希臘三大作圖題

西松高中
蘇惠玉

尺規作圖的限制

限制只能使用沒有記號的直尺和圓規，在紙上連續作出曲線 。 **WHY？**

古希臘哲學家們的影響：

泰利斯 (*Thales*)：
將數學抽象化來思考，並曾以邏輯推理的方式來證明某些數學定理，將數學從實用領域提升到抽象思考、進行論證的層次。

柏拉圖(Plato)：
數學知識存在於理想世界。
數學的學習是一種再發現的過程，而且必須要能夠掌握心靈的眼睛才能看得見的東西，不能受到感官的影響。
不過，為了學習我們還是需要憑藉圖形。他主張我們只能以最簡單、最完美的圖形，也就是只利用圓和直線所構成的幾何圖形才是可以接受的圖形，也才能用來訓練心靈的思考能力，或心靈的眼睛。

亞里斯多德(*Aristotle*)：
數學知識存在於現實世界的實體中，數學要研究的是從物理實體上面所引出來的抽象觀念。
他利用尺規作圖來證明所定義的物件的存在性。

歐幾里得(Euclid)：
在他的經典作品《幾何原本》一書中，他規範了幾何作圖的工具與方法，以便以最嚴謹的形式，讓圖形在邏輯論證的系統中被接受。

尺規作圖的「動作」：

《幾何原本》的「設準」：

1. 從任一點到任一點可作直線
(To draw a straight line from any point to any point)。
以沒有刻度的直尺連接兩點

2.有限直線可沿著直線不斷地延長
(To produce a finite straight line continuously in a straight line)。
延長成直線

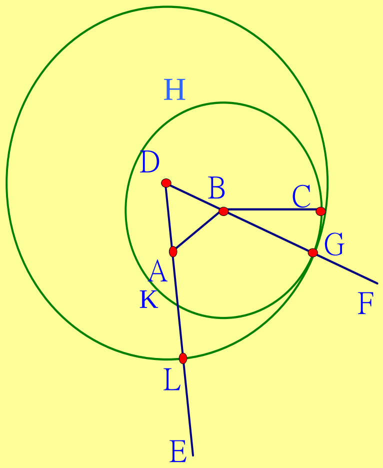
3.以任意中心與任意距離可作一圓
(To describe a circle with any centre and distance)。
以某一點為圓心，已知長度為半徑畫圓

《幾何原本》第一卷

命題1：在一個已知有限直線上作一個等邊三角形

命題2：由一個已知點（作爲端點）作一線段等於已知直線

先連A到B的線段AB，以AB爲邊長，在AB上作等邊三角形DAB，延長DA，DB成直線AE，BF。再以B爲圓心，以BC爲半徑畫圓CGH再以D爲圓心，以DG爲半徑畫圓GKL。
因爲BC＝BG，DL＝DG，且DA＝DB，所以AL＝BG＝BC，即AL爲所求線段。

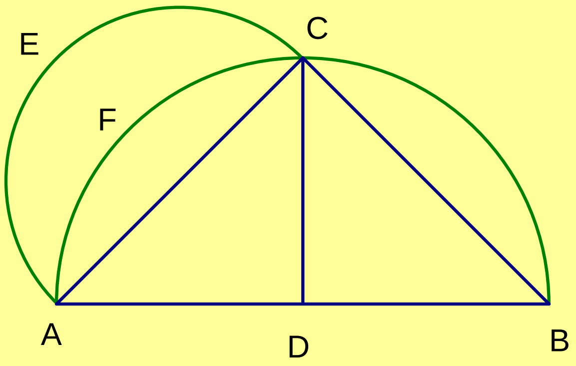


三大作圖題

1.化圓為方(to square a circle)：

做一正方形使其面積等於一已知圓面積。

希波克拉提斯(Hippocrates of Chios, 約460~380 B.C)的「新月形的平方化」：兩圓相交部分的新月形可以化成面積相等的三角形



AB、AC為內接於圓AB的正方形的兩邊，弧AEC為以AC為直徑的半圓，

新月形ACE＝ $\triangle ACD$

因為AC＝BC，又$AB^2＝AC^2＋BC^2$，所以，$AB^2＝2AC^2$

又

$$\frac{\text{半圓AEC}}{\text{半圓ACB}}=\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{1}{2}$$

所以半圓AEC＝ $\frac{1}{4}$ 圓ADCF，

同時減去弓形ACF，所以新月形ACE＝$\triangle ACD$

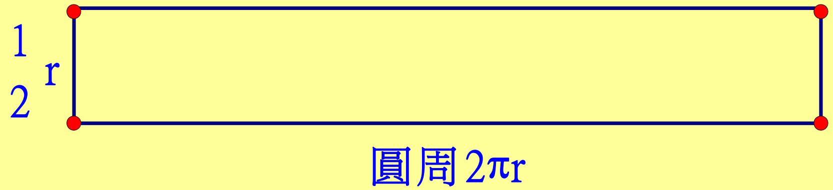
化圓為方的不可能性

作一正方形使得面積等於一已知圓的這個問題，其實牽涉到 π 與 $\sqrt{\pi}$ 尺規作圖的可能性。1882年德國數學家林德曼(F. Lindemann, 1852~1939)在代數數與超越數的基礎下，證明 π 爲超越數，即不可用尺規作圖作出，同時得證化圓爲方是不可能的。

解除限制的解法

達文西（Leonardo da Vinci, 1452-1519）：

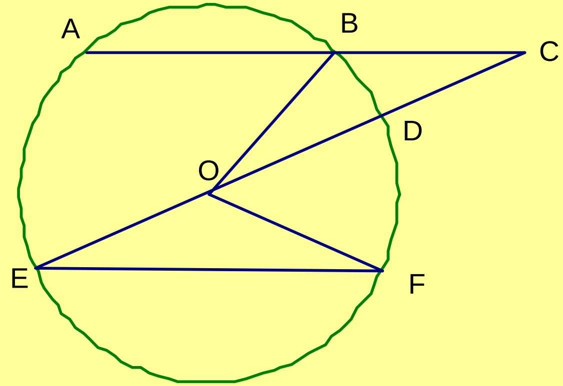
他取一圓柱，底面積與已知圓相等，高爲半徑的一半。將這個圓柱在平面上滾一圈時，產生一個面積恰爲 $2\pi r \bullet \frac{r}{2} = \pi r^2$ 的矩形，再將矩形化爲正方形即可。



2. 三等分任一角

阿基米得《引理集(Book of Lemmas)》的命題8：

如果AB是以O爲圓心上的任意弦，AB延長到C，使得BC等於圓的半徑；如果CO交圓於D並延長到交圓於第二點E，則弧AE等於3倍的弧BD。



證明：作弦EF平行AB，連接OB，OF，

因爲角OEF＝角OFE，

所以，角COF＝2角OEF

＝2角BCO（由平行）

＝2角BOD（因爲BC＝BO）

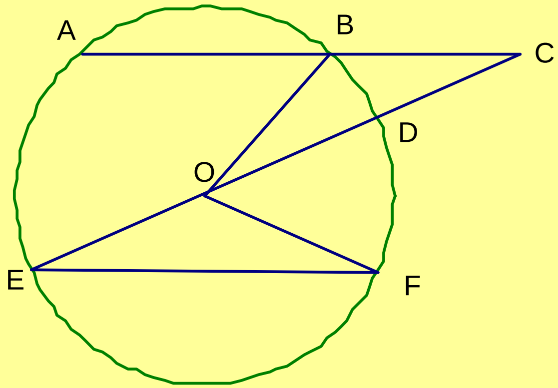
所以，$\angle BOF = 3\angle BOD$

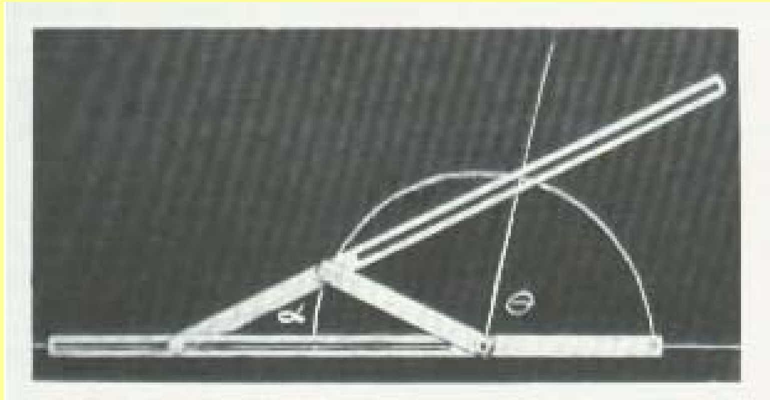
弧BF是弧BD的3倍。而弧AE等於弧BF，所以，弧AE是弧BD的3倍。

問題在於若AE爲給定的弧，延長CO時不見得會交於E點，所以並無法用尺規作圖解決。

解除限制的解法

阿基米德的工具：

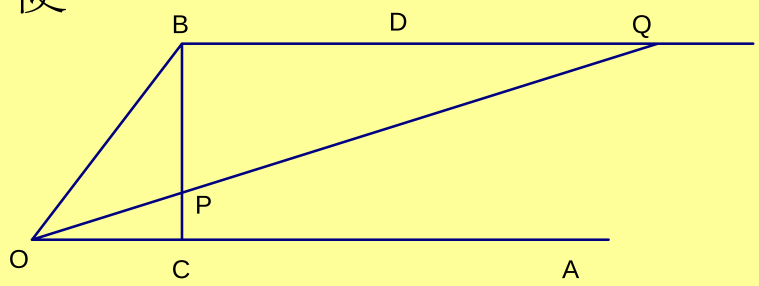




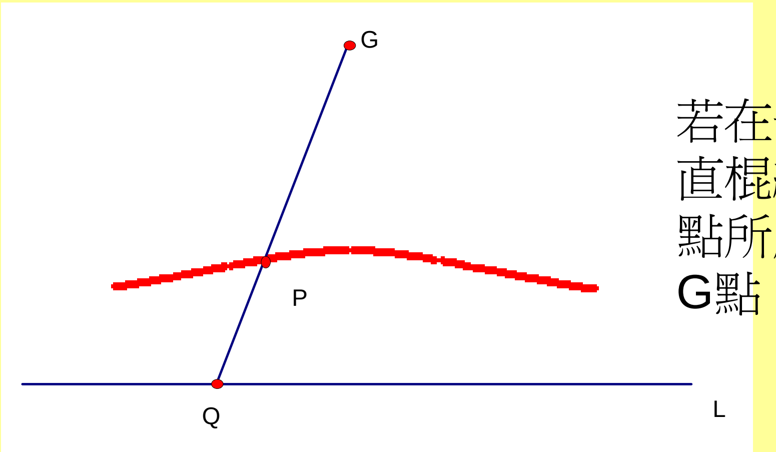
尼可門笛斯(Nicomedes, 約240 B.C) ：

角AOB爲給定之角，過B作AO的垂線，交AO於C，作直線BD平行AO。在直線BD上找一點Q，連OQ，並交BC於P，使得PQ＝2OB，則

$$\angle AOQ = \frac{1}{3}\angle AOB$$



尼可門笛斯蚌線(conchoids of Nicomedes)：

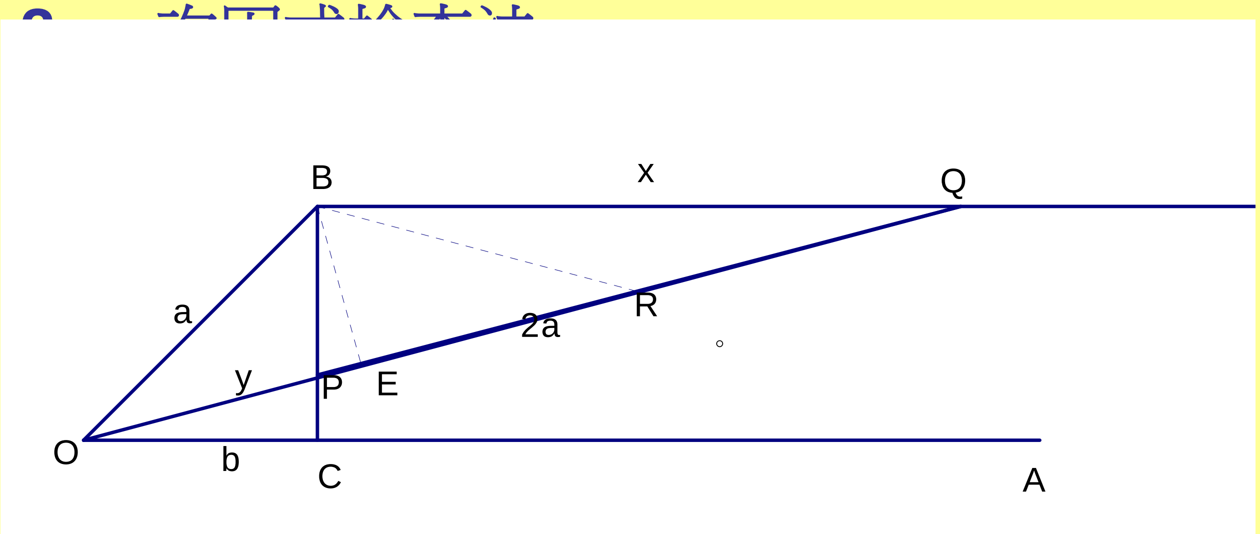


若在一根直棍上標示P、Q兩點，PQ的長度爲d，將這直棍繞著一點G旋轉，同時Q點在另一直棍L上滑動，P點所成的軌跡即是所謂的蚌線。若將上圖中的O點訂爲G點，直線BD爲L，P點爲蚌線和垂直線BC的交點。

三等分任意角的不可能性

在證明過程中，用到二個理論：

1. 一個三次方程式若無有理根則無可尺規作圖根。



得到一三次方程式 $x^3-3x-2b=0$

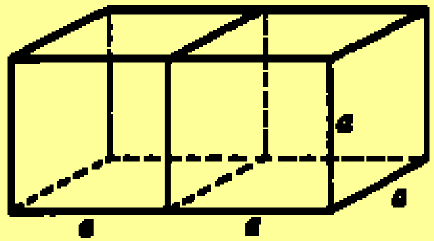
例如 $b=\frac{1}{2}$ ，即角爲60^0時，方程式爲 $x^3-3x-1=0$
沒有有理根，所以所有的根皆是不可尺規作圖的，即
60^0無法尺規作圖三等分，也就是說，尺規作圖三等
分任意角是不可能的。

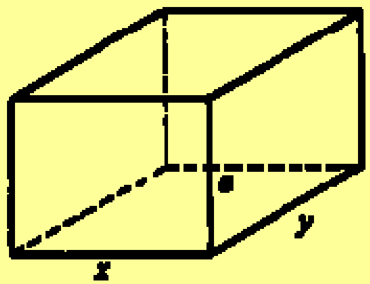
3. 倍立方：立方體的體積加倍，並且保持形狀

希波克拉提斯：作出兩線段長**a**與**2a**的兩個連續比例中項

要作出兩線段x, y滿足 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{2a}$

x即爲所要求的新正立方體的邊長。





解除限制的解法：

Menaechmus(約350B.C.)的圓錐曲線：

將連比例式拆成兩個等式：$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$ 及 $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$

從此，可得方程式 $x^2 = ay$及 $y^2 = 2ax$

因爲a已知，所以兩個拋物線的頂點、對稱軸能決定出，
即兩拋物線的交點可作出，即x與y可作出。

倍立方的不可能性：

設原立方體的邊長爲1，要作出的立方體邊長爲x，則x要滿足

$$x^3 = 2$$

這個方程式沒有有理根，當然就沒有可尺規作圖的x了。