙雕的奇巧極致(Ivory Ball)〉。https://www.youtube.com/watch?v=UpEKD4fxVS8

(4)〈中國絕技無價之寶〉。https://www.youtube.com/watch?v=e2DyqjPeswg

3. 台北故宮官網資訊：

(1)〈象牙雕鏤空人物套球〉。https://theme.npm.edu.tw/selection/Article.aspx?sNo=04009167

Open 圖庫 https://digitalarchive.npm.gov.tw/opendata/Integrate/IIIFViewer?id=1&dep=U&imageName=364574^^^1534693224

(2) 故宮南院「鬼功・象牙球：牙雕的奇巧極致」展覽回顧(2017) 。

https://south.npm.gov.tw/ExhibitionsDetailC003110.aspx?Cond=6fcad1c6-fa48-41fe-82f8-969938a335bd

4. 北京故宮官網資訊：象牙球。https://www.dpm.org.cn/fully_search/%E8%B1%A1%E7%89%99%E7%90%83

古算典籍中的等差數列題組問題:
以《張丘建算經》為例

林君哲
國立台北教育大學數資系數學教育碩士班

在中國數學史上，關於等差數列的計算，最早可追溯至《周髀算經》，但其問題和算法都較為簡易的，多以公差做累加的算法。[1]到了《九章算術》亦出現了等差數列題目，而其做法多用今有術或以盈不足術求解，較無統一的解法，到了劉徽作注時，才有更進一步說明等差數列的概念和算法。[2]到南北朝時期，出現了一本算經，名為《張丘建算經》，與《九章算術》的多道題目皆有對照，但其題目與術曰的編排又多有迴異，展現獨特的風格，就如歷史的進程一般，不僅承先，亦開啟屬於它的歷史痕跡，為後人留下了啟後的發展。接下來將以等差數列的「題組」，試著說明其「兩題一組」的內容編排。

《張丘建算經》中有七題涉及等差數列的討論，本文挑選出卷上第二十二、二十三題、三十二題、卷中第一題作為討論比較的對象，試圖考察《張丘建算經》的體例 **(format)** 脈絡，與說算者的風格展現。

一、《張丘建算經》的等差數列題組:由量差到總量

在此先針對卷上第二十三和二十二題來考察其題目和術曰風格，下列為引述這兩題的題目、答案和術曰的解法：

> **【卷上第二十三題】**
> **今有女子不善織，日減功遲。初日織五尺，末日織一尺，今三十日織訖。問織幾何?**
> **答曰：二匹一丈。**
> **術曰：**
> **並初、末日織尺數，半之；餘以乘織訖日數，即得。**
>
> **【卷上第二十二題】**
> **今有女善織，日益功疾。初日織五尺，今一月日，織九尺三丈。問日益幾何?**
> **答曰:五寸、二十九分寸之十五**
> **術曰：**
> **置今織尺數，以一月日而一，所得，倍之。**

---

[1] 紀志剛（1999）。《孫子算經》、《張邱建算經》、《夏侯陽算經》導讀。湖北：湖北教育出版社，頁 161。

[2] 《九章算術》中關於等差數列的討論，究竟是出於原文還是劉徽注，學者們有不同的看法，本文採用紀志剛老師的看法，視為劉徽注的內容。參見紀志剛（1999），頁 161。

又倍初日尺數，減之，餘為實。

以一月日數，初一日減之，餘為法。實如法得一。

這兩題皆為女子織布的題目，題目的背景設定為一個不善織和一個善織，而問題為，二十三題問總共織了多少長度的布、二十二題問每日織布增加多少長度。挑選這兩題作為一併討論的題目，除了都為女子織布和善織、不善織外，其中一個問的是等差數列的總和，即等差級數的部分，另一個題目問的是公差，而有趣的是，其術曰所使用的方法，和現今我們國中數學課本所用的等差級數公式是不謀而合的，接下來針對其術曰來做解釋。在此之前，先列出我們國中數學課本在學習等差數列與級數會用到的相關公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ —— } (1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ —— } (2)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ —— } (3)$$

因為在現今國中的教學，是先討論等差級數求和[3]，故在此以二十三題在前，二十二題在後的順序作排列，以符合現今教學順序，便於探討。在二十三題的部分，術曰的第一句話「**並初、末日織尺數**」即是首項 (a_1) 和末項 (a_n)相加，接著「**半之**」即除以二，最後「**餘以乘織訖日數，即得。**」是用除以二後的數乘上開始織布到結束的總日數，即為項數 (n)，翻譯成現代數學公式，其形式為

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

和 **(1)** 的公式是相符的。

再來為第二十二題的術曰，「**置今織尺數，以一月日而一，所得，倍之。**」即用總和 (S_n) 除以總日數 (n) 再乘 **2**，也就是

$$\frac{S_n}{n} \times 2$$

「**又倍初日尺數，減之，餘為實。**」其中初日尺數為 a_1 ，整句即

$$\frac{S_n}{n} \times 2 - 2a_1$$

最後「**以一月日數，初一日減之，餘為法。實如法得一。**」即為

$$\frac{\frac{S_n}{n} \times 2 - 2a_1}{n-1}$$

[3] 教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要──數學領域課程手冊：國民中小學暨普通型高級中等學校（第 431 頁）。教育部。

此為二十二題術曰日益幾何，亦即公差（d）的求法，和 (2) 的公式本質上相同，僅是經變換改為公差的求法。

從這兩題的佈題和術曰可見《張丘建算經》的題目與題目間具有連結性的端倪，且在現今的等差級數的教學上，亦是要求學生能比較 (1) 和 (2) 兩者間應用的異同之處[4]，雖然現今的課程手冊有備註，先不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」，與第二十二題的給數列總和，問公差的提問不相符，但仍不失古與今在數學題目編排上的同工之妙。

至於為何《張丘建算經》將已知總和求公差的題型放在前，已知公差求總和置於後，筆者的推測是，算經與國家的技術官僚的工作息息相關，而國家的財政政策多先統計財政總量，再以此做比率或量差的分配，例如北魏的均田政策[5]，於《魏書・食貨志》中有提到「……分徙吏民及徒何種人、工伎巧十萬餘家以充京都，各給耕牛，計口授田。……其外四方四維置八部帥以監之，勸課農耕，量校收入，以為殿最。」其中計口授田為類似的概念，是以人口為基準分配土地， 故在古代政府運作上是較常使用已知總量求公差，《張丘建算經》將其置於前，或許正是如此才與現今編排不同。

卷上首先出現的這連續兩題，分別代表了等差級數中，「等差」和「級數」的問題，率先在書中呈現了兩個在等差數列中的重要概念，或許也可以作為對後續書中相關問題的引導。

二、《張丘建算經》的等差數列題組:公差的轉變

為此，我們再來考察卷上和卷中的另兩題等差數列問題，卷上第三十二題和卷中第一題，下列為其題目、答案和術曰的解法:

【卷上第三十二題】
今有與人錢，初一人與三錢，次一人與四錢，次一人與五錢，以次與之，轉多一錢。與訖還斂聚與均分之，人得一百錢。問人幾何?
答曰： 一百九十五人。
術曰：
置人得錢數，以減初人錢數，餘，倍之。
以轉多錢數加之，得人數。

---

[4] 同上引。

[5] 於九世紀成書的杜佑《通典》亦有更加詳細的提到「隋文帝令，自諸王以下至於都督，皆給永業田，各有差。多者至百頃，少者至四十畝。......開皇九年，任墾田千九百四十萬四千二百六十七頃。......開皇十二年，文帝以天下戶口歲增，京輔及三河地少而人眾，衣食不給，議者咸欲徙就寬鄉。帝乃發使四出，均天下之田。」從各有差的分配，到任墾田數的統計，再到戶口歲增，與最後的發使四出，均天下之田，都表明中央政府乃先統計總量，再做分配的調整。然而因《魏書・食貨志》時序較為接近《張丘建算經》的成書年代，故內文以《魏書・食貨志》為主要引文。

【卷中第一題】
今有戶出銀一斤八兩一十二銖。今以家有貧富不等，令戶別作差品，通融出之。最下戶出銀八兩，以次戶差各多三兩。問戶幾何?
答曰：一十二戶。
術曰：
置一戶出銀斤兩銖數，以最下戶出銀兩銖數減之。
餘，倍之，以差多兩銖數加之，為實。
以差兩銖數為法。實如法而一。

兩題皆屬分銀錢類問題，且在卷次中緊密相連：卷上之終題與卷中之首題。兩題均以平均數為已知，並求項數 n 為未知，僅在公差的設定上有所不同一，前者公差為 1，後者則為非 1。以下為原文的術曰。在三十二題的部分，術曰「**置人得錢數，以減初人錢數，餘，倍之。**」人得數即平均數 $(\frac{S_n}{n})$，初人數為a_1，整句即為

$$\left(\frac{S_n}{n}-a_1\right)\times 2$$

「**以轉多錢數加之，得人數。**」這句即再加上公差 1，即為

$$2\left(\frac{S_n}{n}-a_1\right)+1$$

卷中第一題的術曰部分，「**置一戶出銀斤兩銖數，以最下戶出銀兩銖數減之。餘，倍之，以差多兩銖數加之，為實。**」其中「**一戶出銀斤兩銖數**」即平均數 $(\frac{S_n}{n})$，「**最下戶出銀兩銖數**」為 a_1，「**差多兩銖數**」為公差整句即為 (d)，整句即為

$$2\left(\frac{S_n}{n}-a_1\right)+d$$

「**以差兩銖數為法。實如法而一。**」即為

$$\frac{2\left(\frac{S_n}{n}-a_1\right)+d}{d}$$

比較這兩題的術曰可以發現，其所使用的方法，其背後概念是相同的，都為 (2) 的公式，差別在於前者的公差為 1，故分母直接省略不言，後者因其公差不為 1，故有明確提及分母的擺放為何。將這兩題的題目和術曰放在一起比較就會發現，其題目基本是一致的，用已知的 $\frac{S_n}{n}$、a_1、d，求出項數 (n)，而術曰的部分，其方法也是一致的，僅差別在公差 1 與非 1，這部分更像是作為由簡單過渡到繁複的比較，讓學習者能漸進的學習。

三、《張丘建算經》的等差數列問題:術曰的風格

卷上三十二和卷中第一題，在其題目和解法都出現了平均數 $(\frac{S_n}{n})$ 的用法，在卷上第十八題有類似的應用部分，但其題目較這兩者又有不同，先來看看題目，下列為題目和術曰的解法：

> **今有十等人大官，甲等十人，官賜金依等次差降之。上三人先入，得金四斤，持出。下四人後入，得金三斤，持出。中央三人未到者，亦依等次更給。問各得金幾何，及未到三人復應得金幾何?**
>
> **術曰：**
>
> **以先入人數分所持金數為上率，以後入人數分所持金數為下率，二率相減，餘為差實。併先後入人數而半之，以減凡人數餘為差法。實如法而一，得差數。**
>
> **併一、二、三，以差數乘之，以減後入人所持金數，餘，以後入人數而一。**
>
> **又置十人減一餘乘差數併之，即第一人所得金數，以次每減差數，各得之矣。併中央未到三人得應持金數。**

此亦為分銀錢的問題，此處為分金，此題目較長亦較繁複，以現代白話文分別翻譯，「**今有十等人大官，甲等十人，官賜金依等次差降之。**」現在有十個等級的大官共十人，賞賜的金數依等級下降(遞減)；「**上三人先入，得金四斤，持出。下四人後入，得金三斤，持出。中央三人未到者，亦依等次更給。**」上等的三人先進入，得到四斤黃金，拿著金子出去，下等的四人後來進入，得到三斤黃金，拿著金子出去，最後中等的三人沒有到，也是依等次遞減分配；「**問各得金幾何，及未到三人復應得金幾何?** 」問各得到多少斤的黃金，沒有到的三人又總共得到多少黃金。接著術曰分三部分依序翻譯:
第一部分，「**以先入人數分所持金數為上率，以後入人數分所持金數為下率，二率相減，餘為差實。併先後入人數而半之，以減凡人數餘為差法。實如法而一，得差數。**」先入人數為 n_1，得金為 S_1；後入人數為 n_3，得金為 S_3，所以此處上率與下率分別記為 $\frac{S_1}{n_1}$ 和 $\frac{S_3}{n_3}$ ，差實即為$\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}$ ，差法為 $n-\frac{n_1+n_3}{2}$ ，差數即公差，則為

$$\frac{\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}}{n-\frac{n_1+n_3}{2}} \quad \text{—} (4)$$

而術曰的求法最終得到的公差（4），是否可以用現今的等差數列公式推導獲到，在此我們來考察一下，前提與解釋如下: 中央人數為n_2，得金為S_2，公差d的部分較為特殊，題目的公差會與現今國中等差數列公式預設的公差，差一個負號，此部分原因後續會說明，其餘n_1、S_1、n_3、S_3皆與上述相同。先說明前述提到的公差，因《張丘建算經》在卷上第十八題的題目中有言「**今有十等人大官，甲等十人，官賜金依等次差降之。**」,

數列為遞減的形式，以現代數學的理解來說公差為負數，但古代算書的寫法，在脈絡清楚的情況下不會刻意標記負數，因此後續的推導，會以《張丘建算經》卷上第十八題的題意為設定，再轉換成現在數學表示時，公差會表示為$-d$，以求還原算經的原貌。接著繼續說明前提，先入人的數列為 a_1 到 a_{n_1}，故 $\frac{S_1}{n_1}=\frac{a_1+a_{n_1}}{2}$；中央人的數列為 a_{n_1+1}到 $a_{n_1+n_2}$；後入人的數列為 $a_{n_1+n_2+1}$到 a_n，故 $\frac{S_3}{n_3}=\frac{a_{n_1+n_2+1}+a_n}{2}$。最後$n_2=n-(n_1+n_3)$，以上述為前提，可推導出

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}&=\frac{1}{2}\left(a_1+a_{n_1}-a_{n_1+n_2+1}-a_n\right)\\
&=\frac{1}{2}(a_1+a_1+(n_1-1)(-d)-[a_1+(n_1+n_2)(-d)]-[a_1+(n-1)(-d)])\\
&=\frac{1}{2}(n_1-1-n_1-n_2-n+1)(-d)\\
&=\frac{1}{2}\{n_1-1-n_1-[n-(n_1+n_3)]-n+1\}(-d)\\
&=\frac{1}{2}(n_1-1-n_1-n+n_1+n_3-n+1)(-d)\\
&=\frac{1}{2}(n_1+n_3-2n)(-d)\\
&=\left(\frac{n_1+n_3}{2}-n\right)(-d) \quad \text{——（5）}
\end{aligned}
$$

最終得到

$$\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}=\left(\frac{n_1+n_3}{2}-n\right)(-d)$$

經過移項後，公差$-d$為

$$-d=\frac{\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}}{\frac{n_1+n_3}{2}-n}$$

再經整理，負號經移項至 $\frac{\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}}{\frac{n_1+n_3}{2}-n}$ 的分母，公差 (d) 即為

$$d=\frac{\frac{S_1}{n_1}-\frac{S_3}{n_3}}{n-\frac{n_1+n_3}{2}} \quad \text{——（6）}$$

此公差（6）與（5）是一致的，代表《張丘建算經》卷上第十八題術曰中的公差算法，以現代數學證明是正確無誤的。

術曰第二部分的翻譯，已知後入人的數列為$a_{n_1+n_2+1}$到a_n，公差為 $-d$，術曰「**併一、二、三，以差數乘之，以減後入人所持金數，餘，以後入人數而一。**」因下四人的四項各為

$$a_n、a_n-d、a_n-(-2d)、a_n-(-3d)$$

整理後的四項為

$$a_n、a_n+d、a_n+2d、a_n+3d$$

後入得金S_3為

$$S_3=a_n+(a_n+d)+(a_n+2d)+(a_n+3d)$$

「**併一、二、三，以差數乘之，以減後入人所持金數**」是以後入得金 S_3減第二到四項的所有公差，即為

$$S_3-(1+2+3)d=4a_n$$

「**餘，以後入人數而一。**」是除以後入人數，四人，所得答案為a_n，是為得金數最少的一人。 綜合上述，以現代數學表示即為：

$$a_n=\frac{S_3-(1+2+3)d}{4}$$

術曰第三部分則為求出得金最多的一位，在此視為首項a_1，術曰為「**又置十人減一餘乘差數併之，即第一人所得金數**」以現代數學表示即為：

$$a_1=a_n+(n-1)(-d) \quad \text{——(7)}$$

至此得到了第一人的得金數，剩下的每個人得金數，依次減公差即可得。《張丘建算經》卷上第十八題有趣之處在於第一部分的上、下率算法，與《九章算術》均輸章的第十九問是相同的，但後續的第二、三部分就有不同之處，故以下討論兩者的差異為何。

下列附上《九章算術》均輸章的第十九問：

今有竹九節，下三節容四升，上四節容三升。問中間二節欲均容各多少?
術曰：

以下三節分四升為下率，以上四節分三升為上率。
上下率以少減多，餘為實。
置四節、三節，各半之，以減九節，餘為法。實如法得一，即衰相去也。
下率，一升少半升者，下第二節容也。

可以發現《九章算術》均輸章第十九問的公差部分，一樣使用上、下率求公差，在此先考察上、下率算法可能的數學概念，以《九章算術》均輸章第十九問為例子，此題假定各節容量成等差，術曰「**以下三節分四升為下率**」為 $4 \div 3 = \frac{4}{3}$ 此為下率，即下三節的中間項之容量；「**以上四節分三升為上率**」為 $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ 此為上率，即上四節的中間項之容量； 其容量差為 $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$，上三節和下四節的中間項相差，為減去上、下節的各一半，節數即為數即為 $9 - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{11}{2}$。 ，最終容量差除以節數，即得 $\frac{7}{66}$，此為公差，與答曰兩兩項之差是相符的，是故可以看出《九章算術》均輸章第十九問以分數的四則運算直接解決問題，一直到算出各項為止。

但後續的部分則與《張丘建算經》卷上第十八題不同，《九章算術》均輸章第十九問為依次累加的辦法，《張丘建算經》卷上第十八題使用了先求最少得金知人，再以此求得得金數最多之人，最後才依次算出各項之值，此為特別之處，表現出《張丘建算經》在等差數列問題上，有較為統一的解法，也是其風格所在。

四、結語

至此，我們已經分別對《張丘建算經》卷上二十二和二十三題為一組，卷上三十二和卷中第一題為另一組做比較，也提及卷上第十八題的首項、末項的運用，發現這些題目都有相似的題幹與術曰，僅在問題或題目上做了些許變動，我認為這可以讓算學學習者透過這些變動，更順利去比較和學習算學。《張丘建算經》在等差數列的算法上也較有系統性，或許正暗喻著「說算者」張丘建的「教學」風格，不同於過去的內容編排，於算經中放入了相似題目，類似於現今的「題組」，而如果以「兩題一組」的題組來看其等差數列的題目，無論是公差與級數的求解，抑或是公差為 1 與否的題目，都隱約展現出其不同於《九章算術》的風格。然而除了不同的部分，亦有相同的部分，就如《張丘建算經》卷上第十八題的上、下率用法，承襲於《九章算術》的概念，這些異同皆可看作是中國古算經與算學的知識傳承和演變。

在唐代國子監太學「明算科」的考試用書中，《張丘建算經》與《孫子算經》都為較入門的科目，修業期限只需一年，正因為基礎，其體例的編排就值得注意了。且《張丘

建算經》對等差數列的術曰編排，給出了一個較為完整的體系，或許這亦對後來宋、元的高階等差數列發展奠定了基礎，給出了啟後的影響。

參考文獻

紀志剛（1999）.《孫子算經》、《張邱建算經》、《夏侯陽算經》導讀。湖北教育出版社。

洪萬生（2023）. 古算典籍中的題組：以《張丘建算經》為例。《HPM 通訊》，26(2)，pp. 1 – 6。

郭書春（1995）.《古代世界數學泰斗劉徽》，明文書局。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：https://hpmsociety.tw/hpmnewsletters/
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就近聯絡。

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中退休）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學退休）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）
孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）
陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
林建宏（丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）廖傑成（錦和高中）陳政宏（泰山高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中)、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中） 南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）