

正方形摺紙

台北市麗山高中 彭良禎

日常生活中，隨手可得的紙張皆為長方形，本文即介紹從長方形摺出正方形，及其後續推廣至正 8 邊形、正 16 邊形、...、正 4×2^n 邊形的摺法與原理。

一、從長方形摺正方形

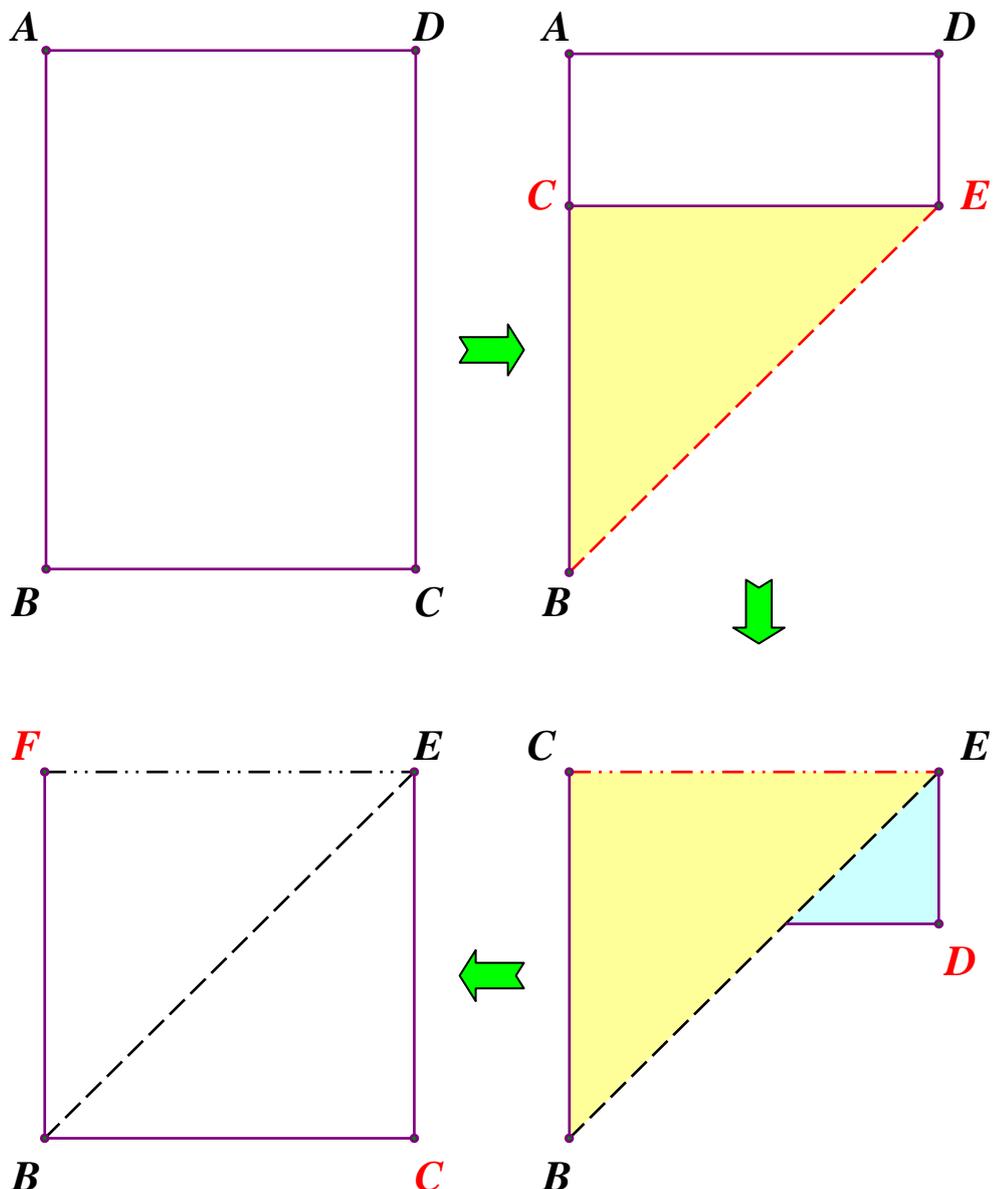
已知：一張長方形紙張（圖一左上）。

求摺：以寬為邊，摺出一個正方形。

摺法：1. 摺出 $\angle ABC$ 的角平分線 \overline{BE} （圖一右上）。

2. 以 \overline{CE} 為山線，將長方形 $ACED$ 往下摺（圖一右下）。

3. 打開 $\triangle CBE$ ，則正方形 $BCEF$ 即為所求（圖一左下）。



（圖一）順時針方向圖解正方形摺紙。

說明：1. 此法可說是「全民皆通」，其應用的原理是「正方形的一條對角線將正方形分割成兩個全等的等腰直角三角形」。**摺法 1** 首先善用 $\angle B$ 與 $\angle C$ 皆為直角的已知條件，當摺出 $\angle B$ 的角平分線時，即已取得一個等腰直角 $\triangle CBE$ ，**摺法 2** 則是利用重疊，再得出與 $\triangle CBE$ 重合的另一個的等腰直角三角形，最後**摺法 3** 只是打開對稱於正方形對角線的兩個等腰直角三角形，便得一個正方形。

2. 若在**摺法 2** 強調的不是利用重合來摺出 \overline{CE} ，而是要摺出 \overline{AB} 上過 C 點的垂線，則此法即與《幾何原本》第一卷第 46 命題「尺規作圖正方形：作一長等於寬的長方形」的想法一致。但由於**摺法 1** 之後所剩的 \overline{AC} 長度通常很短，若此時只求將 \overline{AC} 摺疊到 \overline{BC} 上，通常會產生較大的誤差，故此種摺法較少被使用。

二、從正方形摺正八邊形

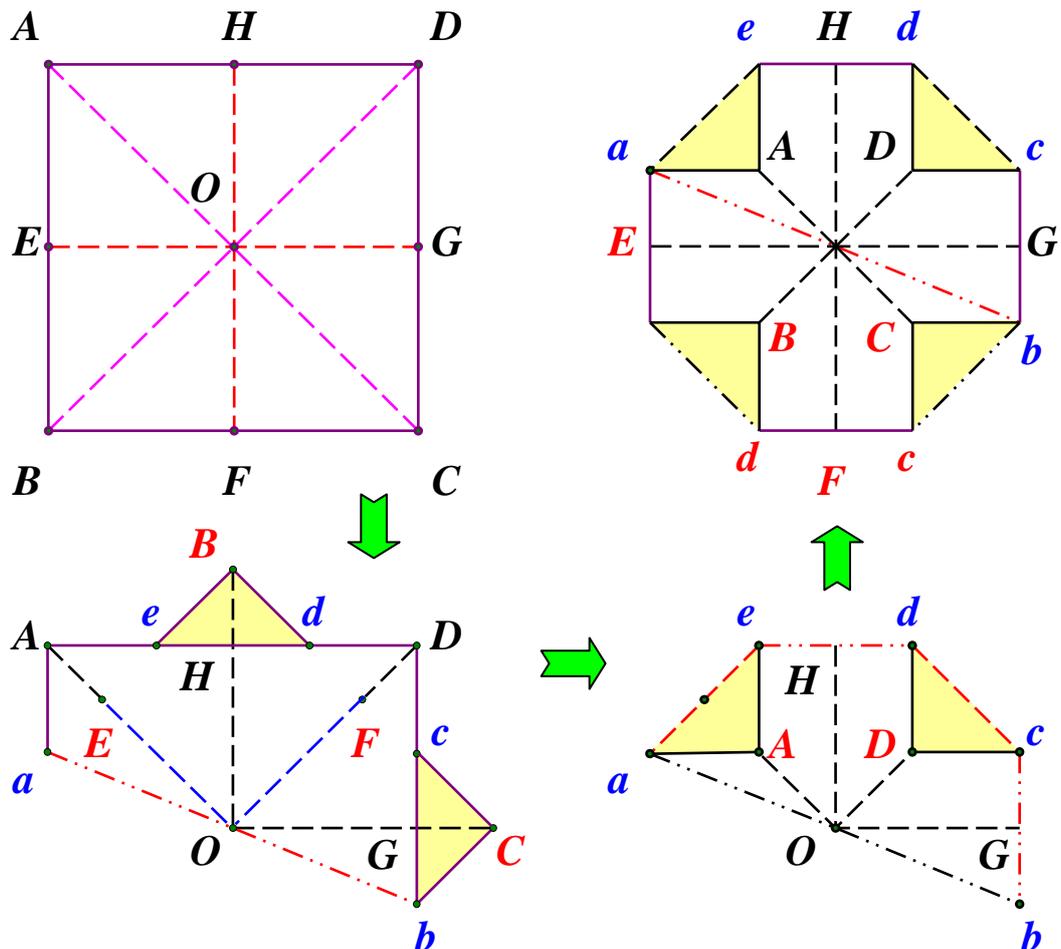
已知：一張正方形紙張。

求摺：一個正八邊形。

摺法：1. 分別摺出 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 的中垂線（圖二左上）。

2. 以山線方式摺出 $\angle AOE$ 的角平分線 \overline{ab} （圖二左下）。

3. 分別依原正方形的邊緣摺山線 \overline{ed} 與 \overline{cb} 、谷線 \overline{ae} 與 \overline{dc} （圖二右下），打開摺線 \overline{ab} ，即得一正八邊形（圖二右上）。



（圖二）逆時針方向圖解正八邊形摺紙。

說明：正八邊形有 8 條對稱軸，其中 4 條是對角線，另外 4 條是平行邊中點的連線。
摺法 1 即是先摺出後者；**摺法 2** 的目的則是透過 $\angle AOE$ 的角平分線來得出前者，雖只摺出其一，但此時點 c 、 d 、 e 即是其他對稱軸的端點位置，故最後再以 **摺法 3** 來摺出正八邊形的頂點。

建議：1. **摺法 1** 中的 4 條摺線恰為正方形的 4 條對稱軸，故可同步確認點 A 與點 C 重疊、點 B 與點 D 重疊、 \overline{AB} 與 \overline{CD} 重疊、 \overline{AD} 與 \overline{BC} 重疊，以提高精準度。
 2. 在 **摺法 2** 摺出 $\angle AOE$ 的角平分線 \overline{ab} 時，不僅 \overline{OE} 會摺疊到 \overline{OA} 上， \overline{OB} 、 \overline{OF} 、 \overline{OC} 也會分別摺疊到 \overline{OH} 、 \overline{OD} 、 \overline{OG} 上（圖二左下），故可藉此多重條件來提高精準度。

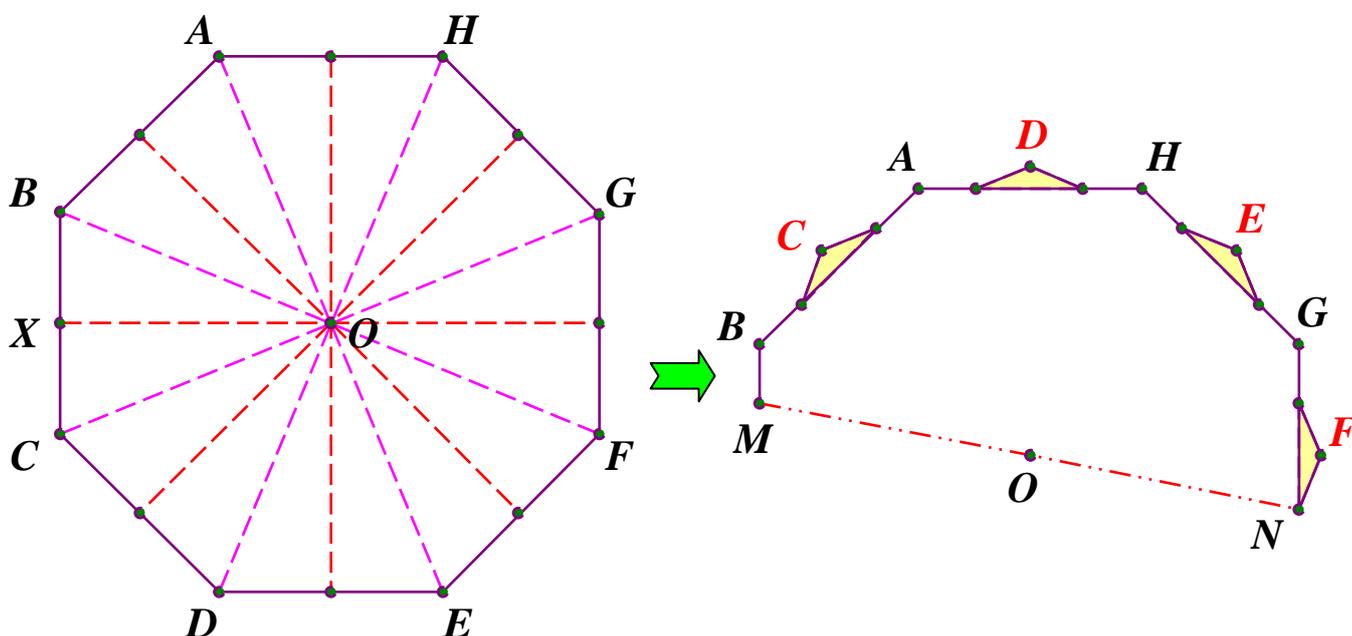
三、從正八邊形摺正十六邊形

已知：一張正八邊形紙張。

求摺：一個正十六邊形。

摺法：先摺出正八邊形的 8 條對稱軸（圖三左），再摺出兩相鄰對稱軸夾角 $\angle BOX$ 的角平分線 \overline{MN} （圖三右），即可得出正十六邊形的 16 個頂點位置。

推廣：理論上，從正 4×2^n 邊形摺出正 $4 \times 2^{n+1}$ 邊形的方法仿此即得，但在實際操作上，會因為正 4×2^n 邊形越來越趨近於圓，而面臨精準度的挑戰。



（圖三）圖解正十六邊形摺紙。

【相關閱讀】《發現月刊》第 151 期〈藝數家玩摺紙~基礎篇首部曲：數學摺紙〉。